

Domácí úkol č. 2 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 12.3.2013 15:30

(2.1) Nechtě \mathbf{T} je těleso, $a \in T$ a A je čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} taková, že součet prvků v každém sloupci je roven a . Dokažte, že pak a je vlastním číslem matice A .

Nápověda: Řešte nejprve pro $a = 0$. Nahlédněte, co podmínka říká o řešení homogenní soustavy $A^T \mathbf{x} = \mathbf{o}$. Pak stačí zkombinovat tvrzení z přednášky. Obecný případ převedte na případ $a = 0$.

(2.2) Najděte explicitní vzorec pro n -tou mocninu reálné matice A ($n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Nápověda: Nahlédněte, že pokud pro dvě čtvercové matice A, B platí $AB = BA$, pak platí obdoba binomického vzorce pro výpočet mocniny $(A + B)^n$. To použijte pro vhodnou volbu matic A a B .

Bonusový problém:

Existuje zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, které pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ splňuje $f(x+y) = f(x) + f(y)$, jiné než zobrazení tvaru $f(x) = kx$ (pro $k \in \mathbb{R}$)? Existuje takové spojité zobrazení?