Cvičení k přednášce NMAG111 Lineární algebra 1

Řešení
Verze ze dne 14. října 2021

10 Báze – pokračování

Cíle cvičení:

- procvičit počítání souřadnic vzhledem k bázi,
- naučit se počítat matice přechodu.

Řešené příklady:

Úloha 10.1. Spočítejte dimenzi podprostorů

(a) $U = \{(0,0,0)^T\}$ aritmetického vektorového prostoru T^3 nad tělesem T,

(b) $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \le 9\}$ vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$,

(c) $U = \mathrm{LO}\{(3,5,6)^T, (2,4,1)^T, (3,3,1)^T, (1,0,6)^T\}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_7$,

(d) $U = \mathrm{LO}\{(2,1,1,1,1)^T, (1,2,1,1,1)^T, (1,1,2,1,1)^T, (1,1,1,2,1)^T, (1,1,1,1,2)^T\}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^5$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$.

Řešení. Podle definice stačí určit počet vektorů kterékoli báze.

(a) Protože je prázdná posloupnost $\emptyset$ bází U, dostáváme, že $\dim U = 0$.

(b) Protože posloupnost $(x^i \mid i = 0, \ldots, 9)$ jistě tvoří bázi podprostoru všech polynomů stupně nejvýše devět, vidíme, že $\dim U = 10$.

(c) Obvyklým způsobem seřadíme vektory generující podprostor U do řádků matice, kterou upravíme na odstupňovanou:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože nenulové řádky odstupňované matice tvoří bázi U, máme $\dim U = 2$.

(d) Postupujeme obdobně jako v (c). Poslední řádek druhé matice vynulujeme tak, že k němu přičteme všechny předchozí řádky:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $\dim U = 4$.

Úloha 10.2. Najděte souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $M = (\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$ vektorového prostoru $\mathbb{Q}^3$ nad tělesem $\mathbb{Q}$, jestliže

$$\text{(a)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Řešení. Hledáme aritmetický vektor $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ splňující $\mathbf{v} = a\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Budeme tedy počítat řešení nehomogenní soustavy rovnic:

(a) Pro $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ vidíme bez počítání, že $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

(b) Tentokrát je vektor $\mathbf{v}$ jedním z bázových vektorů báze M, proto bez počítání vidíme, že $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

(c) Obvyklým postupem spočítáme (jediné) řešení nehomogenní soustavy s maticí $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&4\\0&1&1&1\\2&1&1&3\end{array}\right)$ a zjistíme, že $[\mathbf{v}]_M = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Úloha 10.3. Ověřte, že posloupnost polynomů $P = (x^2+x-1, x^2+2x+2, 2x^2-x+1)$ je báze podprostoru $U = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 2\}$ vektorového prostoru reálných polynomů $\mathbb{R}[x]$ nad tělesem $\mathbb{R}$, a spočítejte souřadnice polynomu $4x$ vzhledem k bázi P.

Řešení. Hledáme aritmetický vektor $[4x]_B = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, který splňuje rovnici

$$a(x^2+x-1) + b(x^2+2x+2) + c(2x^2-x+1) = 4x.$$

Ta vede na nehomogenní soustavu rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\1&2&-1&4\\-1&2&1&0\end{array}\right)$, jejíž sloupce tvoří právě souřadnice polynomů vzhledem k bázi $(x^2, x, 1)$ podprostoru U. Zároveň si všimněme, že během jejího řešení zjistíme, zda jsou polynomy P lineárně nezávislé, což nastane právě tehdy, bude-li matice levých stran regulární:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\1&2&-1&4\\-1&2&1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&-3&4\\0&3&3&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&4&0&4\\0&1&1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{array}\right).$$

Zjistili jsme, že posloupnost P tvoří bázi U a že $[4x]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Úloha 10.4. Ověřte, že obě posloupnosti aritmetických vektorů $B = ((1,4,3)^T, (3,1,1)^T)$ a $C = ((1,1,4)^T, (1,0,1)^T)$ jsou báze podprostoru $U = \mathrm{LO}\, B$ vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$, spočítejte souřadnice vektorů C vzhledem k bázi B a určete matici přechodu $[\mathrm{id}]_B^C$.

Řešení. Okamžitě vidíme, že vektor $(1,4,3)^T$ není násobkem vektoru $(3,1,1)^T$ a naopak, proto je posloupnost B lineárně nezávislá, a jde tudíž o bázi U. Posloupnost C je rovněž lineárně nezávislá; podaří-li se nám proto ukázat, že její vektory leží v prostoru U, půjde nutně o jeho bázi.

