

LINEÁRNÍ ALGEBRA

LIBOR BARTO A JIŘÍ TŮMA

barto@karlin.mff.cuni.cz, tuma@karlin.mff.cuni.cz

*Toto jsou průběžně vznikající zápisky z přednášky Lineární algebra a geometrie
1. Pokud naleznete jakoukoliv chybu, dejte nám určitě vědět!*

1. PŘEDPOKLADY

1.1. **Komplexní čísla.** Některé kvadratické rovnice s reálnými koeficienty nemají žádný reálný kořen. Nejjednodušší příklad je rovnice

$$x^2 + 1 = 0 .$$

Geometrický důvod neexistence reálných kořenů pro tuto rovnici spočívá v tom, že graf funkce $f(x) = x^2 + 1$ neprotíná reálnou osu x , celý leží nad ní. Tyto rovnice byly po dlouhá staletí považovány za neřešitelné. Až v šestnáctém století se v matematických textech začíná objevovat výraz $\sqrt{-1}$ označující kořen této rovnice. Matematici Gerolamo Cardano a Rafael Bombelli vyšli z toho, že se s tímto číslem počítá podobně jako s reálnými čísly, a odvodili pravidla, kterými by se výpočty měly řídit. Následovala dvě staletí diskusí, co by měla tato čísla znamenat. Vžil se pro ně výraz *imaginární* čísla naznačující, že nemají žádnou reálnou existenci. René Descartes tento název začal používat jako první v hanlivém smyslu *opovrženlivo*. Diskuse utichly až ke konci osmnáctého století, kdy se komplexní čísla stala běžnou součástí matematiky.

Cardano a Bombelli si všimli, že pokud s číslem $\sqrt{-1}$ počítáme podobně jako s reálnými čísly, pak můžeme vyřešit každou kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty. Pro kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b} .$$

Pokud vyjdeme z toho, že podobně by mělo platit také

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \sqrt{a}$$

pro kladné reálné číslo a , umíme už zapsat druhou odmocninu z každého reálného čísla. Potom umíme také vyjádřit kořeny libovolné kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0 .$$

Pokud je $b^2 - 4ac > 0$, jsou jejími kořeny reálná čísla

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

V případě $b^2 - 4ac = 0$ oba kořeny splývají v jediný dvojnásobný kořen $-b/2a$. V případě $b^2 - 4ac < 0$, můžeme s pomocí symbolu $\sqrt{-1}$ kořeny zapsat jako

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} \sqrt{-1} .$$

K tomu potřebujeme vědět jak počítat s výrazy $B\sqrt{-1}$, kde B je libovolné reálné číslo, a dále s výrazy $A + B\sqrt{-1}$, kde A, B jsou reálná čísla.

Během osmnáctého století se pro výraz $\sqrt{-1}$ vžilo označení i , které zavedl švýcarský matematik Leonhard Euler. Pouze elektroinženýři používají označení j , protože pro ně i označuje proud.

Protože číslo $i = \sqrt{-1}$ označuje kořen rovnice $x^2 = -1$, platí $i^2 = -1$.

Definice 1.1. *Komplexní číslo* je výraz

$$z = a + bi ,$$

kde a, b jsou reálná čísla. Číslo a se nazývá *reálná část* komplexního čísla z a označujeme jej $\operatorname{Re} z$. Číslo b je *imaginární část* čísla z a označujeme jej $\operatorname{Im} z$. Dvě komplexní čísla $a + bi$ a $c + di$ se rovnají právě když se rovnají jejich reálné části a imaginární části. Tj. $a + bi = c + di$ právě když $a = c$ a $b = d$.

Poslední část definice říká, že rovnost dvou komplexních čísel ověříme *porovnáním* jejich reálných a imaginárních částí. Nebo jinak řečeno, komplexní číslo jednoznačně zadáme tak, že řekneme jeho reálnou a imaginární část. Množinu všech komplexních čísel budeme označovat \mathbb{C} .

Komplexní čísla budeme sčítat, odčítat, násobit a dělit tak, aby tyto operace měly pokud možno stejné vlastnosti jako příslušné operace s reálnými čísly. Hlavně budeme usilovat o komutativitu a asociativitu sčítání a násobení a o distributivitu násobení vzhledem ke sčítání. Potom je přirozené zavést součet a rozdíl dvou komplexních čísel jako

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i . \end{aligned}$$

Z obou formulek plyne, že součet a rozdíl dvou komplexních čísel je zase komplexní číslo. Snadno si také odvodíte, že takto definované sčítání komplexních čísel je komutativní a asociativní. Stačí pouze použít komutativitu a asociativitu sčítání reálných čísel.

Formulku pro násobení komplexních čísel dostaneme za použití faktu, že $i^2 = -1$. Chceme, aby násobení bylo komutativní, asociativní a distributivní vzhledem ke sčítání. Z toho odvodíme

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + (bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i .$$

Opět si můžete snadno ověřit, že takto definované násobení komplexních čísel je komutativní a asociativní, je to jenom o něco více počítání než v případě sčítání. Stejně snadno ověříme distributivitu násobení vzhledem ke sčítání.

Nepatrně složitější je definovat dělení komplexních čísel. Dělit budeme pouze nenulovými komplexními čísly a je přirozené považovat komplexní číslo $c + di$ za nenulové, pokud je aspoň jedno z reálných čísel c, d různé od 0. Platí tedy, že $c + di \neq 0$ právě když $c^2 + d^2 \neq 0$. Ještě si napřed spočítáme součin

$$(c + di)(c - di) = (c^2 + d^2) + 0i .$$

Tento součin je různý od 0 právě když $c + di \neq 0$. Potom nám vyjde

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i.$$

Příklad 1.2. Spočítáme výsledek všech operací pro dvojici čísel $z = 2 + i$ a $w = 3 - 4i$. Platí

$$\begin{aligned} z+w &= (2+i) + (3-4i) = (2+3) + (1-4)i = 5-3i, \\ z-w &= (2+i) - (3-4i) = (2-3) + (1+4)i = -1+5i, \\ zw &= (2+i)(3-4i) = 6-4i^2 + (3-8)i = 6-4(-1) - 5i = 10-5i, \\ \frac{z}{w} &= \frac{2+i}{3-4i} = \frac{2+i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(6-4) + (8+3)i}{3^2+4^2} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i. \end{aligned}$$

Definice 1.3. Je-li $w = c + di$ komplexní číslo, pak číslo $c - di$ se nazývá *komplexně sdružené* k číslu w a označujeme jej \bar{w} .

Přímo z definice hned plyne, že $\overline{\bar{z}} = z$ pro každé komplexní číslo z . Ihned také vidíme, že $\bar{w} = w$ právě když $d = 0$ tj. právě když w je reálné číslo. Komplexní sdružování dobře souvisí s operacemi na komplexních číslech.

Tvrzení 1.4. Jsou-li $z = a + bi$ a $w = c + di$ komplexní čísla, pak platí

- (1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$,
- (2) $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$,
- (3) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$,
- (4) je-li $w \neq 0$, pak $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$.

Důkaz. Dokážeme (3), ostatní ponecháme jako cvičení. Platí $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$ a tedy $\overline{(zw)} = (ac - bd) - (ad + bc)i$. Dále je $\bar{z} = a - bi$ a $\bar{w} = c - di$. Tj. $\bar{z}\bar{w} = (ac - bd) + (-ad - bc)i = (ac - bd) - (ad + bc)i$. Reálné části čísel $\overline{(zw)}$ a $\bar{z}\bar{w}$ jsou tedy stejné. Také imaginární části obou čísel se rovnají, platí proto rovnost $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}$. \square

Viděli jsme už, že pokud kvadratická rovnice s reálnými koeficienty nemá reálné kořeny, pak její komplexní kořeny jsou komplexně sdružené. Následující tvrzení ukazuje, že komplexní kořeny libovolného nekonstantního polynomu s reálnými koeficienty se komplexně sdružují.

