

Domácí úkol č. 4 k přednášce NMAG111: Lineární algebra 1

zimní semestr 2021/2022

Datum odevzdání středa 3. listopadu 2021, 12.20

(4.1) Najděte všechny matice A typu 2×3 nad tělesem \mathbb{Z}_7 takové, že pro příslušné zobrazení f_A platí zároveň následující dvě podmínky.

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_7^3 : f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\} &= \{s(2, 1, 1)^T + t(0, 2, 1)^T : s, t \in \mathbb{Z}_7\} \\ \{f_A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_7^3\} &= \{t(1, 3)^T : t \in \mathbb{Z}_7\}\end{aligned}$$

Poznámka: Obě podmínky jsou rovnosti množin; proto jsou nalevo a napravo různá písmena (\mathbf{x} versus s a t resp. jenom t).

Návodné otázky: Jak určit druhý řádek matice A pomocí prvního řádku? (Podívejte se na druhou podmínku.) Jak bude vypadat matice A po Gaussově eliminaci? Co je potřeba, aby byla splněna první podmínka?

(4.2) Najděte reálnou čtvercovou matici A řádu 3 takovou, aby příslušné zobrazení f_A bylo kolmou projekcí na přímku $\{t(1, 2, 3)^T : t \in \mathbb{R}\}$.

Nápověda: Kolmá projekce vektoru \mathbf{u} na danou přímku P je ten vektor $\mathbf{v} \in P$, pro který je vektor $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ kolmý na směrový vektor přímky P . Využijte následující poznatek bez důkazu: dva vektory $(a, b, c)^T$, $(d, e, f)^T$ jsou kolmé právě tehdy, když $ad + be + cf = 0$.

Bonusový problém: Najděte matici odpovídající projekci na rovinu $ax + by + cz = 0$ podél přímky se směrovým vektorem $(d, e, f)^T$.