Domácí úkol č. 1 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 5.3.2013 15:30

(1.1) O lineárním operátoru f prostoru $\mathbf{V} = \mathbb{Z}_2^4$ víme následující informace:

$$f \circ f = \mathrm{id}_V, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Určete $f((x_1, x_2, x_3, x_4)^T)$.

Nápověda: Ze zadání lze určit matici f vzhledem k nějakým bázím. Standardním postupem pak najděte matici f vzhledem ke kanonickým bázím.

(1.2) Víme, že B, C, D jsou báze prostoru $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Dále víme, že platí

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad [f]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f]_C^D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} .$$

Určete $[\mathbf{x}]_D$ (v závislosti na x_1 a x_2).

Nápověda: Použitím pravidel pro počítání s maticemi lineárních zobrazení lze získat potřebnou matici přechodu.

Bonusový problém: Nechť $\mathbf{V}$ je konečně generovaný prostor a $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je báze $\mathbf{V}$. Nechť $f_1, \ldots, f_n$ jsou lineární formy určené vztahy $f_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ukažte, že $B^d = (f_1, \ldots, f_n)$ tvoří bázi $\mathbf{V}^d$, je to tzv. *duální báze k* B. Dále dokažte, že pro libovolnou formu $f \in \mathbf{V}^d$ platí $[f]^B = ([f]_{B^d})^T$.

Dále nechť $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi konečně generovanými prostory, B je báze $\mathbf{V}$ a C je báze $\mathbf{W}$. Zobrazení $g^d : W^d \to V^d$ definujeme vztahem $g^d(f) = fg$ (pro každé $f \in W^d$). Dokažte, že g^d je lineární zobrazení $\mathbf{W}^d \to \mathbf{V}^d$ a platí

$$[g^d]_{B^d}^{C^d} = ([g]_C^B)^T$$