Tvrzení 1.5. *Komplexní číslo z je kořenem polynomu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ s reálnými koeficienty právě když je číslo \bar{z} jeho kořenem.*

Důkaz. Je-li z kořenem polynomu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, platí

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Podle předchozího tvrzení platí

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{0} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n} \bar{z}^n + \overline{a_{n-1}} \bar{z}^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \bar{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0, \end{aligned}$$

v poslední rovnosti jsme použili to, že koeficienty polynomu jsou reálná čísla. Číslo \bar{z} komplexně sdružené k z je tedy také kořenem polynomu.

Naopak, je-li \bar{z} kořenem polynomu, pak jsme právě ukázali, že $\bar{\bar{z}} = z$ je také jeho kořenem. \square

Imaginární jednotku i jsme zavedli jako $\sqrt{-1}$, neboli jako kořen rovnice $x^2 = -1$. A co rovnice

$$x^2 = i \text{ ?}$$

Má nějaký kořen nebo jsme problém s řešitelností kvadratických rovnic jenom odsunuli o něco dále? Pokud by komplexní číslo $z = a + bi$ bylo kořenem rovnice $x^2 = i$, muselo by platit

$$z^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + (2ab)i = 0 + 1i \text{ .}$$

Z definice rovnosti dvou komplexních čísel plyne, že reálná čísla a, b musí splňovat soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 0, \\ 2ab &= 1 \text{ .} \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme $a = \pm b$. V případě $a = b$ pak z druhé plyne $a = \pm 1/\sqrt{2}$. V případě $a = -b$ dosazením do druhé rovnice dostaneme $2b^2 = -1$ a žádné takové reálné číslo b neexistuje. Dostáváme tak pouze dvě možnosti pro kořeny z rovnice $x^2 = i$:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \text{ nebo } z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i) \text{ .}$$

Dosazením do rovnice $x^2 = i$ se přesvědčíme, že obě tato čísla jsou skutečně druhými odmocninami z i .

Podobně můžeme dodat smysl odmocnině \sqrt{w} z libovolného komplexního čísla $w = c + di$. Odtud vyplývá, že každá kvadratická rovnice s komplexními koeficienty má nějaký komplexní kořen.

Příklad 1.6. Vyřešíme rovnici

$$z^2 - (3 + i)z + (2 + i) = 0 \text{ .}$$

Koeficienty rovnice jsou $a = 1$, $b = -3 - i$, $c = 2 + i$. Platí tedy

$$b^2 - 4ac = (-3 - i)(-3 - i) - 4(2 + i) = 9 + i^2 + 6i - 8 - 4i = 9 - 1 - 8 + 6i - 4i = 2i \text{ .}$$

Dosazením do vzorce pro řešení kvadratické rovnice dostaneme

$$z_{1,2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{2i}}{2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{2}\sqrt{i}}{2} = \frac{3 + i \pm (1 + i)}{2} \text{ .}$$

Kořeny této rovnice jsou tedy $z_1 = 2 + i$ a $z_2 = 1$.

Ve skutečnosti platí mnohem obecnější tvrzení, které jako první dokázal Carl Friedrich Gauss.

Věta 1.7. Každý nekonstantní polynom $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ s komplexními koeficienty $a_i \in \mathbb{C}$ má aspoň jeden komplexní kořen.

Poslední věta, často také nazývaná **základní věta algebry**, pouze garantuje existenci komplexního kořenu polynomu s komplexními koeficienty. Nijak nenaznačuje, kde by se kořen měl nacházet nebo jak souvisí s koeficienty polynomu. Tím se odlišuje od formule pro řešení kvadratické rovnice, která nejenom zajišťuje existenci kořene, ale také přímo uvádí vzorec jak jej nalézt.

1.2. Komplexní rovina. K všeobecnému přijetí komplexních čísel přispěl také objev jejich geometrického významu v 18. století. Komplexní číslo $z = a + bi$ je uspořádaná dvojice reálných čísel (a, b) , své reálné a imaginární složky. Zvolíme-li v rovině pravouhlý souřadný systém, můžeme si číslo $z = a + bi$ představit jako bod o souřadnicích (a, b) . Reálná čísla pak leží na vodorovné *reálné ose*. Na svislé ose leží čísla tvaru bi . Těm říkáme *čistě imaginární* a svislou osu nazýváme *imaginární osa*.

OBRAZEK spolu s polárním tvarem

Bod v komplexní rovině odpovídající komplexnímu číslu $z = a + bi$ můžeme zadat nejen pomocí kartézských souřadnic (a, b) . Další možností je vyjádřit jej pomocí *polárních souřadnic*. Označíme r vzdálenost bodu z od počátku souřadnic. Je-li $z \neq 0$, pak označíme φ úhel, který svírá kladný směr reálné osy s polopřímkou spojující počátek s bodem z . Kartézské souřadnice bodu z jsou potom $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Dvojici čísel (r, φ) nazýváme *polární souřadnice* bodu (a, b) . Dostáváme tak další vyjádření čísla z :

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) .$$

Definice 1.8. Vyjádření čísla z ve tvaru $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nazýváme *goniometrický tvar komplexního čísla* z . Číslo r nazýváme *modul* nebo *absolutní hodnota* čísla z a označujeme jej $|z|$. Úhel φ je *argument* čísla z , označení $\arg z$. V případě $z = 0$ není argument definován.

Modul $|z|$ čísla $z = a + bi$ se rovná $\sqrt{a^2 + b^2}$. Argument $\arg z$ je v případě $z \neq 0$ určený rovnostmi

$$\sin \arg z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \arg z = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Argument $\arg z$ je určený jednoznačně až na celočíselný násobek 2π . Tak například $\arg(1 - i)$ se může rovnat $3\pi/4$ nebo $11\pi/4$ nebo $-\pi/4$. Následující tvrzení ukazuje, jak souvisí modul a argument čísla s operací násobení komplexních čísel.

Tvrzení 1.9. *Jsou-li z, w komplexní čísla, pak platí*

- (1) $|zw| = |z||w|$,
- (2) $|z/w| = |z|/|w|$ pokud $w \neq 0$,
- (3) $z\bar{z} = |z|^2$,
- (4) $|z| = |\bar{z}|$,
- (5) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$,
- (6) $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$,
- (7) $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Důkaz. Dokážeme pouze některé z uvedených vlastností, zbylé ponecháme jako cvičení. Obě čísla z, w vyjádříme v goniometrickém tvaru:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = s(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Potom platí

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi)s(\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= rs((\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)) \\ &= rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) , \end{aligned}$$

použili jsme součtové vzorce pro \sin a \cos . Odtud plyne $|zw| = rs = |z||w|$ a $\arg(zw) = \varphi + \psi = \arg z + \arg w$, což dokazuje (1) a (5).

Dokážeme ještě (3). Je-li $z = a + bi$, pak $\bar{z} = a - bi$ a $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$. \square

Někdy je vhodné omezit argumenty komplexních čísel na čísla $0 \leq \varphi < 2\pi$. V takovém případě pak rovnosti (5) a (6) platí „až na celočíselný násobek 2π “.

Pro modul součtu $z + w$ platí následující **trojúhelníková nerovnost**.

Tvrzení 1.10. *Pro komplexní čísla z, w platí*

$$|z + w| \leq |z| + |w| .$$

Důkaz. Tentokrát si ukážeme dva důkazy. Geometrický vyplývá z porovnání vzdáleností mezi třemi body $0, z$ a $z + w$.

