Domácí úkol č. 11 k přednášce NMAG 101: Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 2.1.2014 16:00

(11.1) V prostoru $\mathbb{C}^2$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ je B ortonormální báze. Určete $\left\langle (x_1, x_2)^T \,\middle|\, (y_1, y_2)^T \right\rangle$.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(11.2) Dokažte, že v libovolném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ platí (pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$)

$$\mathrm{Im}\,(\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2) \ ,$$

kde $\mathrm{Im}\,(x)$ značí imaginární část komplexního čísla x.

Bonusový problém: Ukažte, že „skalární součin je až na násobek určen kolmostí“. Přesněji: Nechť $\langle\,|\,\rangle_1$ a $\langle\,|\,\rangle_2$ jsou dva skalární součiny na konečně generovaném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ takové, že pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí $\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle_1 = 0$ právě tehdy, když $\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle_2 = 0$. Pak existuje kladné reálné číslo t takové, že pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí $\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle_1 = t \, \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle_2$.