

## Domácí úkol č. 1 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2018–2019

(1.1) Dokažte, že v libovolném komplexním vektorovém prostoru  $\mathbf{V}$  se skalárním součinem  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  platí (pro libovolné  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ )

$$\operatorname{Im}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2) ,$$

kde  $\operatorname{Im}(x)$  značí imaginární část komplexního čísla  $x$ .

(1.2) Zobrazení  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je dáno vzorcem

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$$

kde  $A$  je reálná symetrická čtvercová matice  $A = (a_{ij})$  řádu 2. Dokažte, že  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  je skalární součin na  $\mathbb{R}^2$  právě tehdy, když platí

$$a_{11} > 0 \quad \text{a} \quad \det(A) > 0 .$$

**Bonusový problém:** Vytvořte a dokažte podobné kritérium jako v příkladu 1.2. pro matici  $A$  řádu  $n$ .