OBRAZEK

Vzdálenost mezi body $0, z$ se rovná $|z|$, vzdálenost mezi $0, z + w$ se rovná $|z + w|$ a vzdálenost mezi $z, z + w$ je $|w|$. Délka úsečky spojující 0 s $z + w$ je menší nebo rovná součtu vzdáleností mezi body 0 a z a vzdáleností mezi body z a $z + w$. Odtud plyne nerovnost

$$|z + w| \leq |z| + |w| .$$

Algebraický důkaz je založený na zřejmé rovnosti $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ a podobně zřejmé nerovnosti $\operatorname{Re} z \leq |z|$, které platí pro jakékoli komplexní číslo z . Potom platí

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 , \end{aligned}$$

odkud plyne odmocněním dokazovaná nerovnost. \square

Komplexní čísla tvaru $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ mají modul rovný $\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$. Leží proto na *jednotkové kružnici* – kružnici se středem v počátku a poloměrem 1. Podle Tvrzení 1.9 (body 1. a 5.) platí

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) ,$$

odkud vyplývá následující **Moivreova věta**.

Věta 1.11. *Pro libovolné komplexní číslo $\cos \varphi + i \sin \varphi$ a nezáporné číslo n platí*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) .$$

Z Moivreovy věty plyne vzorec pro kořeny rovnice $x^n = 1$ neboli pro n -té odmocniny z 1. Na obrázku vidíme geometrické znázornění n -tých odmocnin z 1 pro $n = 4$ a $n = 6$. Jsou to vrcholy čtverce (pro $n = 4$) a pravidelného šestiúhelníka (pro $n = 6$) se středem v počátku, které mají vždy jeden z vrcholů v bodě $z = 1$.

OBRAZEK

Obecně můžeme n -té odmocniny z 1 zapsat ve tvaru

$$z_k = \cos \frac{k 2\pi}{n} + i \sin \frac{k 2\pi}{n}, \quad \text{kde } k = 0, 1, \dots, n - 1 .$$

Vzhledem k různosti argumentů, které jsou všechny z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, jsou čísla $z_0 = 1, z_1, \dots, z_{n-1}$ navzájem různá. Z Moivreovy věty rovněž plyne, že $z_k = (z_1)^k$

pro všechna $k = 0, 1, \dots, n-1$. Všechny n -té odmocniny z 1 jsou tedy mocninami jednoho čísla $z_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$.

Známe-li všechny n -té odmocniny z 1, můžeme pomocí goniometrického tvaru vyjádřit všechny n -té odmocniny z libovolného komplexního čísla $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Ukážeme si to na příkladu druhých odmocnin.

Příklad 1.12. Ukázali jsme si, že \sqrt{i} se rovná buď

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{nebo} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Vyáďříme-li i a \sqrt{i} v goniometrickém tvaru, dostaneme $i = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)$ a

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right).$$

OBRAZEK odmocniny z i

Ještě názornější je goniometrický tvar druhých odmocnin z čísla $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$. Jsou jimi

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad -i = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right).$$

Druhé odmocniny z obecného komplexního čísla $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ jsou potom čísla

$$\sqrt{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{a} \quad \sqrt{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right).$$

OBRAZEK obecně φ

Skutečnost, že obě čísla jsou druhými odmocninami z čísla z , snadno ověříme pomocí Moivreovy věty.

Příklad druhých odmocnin ukazuje, jak dostat všechny n -té odmocniny z čísla $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ pro obecné číslo $n \geq 2$. Platí totiž

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} \sqrt[n]{\cos \varphi + i \sin \varphi} \sqrt[n]{1}.$$

Obecnou n -tou odmocninou z w tak dostaneme jako součin n -té odmocniny z modulu $|w| = r$ s jednou konkrétní n -tou odmocninou z $\cos \varphi + i \sin \varphi$ a obecnou n -tou odmocninou z 1. Podle Moivreovy věty je jednou z n -tých odmocnin z $\cos \varphi + i \sin \varphi$ číslo

$$\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}.$$

Všechny n -té odmocniny z 1 jsme již pomocí Moivreovy věty našli. Jsou to

$$\cos \frac{k 2\pi}{n} + i \sin \frac{k 2\pi}{n}, \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Vechny n -té odmocniny z $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ se tak rovnají

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k 2\pi}{n} \right), \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Příklad 1.13. Všechny třetí odmocniny z čísla $-8i = 8(-i) = 8(\cos(3\pi/2) + i \sin(3\pi/2))$ jsou

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{k 2\pi}{3} \right) \quad \text{pro } k = 0, 1, 2.$$

OBRAZEK

Všechny páté odmocniny z čísla $-3 = 3(-1) = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$ se rovnají

$$\sqrt[5]{3} \left(\cos \left(\frac{\pi}{5} + \frac{k 2\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{5} + \frac{k 2\pi}{5} \right) \right) \text{ pro } k = 0, 1, 2, 3, 4 .$$

OBRAZEK

Na závěr této úvodní části uvedeme ještě Eulerovu formuli

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} ,$$

která vyjadřuje komplexní čísla s absolutní hodnotou 1 jako mocniny tzv. eulerova čísla $e = 2,78\dots$ s čistě imaginárním exponentem. Později, až se dozvíte přesnou definici čísla e , bude možné tuto formulku dokázat. V této chvíli ji budeme brát pouze jako pohodlné označení. S tímto označením můžeme součtové vzorce pro sinus a cosinus vyjádřit jednoduše jako

$$e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} e^{i\psi}$$

a Moivreovu větu jako

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} ,$$

v obou případech jde o jednoduchá pravidla pro počítání s exponenciální funkcí. A nakonec goniometrický tvar komplexního čísla z můžeme pomocí Eulerovy formule zapsat v podobě

$$z = r e^{i\varphi} .$$

1.3. Teorie čísel. GCD, Bezout, inverzy modulo p , gcd a Bezout pro polynomy

1.4. Zobrazení. Zobrazení $f : A \rightarrow B$ má vždy definiční obor A (ne jak v analýze, nebo úvodním kurzu).

Bijekce právě když má inverz.

Zobrazení je prosté právě když má levý inverz, je na právě když má pravý inverz.

Cvičení

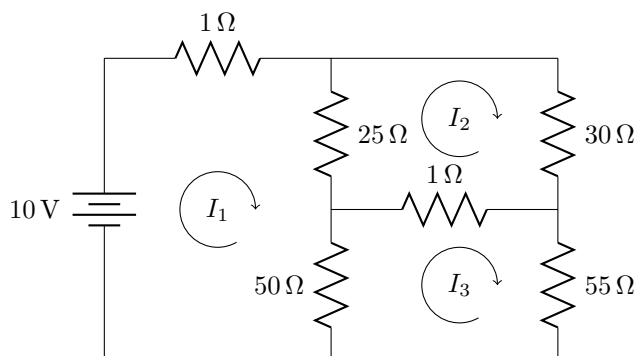
1. Předpokládejme, že $f : A \rightarrow B$ je bijekce a $g : B \rightarrow A$ je zobrazení zprava inverzní k f . Dokažte, že g je bijekce (a tím pádem $g = f^{-1}$).

2. ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

Cíl. Naučíme se řešit soustavy lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou.

2.1. Aplikace.

Na řešení soustavy lineárních rovnic vede celá řada praktických i teoretických úloh. Pro ilustraci uvedeme pět příkladů.



OBRÁZEK 1. Elektrický obvod z části 2.1.1

2.1.1. *Elektrické obvody.* U elektrického obvodu na obrázku chceme určit proudy protékající jednotlivými větvemi.

