# **Domácí úkol č. 6** k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2016–2017

**(6.1)** Uvažujme diskrétní dynamický systém $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, kde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ a $A$ je reálná čtvercová matice řádu 3. O matici $A$ máme následující informace:

- $A$ je singulární.
- Součet prvků v každém sloupci matice $A$ je 1.
- Součet prvků na diagonále matice $A$ je 0.

Konverguje pak posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^{\infty}$ pro jakýkoliv počáteční vektor $\mathbf{x}_0$? Konverguje tato posloupnost pro nějaký nenulový počáteční vektor k nulovému vektoru? Konverguje tato posloupnost pro nějaký nenulový počáteční vektor k nenulovému vektoru? (S konvergencí stačí pracovat neformálně.)

**Nápověda:** Podívejte se na to, co říkají podmínky o charakteristickém polynomu matice $A$, přičemž použijte výsledek domácího úkolu 4.1. Pak můžete spočítat vlastní čísla a rozmyslet si, co říkají o řešení zadaného dynamického systému.

**(6.2)** Lineární operátor $f$ na prostoru $\mathbf{V} = \mathrm{LO}\left\{(1,3,-1,1)^T, (0,1,-1,4)^T\right\}$ (jde o podprostor prostoru $\mathbb{R}^4$) splňuje

$$f((1,3,-1,1)^T) = (1,2,0,-3)^T, \quad f((0,1,-1,4)^T) = (0,-1,1,-4)^T$$

Spočítejte $f^n((7,17,-3,-9)^T)$.

**Nápověda:** Začněte tím, že najdete matici $f$ vzhledem k nějaké bázi prostoru $\mathbf{V}$.

**Bonusový problém:**

Dokažte, že pro každý operátor na $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, který nemá (reálná) vlastní čísla, existuje ortogonální báze $B$ prostoru $\mathbf{V}$ taková, že matice $f$ vzhledem k $B$ je tvaru

$$[f]_B^B = r \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Dále ukažte, že nelze požadovat, aby $B$ byla ortonormální.