Domácí úkol č. 6 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 9.4.2014 15:30

(6.1) Označme $\mathbf{V}$ vektorový prostor všech reálných polynomů v proměnné x stupně nejvýše 1 (tj. polynomů tvaru $a + bx$) se skalárním součinem

$$\langle p \,|q \,\rangle = \int_0^1 pq \ \ .$$

Označme f lineární operátor na $\mathbf{V}$ definovaný vztahem

$$f(a + bx) = a + b + 2ax \ \ .$$

Pro každé $c, d \in \mathbb{R}$ určete $f^*(c + dx)$.

Nápověda: Napište si matici operátoru f vzhledem k nějaké ortonormální bázi B, použijte tvrzení o matici sdruženého operátoru vzhledem k B a převeďte do báze $(1, x)$.

(6.2) Najděte všechny invariantní podprostory operátoru $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nápověda: Lépe se hledají invariantní podprostory operátoru $f_A - 3\mathrm{id}$.

Bonusový problém: Pro operátor f na komplexním konečně generovaném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je $\langle \mathbf{x} \,| f(\mathbf{x}) \,\rangle$ reálné číslo (pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$). Dokažte, že $f^* = f$.