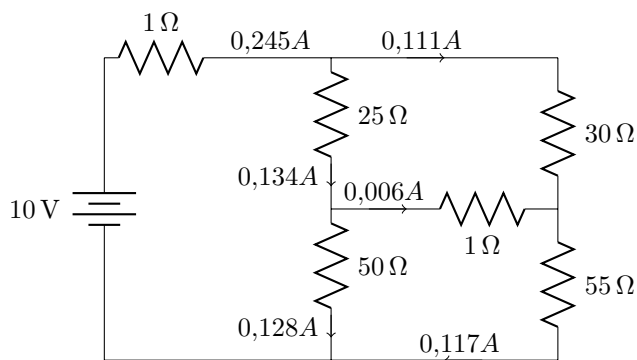
Použijeme metodu smyček. Proudů protékající jednotlivými elementárními smyčkami jsou označeny I_1, I_2, I_3 podle obrázku. Aplikací druhého Kirchhoffova zákona získáme pro každou smyčku jednu rovnici:

$$1I_1 + 25(I_1 - I_2) + 50(I_1 - I_3) = 10$$

$$25(I_2 - I_1) + 30I_2 + 1(I_2 - I_3) = 0$$

$$50(I_3 - I_1) + 1(I_3 - I_2) + 55I_3 = 0$$

Zjednodušením dostaneme soustavu třech lineárních rovnic o třech neznámých, která má právě jedno řešení $(I_1, I_2, I_3) = (0,245, 0,111, 0,117)$. Z toho dopočteme proudy pro jednotlivé větve.

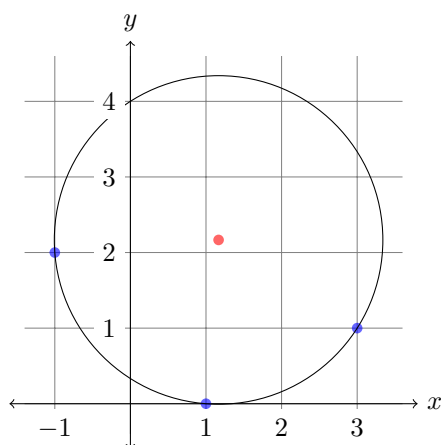


OBRÁZEK 2. Proudů v elektrickém obvodu z části 2.1.1

2.1.2. *Prokládání kružnice danými body.* Chceme najít kružnici v rovině procházející body $(1, 0)$, $(-1, 2)$, $(3, 1)$. (Například víme, že se nějaký objekt pohybuje po kruhové dráze, máme změřeny tři polohy a chceme určit střed obíhání.)

Rovnice kružnice v rovině má tvar

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$



OBRÁZEK 3. Kružnice procházející danými třemi body

Dosazením daných třech bodů získáme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 1 + a + c &= 0, \\ 5 - a + 2b + c &= 0, \\ 10 + 3a + b + c &= 0. \end{aligned}$$

Soustava má právě jedno řešení $(a, b, c) = (-7/3, -13/3, 4/3)$, takže hledaná kružnice má rovnici

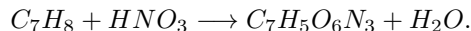
$$x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}y + \frac{4}{3} = 0.$$

Chceme-li znát střed a poloměr, rovnici můžeme upravit na tvar

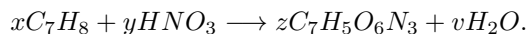
$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{6}\right)^2 = \frac{85}{18},$$

z kterého vidíme, že hledaná kružnice má střed $(7/6, 13/6)$ a poloměr $\sqrt{85/18}$.

2.1.3. *Vyčíslování chemické rovnice.* Uvažujme chemickou reakci toluenu a kyseliny dusičné, při které vzniká TNT a voda:



Vyčíslení chemické rovnice znamená nalezení poměrů jednotlivých molekul, aby počet atomů každého prvku byl na obou stranách stejný.

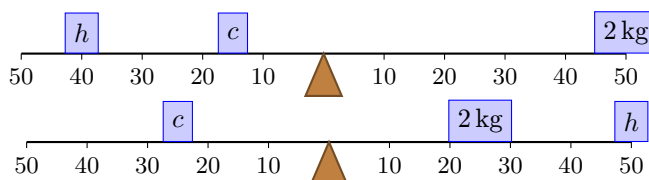


Chceme tedy najít hodnoty x, y, z, v , které splňují soustavu rovnic To vede na rovnice

$$\begin{aligned} 7x &= 7z, \\ 8x + y &= 5z + 2v, \\ y &= 3z, \\ 3y &= 6z + w. \end{aligned}$$

Vzhledem k výbušné povaze tohoto příkladu nebudeme na tomto místě raději uvádět řešení.

2.1.4. *Neznámá závaží.* Máme tři závaží. První váží 2kg , ale hmotnost dalších dvou bohužel neznáme. Podařilo se nám však najít dvě rovnovážné polohy:



OBRÁZEK 4. Neznámá závaží

Z těchto informací můžeme hmotnosti určit. Provnáním momentů totiž dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}40h + 15c &= 50 \cdot 2 \\ 25c &= 25 \cdot 2 + 50h,\end{aligned}$$

kteřou snadno vyřešíme.

2.1.5. *Pohyb hlavy disku.* Objekt jednotkové hmotnosti se pohybuje bez tření po přímce, na počátku je v poloze 0 a má nulovou rychlost.

OBRÁZEK

Po dobu 8 vteřin na něj působí vnější síly $f(t)$. Vnější síla je konstantní vždy během jedné vteřiny, tj. $f(t) = x_j$ pro $j - 1 \leq t \leq j$ a $j = 1, 2, \dots, 8$. Chceme dosáhnout toho, aby se po 8 vteřinách poloha objektu rovnala b_1 a jeho rychlost byla b_2 . Vektor neznámých sil $(x_1, \dots, x_8)^T$ musí splňovat soustavu

$$\begin{aligned}\frac{15}{2}x_1 + \frac{13}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 + \frac{9}{2}x_4 + \frac{7}{2}x_5 + \frac{5}{2}x_6 + \frac{3}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 &= b_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= b_2\end{aligned}$$

2.2. **Geometrická interpretace, řádkový pohled.** Jedno řešení soustavy lineárních rovnic o n neznámých budeme zapisovat jako uspořádanou n -tici čísel. To předpokládá nějaké pevné uspořádání neznámých. Z kontextu bude toto uspořádání zřejmé, neznámé jsou většinou značeny x_1, \dots, x_n . Uspořádanou n -tici čísel nazýváme *n -složkový aritmetický vektor*:

Definice 2.1. *Aritmetickým vektorem nad \mathbb{R} s n složkami* rozumíme uspořádanou n -tici reálných čísel.

V této kapitole budeme často místo „aritmetický vektor nad \mathbb{R} “ říkat pouze „aritmetický vektor“, nebo jen „vektor“, protože jiné druhy vektorů zatím nebudeme používat.

Vektory budeme psát sloupcově, například

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -33 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Pro úsporu místa vektor často napíšeme řádkově a přidáme exponent T , například

$$\mathbf{v} = (1, -33, 5)^T.$$

Znak T bude zaveden v kapitole 4 obecněji pro transponování matic.

Aritmetické vektory si pro $n = 2$ (resp. $n = 3$) můžeme představovat jako šipky v rovině (resp. prostoru) s danou velikostí a směrem, pokud máme v rovině nebo prostoru zvolený souřadný systém.

