

Domácí úkol č. 5 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2018–2019

(5.1) Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí pro každou reálnou čtvercovou matici A řádu k . (Odpověď dokažte.)

- (a) Pokud $A^2 = A$ a λ je vlastní číslo matice A , pak $\lambda \in \{0, 1\}$.
- (b) Pokud $A^2 = A$, pak 0 je vlastním číslem matice A .
- (c) Pokud $A^2 = A$, pak 1 je vlastním číslem matice A .
- (d) Pokud pro nějaké přirozené číslo n platí $A^n = 0_{k \times k}$ a λ je vlastní číslo matice A , pak $\lambda = 0$.
- (e) Pokud pro nějaké přirozené číslo n platí $A^n = 0_{k \times k}$, pak 0 je vlastní číslo matice A .

(5.2) Máme k dispozici neomezenou zásobu tří druhů dlaždic – červené o rozměrech 1×1 , modré o rozměrech 2×1 a zelené o rozměrech 2×1 (dlaždice stejného druhu jsou nerozlišitelné). Kolika různými způsoby lze vydláždít chodník o rozměru $n \times 1$? Najděte explicitní (nikoliv pouze rekurentní) vzorec.

Nápověda: Najděte nejprve rekurentní vzorec pro počet způsobů vydláždění chodníku (v závislosti na n).

Bonusový problém: Nechtě f, g jsou diagonalizovatelné operátory na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} . Dokažte, že $fg = gf$ právě tehdy, když existuje báze B prostoru \mathbf{V} taková, že každý vektor z B je zároveň vlastním vektorem operátoru f i g .