Domácí úkol č. 6 k přednášce NMAG111: Lineární algebra 1
zimní semestr 2021/2022

Datum odevzdání výjimečně **pátek 19. listopadu 2021, 9.00**

(6.1) Uvažujme množinu V všech reálných čtvercových matic řádu 3, které zároveň splňují podmínky

- součet prvního a posledního sloupce je vektor $(0,0,0)^T$;
- součet prvků na hlavní diagonále je 0.

Dokažte, že V (s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem) je podprostorem prostoru $\mathbb{R}^{3\times 3}$ a najděte nějakou pětiprvkovou množinu generátorů tohoto podprostoru.

Nápověda: Napište si, jak vypadá obecná matice splňující dané podmínky. Pak ji vyjádřete jako lineární kombinaci pěti konkrétních matic (které také splňují dané podmínky). Na základě tohoto můžete snadno obě části úlohy dokončit.

(6.2) Najděte matici A nad tělesem $\mathbb{Z}_3$ s co nejmenším počtem řádků tak, aby $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} B$, kde B je následující matice nad $\mathbb{Z}_3$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nápověda: Inkluze $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Ker} A$ je ekvivalentní jistým podmínkám na každý řádek matice A. (Jakým?) Na tomto základě navrhněte matici A a zdůvodněte, že platí i opačná inkluze a že počet řádků nelze dále zmenšit. Argumentovat lze počtem prvků.

Bonusový problém: Najděte nějakou dvouprvkovou množinu generátorů prostoru reálných posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňujících $2a_{n+2} = -3a_{n+1} - 1a_n$. Řešte stejnou úlohu pro posloupnosti splňující $2a_{n+2} = -3a_{n+1} - 2a_n$.