OBRAZEK

Každému bodu roviny o souřadnicích $[a, b]$ přiřadíme jeho *polohový vektor*, což je vektor vedoucí z počátku souřadnic do bodu $[a, b]$. Je to vektor $(a, b)^T$. Naopak, každý dvousložkový vektor $(u, v)^T$ je polohovým vektorem bodu o souřadnicích $[u, v]$. Takto můžeme množinu všech řešení soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých (tj. množinu dvousložkových vektorů) popsat nebo geometricky znázornit jako množinu bodů v rovině. A naopak množinu bodů v rovině můžeme vyjádřit jako množinu jejich polohových vektorů. Podobně můžeme znázornit tříšložkový vektor $(a, b, c)^T$ jako polohový vektor bodu o souřadnicích $[a, b, c]$ v prostoru.

2.2.1. Jedna rovnice o dvou neznámých. Množinou řešení rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$, kde $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ jsou zvolená čísla a x_1, x_2 jsou neznámé, je přímka v rovině, kromě triviálního případu, že $a_1 = a_2 = 0$, kdy je množinou řešení buď celá rovina (v případě $b_1 = 0$) nebo prázdná množina (v případě $b_1 \neq 0$). Kolmostí a skalárním součinem se budeme detailněji zabývat v kapitole 7, teď jen připomeňme, že $(a_1, a_2)^T$ je normálový vektor této přímky, tj. vektor kolmý na její směr.

OBRAZEK

Každá přímka může být také vyjádřena parametricky. K tomu připomeneme operace sčítání vektorů a násobení vektorů reálným číslem.

Definice 2.2. Jsou-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ dva n -složkové aritmetické vektory nad \mathbb{R} , pak jejich součtem rozumíme aritmetický vektor

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

Je-li $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ aritmetický vektor nad \mathbb{R} a $t \in \mathbb{R}$ reálné číslo, pak t -násobkem vektoru \mathbf{u} rozumíme vektor

$$t \cdot \mathbf{u} = t\mathbf{u} = \begin{pmatrix} tu_1 \\ tu_2 \\ \vdots \\ tu_n \end{pmatrix}.$$

Pro dva n -složkové vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} definujeme

$$-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u} \quad \text{a} \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

OBRAZEK

Příklad 2.3.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Parametrické vyjádření přímky v rovině je zápis tvaru

$$\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\},$$

kde \mathbf{u} a \mathbf{v} jsou 2-složkové vektory. Vektor \mathbf{u} je polohovým vektorem nějakého bodu přímky a vektor \mathbf{v} určuje její směr.

OBRAZEK

V prostoru má parametrické vyjádření přímky stejný tvar, jenom vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} mají tři složky.

2.2.2. *Více rovnic o dvou neznámých.* Uvažujme libovolnou soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých x_1, x_2 . Každá (netriviální) rovnice určuje přímku v rovině a my se snažíme najít dvojice $(x_1, x_2)^T$, které vyhovují všem rovnicím. Řešením je tedy průnik přímek daných našimi rovnicemi. Z toho je intuitivně jasné jak může vypadat množina všech řešení:

- Celá rovina. To se stane v případě, že všechny rovnice mají triviální tvar $0x_1 + 0x_2 = 0$.
- Přímka. To se stane v případě, že všechny (netriviální) rovnice popisují tutéž přímku, neboli všechny rovnice jsou násobkem jedné z rovnic.
- Bod. Nastane v případě, že soustavy popisují alespoň dvě různé přímky a všechny tyto přímky procházejí jedním bodem.

OBRAZEK

- Prázdná množina. Nastane v případě, že dvě rovnice určují rovnoběžné přímky, nebo rovnice určují tři přímky neprocházející jedním bodem, nebo jedna z rovnic je triviálně nesplnitelná, například $0x_1 + 0x_2 = 123$.

OBRAZEK

2.2.3. *Tři neznámé.* Množina řešení jedné lineární rovnice o třech neznámých tvaru $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ geometricky odpovídá rovině v \mathbb{R}^3 , kromě triviálního případu $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Vektor $(a_1, a_2, a_3)^T$ je normálovým vektorem roviny. Parametricky lze rovinu zapsat ve tvaru

$$\{\mathbf{u} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w} : s, t \in \mathbb{R}\},$$

kde \mathbf{u} je polohový vektor nějakého bodu roviny a \mathbf{v} , \mathbf{w} jsou vhodné (3-složkové) vektory určující směr roviny.

OBRAZEK

Řešíme-li tedy soustavu lineárních rovnic o třech neznámých, hledáme průnik rovin. Řešením může být:

- Celý prostor. To nastane v triviálním případě.
- Rovina.
- Přímka. OBRAZEK
- Bod. OBRAZEK
- Prázdná množina. OBRAZEK

2.2.4. *Více než tři neznámé.* Pro více proměnných je vizuální představa obtížná, ne-li nemožná. Stále ale platí, že jedna netriviální rovnice určuje „rovný útvar“ s dimenzí o jedna menší než je počet neznámých, tzv. *nadrovinu*. (Dimenzi sice budeme definovat později, ale pro malé dimenze definice souhlasí s intuicí.) Řešení soustavy pak lze chápat jako hledání průniku nadrovin. Výsledkem bude „rovný útvar“ nějaké dimenze (bod, přímka, rovina, ...).

2.3. Příklady. Řešíme-li ručně soustavu o několika málo rovnicích a málo neznámých postupujeme obvykle tak, že postupně eliminujeme neznámé.

2.3.1. Soustava s jedním řešením. Začneme s přímočarým příkladem soustavy třech rovnic o třech neznámých x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{aligned}2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \\3x_1 + 5x_2 + 18x_3 &= 33 \\2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 16\end{aligned}$$

Principem eliminační metody je převést soustavu ekvivalentními úpravami (tj. úpravami, které nemění množinu řešení) do tvaru, ze kterého se řešení snadno dopočítá. Ekvivalentními úpravami jsou například prohození dvou rovnic, vynásobení některé rovnice nenulovým číslem a přičtení několikanásobku jedné rovnice k jiné. Tvar, o který se snažíme, je tzv. *odstupňovaný tvar*. Přesně bude definován později, ale principem je, že v každé další rovnici je na začátku více nulových koeficientů.

Nejprve docílíme toho, že ve všech rovnicích kromě první bude nulový koeficient u x_1 . Tomuto procesu se také říká eliminace neznámé x_1 . Můžeme to udělat tak, že z jedné rovnice vyjádříme neznámou x_1 pomocí ostatních neznámých, výsledek dosadíme do zbývajících rovnic a upravíme je. Stejného efektu docílíme také tak, že přičteme vhodné násobky vhodné rovnice (rovnice s nenulovým koeficientem u x_1) k ostatním tak, aby z ostatních rovnic neznámá x_1 „zmizela“, tj. měla v nich nulový koeficient. V našem případě bychom mohli $(-3/2)$ -násobek první rovnice přičíst k druhé a (-1) -násobek první rovnice přičíst ke třetí. Aby nám však vycházely hezčí koeficienty, vynásobíme třetí rovnici jednou polovinou a prohodíme ji s první rovnicí.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\3x_1 + 5x_2 + 18x_3 &= 33 \\2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0\end{aligned}$$

Jsme připraveni k eliminaci proměnné x_1 : přičteme (-3) -násobek první rovnice ke druhé a (-2) -násobek první rovnice ke třetí.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\-x_2 + 3x_3 &= 9 \\+2x_2 - 5x_3 &= -16\end{aligned}$$

Po eliminaci jedné neznámé již první rovnici nebudeme měnit a budeme se zabývat pouze zbylými rovnicemi. V našem případě již zbývají pouze dvě a k eliminaci neznámé x_2 stačí přičíst 2-násobek druhé rovnice ke třetí.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\-x_2 + 3x_3 &= 9 \\x_3 &= 2\end{aligned}$$

Nyní již můžeme dopočítat řešení tzv. *zpětnou substitucí*, kdy postupujeme od poslední rovnice k první a postupně dosazováním získáváme hodnoty neznámých. V našem případě dostáváme $x_3 = 2$, $x_2 = -3$, $x_1 = 4$. Původní soustava má právě jedno řešení, a to aritmetický vektor $(4, -3, 2)^T$.

