Domácí úkol č. 3 k přednášce NMAG 101: Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 30.10.2013 16:00

Uvažujme prvočíslo p a celá nezáporná čísla $0 \leq k, l < p$. V příkladech budeme počítat s množinou lineárních polynomů nad $\mathbb{Z}_p$, tj. množinou všech výrazů tvaru $a + b\alpha$, kde $a, b \in \mathbb{Z}_p$. Na této množině definujeme dvě binární operace $+, \cdot$. Sčítání je definované jako u polynomů, tj.

$$(a + b\alpha) + (c + d\alpha) = (a + c) + (b + d)\alpha,$$

kde součty $a+c$ a $b+d$ počítáme v $\mathbb{Z}_p$. Násobení je definované také jako násobení polynomů, s tím, že $\alpha^2 = k + l\alpha$, tj.

$$\begin{aligned}(a + b\alpha) \cdot (c + d\alpha) &= ac + (ad + bc)\alpha + bd\alpha^2 \\ &= ac + (ad + bc)\alpha + bd(k + l\alpha) \\ &= (ac + bdk) + (ad + bc + bdl)\alpha,\end{aligned}$$

kde výrazy $ac + bdk$ a $ad + bc + bdl$ opět počítáme v $\mathbb{Z}_p$.

Příkladem je čtyřprvkové těleso $GF(4)$ zmíněné na přednášce, které dostaneme volbou $p = 2$, $k = l = 1$.

(3.1) Položme $p = 3$. Pro které dvojice $k, l \in \{0, 1, 2\}$ vznikne uvedenou konstrukcí těleso?

(3.2) Najděte všechna řešení soustavy rovnic nad tělesem GF(4). Určete také počet řešení.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \alpha & 1 & 1+\alpha & 1+\alpha & 1 & \alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha & 0 & 0 & 1+\alpha & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha & 1 & 1+\alpha & \alpha \end{array}\right)$$

Bonusový problém: Zkonstruujte nějaké 8 prvkové těleso.