Chceme tedy ověřit, že existují řešení obou vektorových rovnic

$$x \cdot (1,4,3)^T + y \cdot (3,1,1)^T = (1,1,4)^T, \quad x \cdot (1,4,3)^T + y \cdot (3,1,1)^T = (1,0,1)^T,$$

a zároveň chceme najít souřadnice vektorů pravých stran vzhledem k bázi B, což jsou právě řešení těchto rovnic. Proto budeme obě vektorové vektorové rovnice řešit zároveň v obvyklém maticovém zápisu jako nehomogenní soustavy se stejnou maticí levých stran:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Spočítali jsme souřadnice $[(1,1,4)^T]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $[(1,0,1)^T]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, a proto $[\mathrm{id}]^C_B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Úloha 10.5. Najděte matice přechodu:

(a) $[\mathrm{id}]^B_{K_2}$ a $[\mathrm{id}]^{K_2}_B$, kde $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix})$ a K_2 je kanonická báze ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

(b) $[\mathrm{id}]^N_M$, kde $N = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $M = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ jsou báze $\mathbb{Z}_3^2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$.

(c) $[\mathrm{id}]^L_K$ a $[\mathrm{id}]^K_L$, kde $K = (1, i)$ a $L = (3-5i, 1-2i)$ jsou báze $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$.

Řešení. (a) Postupujeme-li podle definice, vidíme, že souřadnice vektorů vzhledem ke kanonické bázi jsou vektory samotné, a protože matice $[\mathrm{id}]^B_{K_2}$ obsahuje ve sloupcích právě souřadnice vektorů báze B vzhledem ke kanonické bázi, stačí do sloupců přepsat bázi B. Tudíž $[\mathrm{id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Dále potřebujeme najednou vyřešit dvě soustavy rovnic s maticí levých stran $[\mathrm{id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ a s vektory pravých stran z báze K_2. Postupujeme tedy stejně jako při hledání inverzní matice.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že $[\mathrm{id}]^{K_2}_B = ([\mathrm{id}]^B_{K_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Postupujme podle definice. Potřebujeme najít souřadnice $[\mathbf{n}_i]_M$ pro jednotlivé vektory $\mathbf{n}_i$ báze N, v úloze (a) jsme si povšimli, že matice $[\mathrm{id}]^M_{K_2}$ obsahuje ve sloupcích právě vektory báze M, proto hledaný souřadnicový vektor splňuje podmínku $[\mathrm{id}]^M_{K_2}[\mathbf{n}_i]_M = \mathbf{n}_i$. Označíme-li hledanou matici přechodu $\mathbf{X} = ([\mathbf{n}_1]_M, [\mathbf{n}_2]_M) = [\mathrm{id}]^N_M$, vidíme, že je třeba vyřešit maticovou rovnici $[\mathrm{id}]^M_{K_2} \cdot \mathbf{X} = [\mathrm{id}]^N_{K_2}$. Stačí nám tedy známým způsobem spočítat

$$[\mathrm{id}]^N_M = ([\mathrm{id}]^M_{K_2})^{-1} \cdot [\mathrm{id}]^N_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Snadno určíme souřadnice vektorů báze L vzhledem ke K a sepíšeme je do sloupců matice $[\mathrm{id}]^L_K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$. Nyní zbývá podobně jako v (a) a (b) dopočítat, že $[\mathrm{id}]^K_L = ([\mathrm{id}]^L_K)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$.

Další základní příklady k počítání:

Úloha 10.6. Ověřte, že $B = (3 - i, 1 - 2i)$ tvoří bázi vektorového prostoru komplexních čísel $\mathbb{C}$ nad tělesem $\mathbb{R}$, a spočítejte souřadnice vektoru i.

Řešení: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Úloha 10.7. Uvažme posloupnost reálných funkcí proměnné x (Jak si představit funkci „abstraktně“? Třeba jako graf funkce.) $M = (\cos x, \sin x, \cos^2 x, \sin^2 x)$.

(a) Dokažte, že M je báze podprostoru $\mathrm{LO}\, M$ vektorového prostoru všech reálných funkcí,

(b) dokažte, že $1, \cos 2x \in \mathrm{LO}\, M$,

(c) určete souřadnice vektorů 1, $\cos 2x$ a $3 + 2\cos x + \cos 2x$ vzhledem k bázi M.

Řešení: (a) Pro důkaz lineární nezávislosti stačí uvažovat hodnoty v 0, $\pm\pi/2$, π; (b) $1 = \sin^2 + \cos^2$, $\cos 2x = \cos^2 - \sin^2$; (c) $(0,0,1,1)^T, (0,0,1,-1)^T, (2,0,4,2)^T$.

Úloha 10.8. Určete v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 2 matici přechodu od báze $N = (x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x)$ k bázi $N' = (x^2 + 2, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3)$.

Řešení: $[\mathrm{id}]^N_{N'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 16 & 8 \\ -3 & -3 & -1 \\ -5 & -9 & -5 \end{pmatrix}$.

Úloha 10.9. V prostoru všech reálných matic 2×2 určete obě matice přechodu mezi bázemi

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Řešení: $[\mathrm{id}]^{B_1}_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $[\mathrm{id}]^{B_2}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtížnější příklady:

Úloha 10.10. Najděte dimenzi podprostoru $\mathrm{LO}\{(1,1,1,a)^T, (1,1,a,1)^T, (1,a,1,1)^T, (a,1,1,1)^T\}$ v $\mathbb{R}^4$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Řešení: Pro $a = 1$ je dimenze 1, pro $a = -3$ je to 3, jinak je to 4.