Při řešení soustavy jsme mohli samozřejmě začít eliminací libovolné proměnné, také nebylo nutné třetí rovnici přehazovat s první a násobit ji napřed jednou polovinou.

Pře řešení velkých soustav tisíců rovnic o tisících neznámých potřebujeme jednotlivé kroky eliminace nějak uspořádat tak, aby je bylo možné použít kdykoliv a bez ohledu na to, jaké jsou koeficienty soustavy. Tomuto postupu se říká *Gaussova eliminační metoda* nebo zkráceně *Gaussova eliminace*.

2.3.2. Maticový zápis. K formulaci Gaussovy eliminace a také pro zkrácení zápisu budeme místo soustavy psát její *rozšířenou matici*. Nejprve zavedeme pojem matice:

Definice 2.4. *Maticí* (nad \mathbb{R}) typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové schéma reálných čísel s m řádky a n sloupci.

Zápis $A = (a_{ij})_{m \times n}$ znamená, že A je matice typu $m \times n$, která má na pozici (i, j) (tedy v i -tém řádku a j -tém sloupci) číslo a_{ij} .

Pozor na pořadí indexů – první číslo označuje řádek, druhé sloupec.

Definice 2.5. *Maticí soustavy*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

rozumíme matici

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vektor *pravých stran* je vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ a *rozšířená matice soustavy* je matice

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Rozšířená matice soustavy tedy vznikne tak, že do i -tého řádku zapíšeme koeficienty v i -té rovnici u proměnných x_1, \dots, x_n a nakonec napíšeme pravou stranu. Pro přehlednost se pravé strany oddělují svislou čarou. Rozšířená matice se tímto rozdělí na dva bloky. V levém je matice soustavy a v pravém je sloupec pravých stran.

Pro soustavu rovnic z předchozího příkladu

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 18x_3 &= 33 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 16 \end{aligned}$$

jsou její matice, sloupec pravých stran a rozšířená matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 18 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 16 \end{pmatrix}, (A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 18 & 33 \\ 2 & 4 & 10 & 16 \end{array} \right).$$

Prohození dvou rovnic se v rozšířené matici projeví prohozením dvou řádků, vynásobení i -té rovnice číslem t odpovídá vynásobení i -tého řádku matice číslem t a podobně přičtení t -násobku i -té rovnice k j -té odpovídá přičtení t -násobku i -tého řádku k j -tému. Pro vyznačení, že rozšířená matice vznikla z předchozí ekvivalentní úpravou používáme symbol \sim . Úpravy provedené u naší soustavy tedy zapíšeme takto:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 18 & 33 \\ 2 & 4 & 10 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 18 & 33 \\ 2 & 6 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & -16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Zápis úprav se tímto značně zkrátí a zpřehlední.

Místo „soustava rovnic s rozšířenou maticí $(A \mid \mathbf{b})$ “ budeme někdy stručně říkat „soustava $(A \mid \mathbf{b})$ “.

Poznamenejme ještě, že užitím násobení matic z kapitoly 4 lze řešení soustavy rovnic s rozšířenou maticí $(A \mid \mathbf{b})$ zapsat jako hledání všech vektorů \mathbf{x} takových, že $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Maticový popis se hodí nejen ke zkrácení a zpřehlednění, je výhodnější i pro teoretické úvahy. Po zavedení všech pojmů již vlastně jiný zápis ani nebudeme používat.

2.3.3. Jeden parametr. Podívejme se na příklad soustavy rovnic o třech neznámých, kdy řešením je přímka. Používáme rovnou maticový zápis.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 5 & 15 \\ 2 & 8 & 3 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

V první úpravě jsme přičetli (-1) -násobek prvního řádku k druhému a (-2) -násobek prvního řádku k třetímu. V druhé úpravě jsme $(3/2)$ -násobek druhého řádku přičetli k třetímu. Nakonec jsme jen vynechali poslední řádek, který odpovídá rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, která množinu řešení nemění. Vzniklá soustava rovnic je v nematicovém zápisu

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice umíme spočítat $x_3 = 2$ a z první rovnice x_1 , známe-li ovšem x_2 . Neznámou x_2 lze volit libovolně a budeme jí říkat *parametr*. Parametr označíme $t = x_2$ a vyjde $x_1 = 5 - 4t$. Množina všech řešení je tedy

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 - 4t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

V našem konkrétním případě lze za parametr zvolit také neznámou $x_1 = s$, dopočítat $x_2 = 5/4 - s/4$ a získat množinu řešení ve tvaru $\{(s, 5/4 - s/4, 2)^T : s \in \mathbb{R}\}$. Nevýhodou této volby je, že by nefungovala, pokud by byl koeficient u x_2 v první rovnici roven nule. Volba parametrů, která funguje vždy bude diskutována u následujícího příkladu a pak v plné obecnosti v části 2.4.

Vraťme se ale k množině řešení $\{(5 - 4t, t, 2)^T : t \in \mathbb{R}\}$. Vektor $(5 - 4t, t, 2)^T$ lze pomocí sčítání a násobení skalárem vyjádřit také jako

$$\begin{pmatrix} 5 - 4t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 4t \\ 0 + t \\ 2 + 0t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4t \\ t \\ 0t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Takže množinu všech řešení lze napsat ve tvaru

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tento tvar je lepší než předchozí. Vidíme z něj totiž, že řešením je přímka procházející bodem $(5, 0, 2)^T$ se směrovým vektorem $(-4, 1, 0)^T$.

Uvedený postup na hledání řešení soustavy nebudeme používat. Vektory $(5, 0, 2)^T$ a $(-4, 1, 0)^T$ lze totiž spočítat jednodušším způsobem, který teď popíšeme. Budeme potřebovat pojem *homogenní soustava rovnic*:

Definice 2.6. Soustava rovnic se nazývá *homogenní*, pokud všechny pravé strany jsou rovny nule.

Máme-li soustavu rovnic s rozšířenou maticí $(A | \mathbf{b})$, pak *příslušnou homogenní soustavou* rozumíme homogenní soustavu s maticí $(A | \mathbf{o})$, kde $\mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0)^T$ je *nulový vektor*.

Vraťme se ke tvaru rovnic po úpravách, čili

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \quad \text{neboli} \quad \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 11 \\ 2x_3 = 4 \end{array}$$

Začneme určením parametrů. Je jeden, totiž neznámá x_2 (více k tomuto tématu níže). Množinu řešení budeme hledat ve tvaru $\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$. Vektor \mathbf{u} určíme jako libovolné (tzv. *partikulární*) řešení soustavy. Většinou bývá nejjednodušší zvolit za parametr(y) nulu a zpětnou substitucí dopočítat zbylé proměnné. Vektor \mathbf{v} je řešení **příslušné homogenní soustavy** při volbě parametru $t = 1$, spočítáme jej opět zpětnou substitucí. Prakticky můžeme postupovat tak, že napíšeme množinu všech řešení s doplněnými zvolenými parametry

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

a na prázdná místa doplňujeme odzadu zpětnou substitucí dopočtené hodnoty. **Pozor na nejčastější chybu, totiž že při počítání druhého vektoru zapomeneme vynulovat pravou stranu!**

V našem případě dostaneme množinu řešení

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vyšel nám stejný tvar výsledku jako předchozím postupem (není to náhoda). Nová metoda je daleko přehlednější a rychlejší, zejména máme-li větší soustavu.

