Domácí úkol č. 9 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 30.4.2014 15:30

(9.1) Dokažte, že pro libovolné komplexní matice A, B, C vhodných typů platí $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ a $\|BC\| \leq \|B\| \, \|C\|$.

Nápověda: Jde dokázat přímo z definice (bez charakterizace přes singulární hodnoty).

(9.2) V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ najděte reálnou matici B hodnosti 1 takovou, že $\|A - B\|$ je co nejmenší, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} .$$

Určete také $\|A - B\|$.

Nápověda: Pro pohodlnější počítání je dobré si všimnout, že A je symetrická, takže singulární rozklad je možné spočítat efektivnějším postupem než pro obecnou matici.

Bonusový problém: Frobeniova norma matice A typu $m \times n$ je definována vzorcem

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} .$$

Dokažte, že platí

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2} ,$$

kde $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ je seznam singulárních hodnot matice A, každé tolikrát kolik je jeho násobnost.