Zbývá si ujasnit, že nalezená množina $S = \{(5, 0, 2)^T + t(-4, 1, 0)^T : t \in \mathbb{R}\}$ je skutečně rovná množině všech řešení soustavy (aniž bychom porovnávali výsledek ze starším postupem). Skutečnost, že každý prvek množiny S je řešením původní soustavy si snadno ověříme tak, že pro libovolnou hodnotu parametru t dosadíme příslušný vektor $(5, 0, 2)^T + t(-4, 1, 0)^T \in S$ do všech rovnic původní soustavy a ověříme, že nám vždy vyjde vektor pravých stran $(11, 4, -6)^T$. Jako kdybychom dělali zkoušku.

Původní soustava má stejnou množinu řešení jako soustava

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_3 &= 4, \end{aligned}$$

protože jsme od jedné k druhé přešli pouze pomocí ekvivalentních úprav, které nemění množinu všech řešení soustavy. Z poslední soustavy je vidět, že libovolná volba parametru t jako hodnoty x_2 jednoznačně určuje hodnoty zbývajících dvou neznámých x_3 (ta dokonce na volbě t nezávisí) a x_1 . Existuje tedy právě jedno řešení původní soustavy, pro které platí $x_2 = t$.

Také v množině S eistuje právě jeden vektor, jehož druhá složka se rovná t , a to vektor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 4t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

O žádné řešení původní soustavy jsme vyjádřením množiny všech řešení jako množiny S tedy nepřišli.

2.3.4. Více parametrů. Podíváme se na soustavu s více parametry, ze které již snad bude vidět obecný postup. Soustava bude mít pět neznámých x_1, \dots, x_5 , takže vizuální představa je stěží možná.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

V první úpravě jsme prohodili řádky, aby byl na prvním místě v prvním řádku nenulový prvek. V druhé úpravě jsme (-2) -násobek prvního řádku přičetli ke druhému. Ve třetí úpravě jsme (-1) -násobek druhého řádku přičetli ke třetímu.

Soustava je teď v odstupňovaném tvaru. K volbě parametrů nejprve určíme *pivoty*, to jsou první nenulové prvky v každém řádku. Proměnné odpovídající sloupcům s pivotem se nazývají *bázové proměnné*. V našem případě jsou jimi x_1 a x_3 . Zbýlé proměnné jsou tzv. *volné proměnné*, v našem případě x_2, x_4, x_5 . Volným proměnným také říkáme *parametry*. Protože máme tři volné proměnné, množina všech řešení bude tvaru

$$\{\mathbf{u} + t_2\mathbf{v}_2 + t_4\mathbf{v}_4 + t_5\mathbf{v}_5 : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Vektor \mathbf{u} (partikulární řešení) najdeme jako libovolné řešení soustavy, nejjednodušší bude zvolit za volné proměnné nuly. Vektory $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ budou řešení příslušné homogenní soustavy. Vektor \mathbf{v}_2 získáme volbou volných proměnných $(x_2, x_4, x_5) =$

$(1, 0, 0)$, vektor \mathbf{v}_4 volbou $(x_2, x_4, x_5) = (0, 1, 0)$ a vektor \mathbf{v}_5 volbou $(x_2, x_4, x_5) = (0, 0, 1)$. Množinu všech řešení tedy hledáme ve tvaru

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Každý ze čtyřech vektorů dopočítáme zpětnou substitucí. Vyjde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Ověření, že nalezená množina je množinou všech řešení dané soustavy, by bylo obdobné jako u předchozího příkladu. V prvním kroku bychom zkouškou ověřili, že každý vektor z množiny S je skutečně řešením původní soustavy. V druhé části bychom ukázali, že pro libovolnou volbu hodnot volných proměnných $x_2 = w_2, x_4 = w_4$ a $x_5 = w_5$ existuje právě jedno řešení $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_5)^T$ původní soustavy a současně že existuje v S vektor, jenž se s \mathbf{w} shoduje na druhé, čtvrté a páté složce, totiž vektor $\mathbf{u} + w_2\mathbf{v}_2 + w_4\mathbf{v}_4 + w_5\mathbf{v}_5$. Proto byly hodnoty volných proměnných při výpočtu vektorů $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$ a \mathbf{v}_5 voleny uvedeným způsobem.

Při výpočtu na papíře je vhodné nalezené vektory zkontrolovat dosazením **do původních rovnic**.

2.4. Řešení obecné soustavy rovnic Gaussovou eliminací. Nyní představíme metodu řešení soustav lineárních rovnic ukázanou na předchozích příkladech v obecném případě.

2.4.1. *Odstupňovaný tvar.*

Definice 2.7. *Ekvivalentní úpravou* soustavy lineárních rovnic rozumíme úpravu, která nemění množinu všech řešení.

Při řešení soustav lineárních rovnic vystačíme s jednoduchými úpravami tří typů. Úpravy ve skutečnosti provádíme s řádky rozšířené matice soustavy, proto jim říkáme *elementární řádkové úpravy*.

Definice 2.8. *Elementárními řádkovými úpravami* soustavy lineárních rovnic (resp. její rozšířené matice) rozumíme následující tři typy úprav.

- (i) prohození dvou rovnic (resp. řádků matice),
- (ii) vynásobení jedné z rovnic (resp. jednoho z řádků) nenulovým číslem,
- (iii) přičtení několikanásobku jedné rovnice (resp. jednoho řádku) k jiné rovnici (resp. k jinému řádku).

Tyto úpravy skutečně nemění množinu řešení:

Tvrzení 2.9. *Každá elementární řádková úprava soustavy lineárních rovnic je ekvivalentní úpravou.*

Důkaz. Označme S resp. T množinu všech řešení původní resp. nové soustavy. Je zřejmé, že každé řešení původní soustavy je řešením nové soustavy, neboli platí $S \subseteq T$. K důkazu opačné inkluze si stačí uvědomit, že lze efekt elementárních řádkových úprav vrátit, tj. z nové soustavy jde dostat původní rovněž vhodnými elementárními řádkovými úpravami. V případě (i) prohodíme stejné řádky, v případě (ii) vynásobíme stejnou rovnici inverzním číslem, a přičtení t -násobku i -tého řádku k j -tému lze vrátit přičtením $(-t)$ -násobku i -tého řádku k j -tému. \square

Úpravu (i), tedy prohození dvou rovnic, lze docílit posloupností zbylých dvou úprav, viz cvičení.

Gaussova eliminační metoda na řešení soustav lineárních rovnic je založená na převodu soustavy na řádkově odstupňovaný tvar.

Definice 2.10. Matice $C = (c_{ij})_{m \times n}$ je v *řádkově odstupňovaném tvaru*, pokud existuje celé číslo $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ takové, že řádky $r + 1, \dots, m$ jsou nulové, řádky $1, \dots, r$ jsou nenulové, a platí $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, kde k_i značí sloupec, ve kterém je první nenulové číslo v i -tém řádku (tedy platí $c_{i1} = c_{i2} = \dots = c_{i,k_i-1} = 0$ a $c_{i,k_i} \neq 0$; ještě jinak, $k_i = \min\{l : c_{il} \neq 0\}$).

Prvkům c_{i,k_i} , $i = 1, 2, \dots, r$ říkáme *pivoty*.

Soustava lineárních rovnic je v *řádkově odstupňovaném tvaru*, pokud její rozšířená matice je v řádkově odstupňovaném tvaru.

Jinak řečeno, nenulové řádky jsou v horní části matice (jejich počet je v definici označen r) a v každém nenulovém řádku (kromě prvního) je na začátku více nul než v předchozím.

OBRAZEK

Příklad 2.11. Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jsou v odstupňovaném tvaru. Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

v odstupňovaném tvaru nejsou.

Gaussova eliminace převede každou soustavu lineárních rovnic do odstupňovaného tvaru posloupností elementárních řádkových úprav. Algoritmus budeme raději předvádět na rozšířené matici soustavy. Nechť $C = (A \mid \mathbf{b})$ je rozšířená matice soustavy m rovnic o n neznámých, $C = (c_{ij})$.

Eliminace jednoho sloupce (jedné proměnné) proběhne následovně.

1. Najdeme první sloupec k , který není celý nulový. Pokud takový neexistuje, jsme hotovi.
2. Pokud je $c_{1k} = 0$, prohodíme první řádek s libovolným řádkem i , pro který je $c_{ik} \neq 0$.
3. Pro každé $i = 2, 3, \dots, m$ přičteme $(-c_{ik}/c_{1k})$ -násobek prvního řádku k i -tému řádku.

(Všimněte si, že po provedení kroku 2 máme $c_{1k} \neq 0$ a po provedení kroku 3 máme $c_{2k} = c_{3k} = \dots = c_{mk} = 0$.) Dále postupujeme tak, jako bychom eliminovali matici bez prvního řádku. V dalším kroku tedy najdeme první sloupec l , pro který je alespoň jedno z čísel c_{2l}, \dots, c_{ml} nenulové, řekněme $c_{il} \neq 0, i \geq 2$. Prohodíme druhý a i -tý řádek a pak pro každé $i = 3, 4, \dots, m$ přičteme $(-c_{il}/c_{2l})$ -násobek prvního řádku k i -tému řádku. Gaussova eliminace končí buď v bodě 1, nebo ve chvíli, kdy dojdou řádky. To je i případ, kdy má matice C pouze jeden nenulový řádek.

Náš popis Gaussovy eliminace není algoritmus, protože nepředepisuje, který řádek prohodíme s prvním řádkem v kroku 2. Různé implementace Gaussovy eliminace to řeší různým způsobem, proto žádný konkrétní způsob nepředepisujeme. Více o tom v části 2.5 o numerické stabilitě.

Věta 2.12. *Gaussova eliminace převede každou soustavu lineárních rovnic do odstupňovaného tvaru.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle počtu rovnic, tj. podle m . Předpokládejme tedy, že věta platí, pokud má soustava méně než m rovnic, a vezmeme soustavu s m rovnicemi. Pokud tvoří rozšířenou matici soustavy samé nuly, pak se eliminace zastaví v bodě 1. a věta platí, protože nulová matice je v odstupňovaném tvaru. Předpokládejme tedy, že tomu tak není.

Nechť k je index prvního nenulového sloupce v rozšířené matici soustavy. Označme B rozšířenou matici soustavy po provedení eliminace jednoho sloupce, tj. po eliminaci proměnné x_k .

OBRAZEK PO PRVNÍM CYKLU GE

Z matice B vynecháme první řádek a na matici se zbylými $m - 1$ řádky provedeme Gaussovu eliminaci. Podle indukčního předpokladu dostaneme matici C v odstupňovaném tvaru. První nenulový sloupec v matici C má index $l > k$, neboť první nenulový sloupec v celé rozšířené matici soustavy měl index k a všechny prvky v k -tém sloupci matice B pod nenulovým prvkem v prvním řádku jsou nulové. Vrátime-li do matice C nahoru první řádek matice B dostaneme tak opět matici v odstupňovaném tvaru.

OBRAZEK PO GE CELE MATICE.

Tato matice je výsledkem Gaussovy eliminace na rozšířenou matici původní soustavy. \square

2.4.2. Dupočítání řešení. Mějme nyní soustavu m lineárních rovnic o n neznámých x_1, \dots, x_n s rozšířenou maticí $C = (A \mid \mathbf{b})$ v odstupňovaném tvaru. Nechť r, k_1, \dots, k_r jsou čísla z definice 2.10, tj. číslo r udává počet nenulových řádků a čísla k_1, \dots, k_r pozice pivotů.

Pokud $k_r = n + 1$, jinými slovy, pokud poslední nenulový řádek rozšířené matice soustavy je tvaru $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b_r)$, kde $b_r \neq 0$, pak soustava $(A \mid \mathbf{b})$ nemá žádné řešení: tato rovnice říká $0x_1 + 0x_2 + \dots, 0x_n = b_r \neq 0$, což zřejmě nejde.

Předpokládejme nyní, že $k_r < n + 1$. Ukážeme, že soustava $(A \mid \mathbf{b})$ má alespoň jedno řešení, a ukážeme, jak všechna řešení popsat.

Označme P množinu indexů těch sloupců od 1 do n , které neobsahují pivot, tj.

$$P = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\} .$$

Množina P může být i prázdná, pokud každý sloupec obsahuje pivot. Proměnným $x_p, p \in P$, říkáme volné proměnné (nebo též parametry). Ostatní proměnné, tj. proměnné $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ jsou bázové.

Nyní nahlédneme, že každá volba hodnot volných proměnných dává právě jedno řešení soustavy $(A | \mathbf{b})$. Soustava je po provedení Gaussovy eliminace ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{1,k_1}x_{k_1} + a_{1,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,k_2}x_{k_2} + a_{2,k_2+1}x_{k_2+1} + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{r,k_r}x_{k_r} + a_{r,k_r+1}x_{k_r+1} + \cdots + a_{r,n}x_n &= b_r \end{aligned}$$

což je ekvivalentní soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= a_{1,k_1}^{-1} (b_1 - a_{1,k_1+1}x_{k_1+1} - \cdots - a_{1,n}x_n) \\ x_{k_2} &= a_{2,k_2}^{-1} (b_2 - a_{2,k_2+1}x_{k_2+1} - \cdots - a_{2,n}x_n) \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= a_{r,k_r}^{-1} (b_r - a_{r,k_r+1}x_{k_r+1} - \cdots - a_{r,n}x_n) \end{aligned}$$

Poslední rovnice jednoznačně určuje x_{k_r} , předposlední rovnice jednoznačně určuje $x_{k_{r-1}}$, atd. Tomuto dopočítávání hodnot říkáme *zpětná substituce*. Stejnou úvahu lze provést pro libovolný vektor pravých stran \mathbf{c} . Dokázali jsme následující pozorování.

Pozorování 2.13. *Pro libovolný vektor pravých stran \mathbf{c} a libovolná reálná čísla $x_p \in \mathbb{R}$, $p \in P$, existují jednoznačně určená reálná čísla $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r} \in \mathbb{R}$ taková, že aritmetický vektor (x_1, x_2, \dots, x_n) je řešením soustavy $(A | \mathbf{c})$.*

Jsme připraveni najít množinu všech řešení. Použijeme k tomu zpětnou substituci a vhodné volby volných proměnných. Nejdříve najdeme řešení \mathbf{u} soustavy $(A | \mathbf{b})$ tak, že položíme hodnoty všech volných proměnných rovné 0. Poté pro každé $p \in P$ najdeme opět zpětnou substituci řešení \mathbf{v}_p příslušné homogenní soustavy (tj. soustavy $(A | \mathbf{0})$), pro které zvolíme hodnotu volné proměnné $x_p = 1$ a všechny ostatní hodnoty volných proměnných položíme rovné 0. Podobně jako v částech 2.3.3 a 2.3.4 ověříme, že množinu všech řešení soustavy $(A | \mathbf{b})$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$S = \left\{ \mathbf{u} + \sum_{p \in P} t_p \mathbf{v}_p : (\forall p \in P) t_p \in \mathbb{R} \right\}.$$

Platí tedy věta

Věta 2.14. *Množina všech řešení soustavy $(A | \mathbf{b})$ je rovná množině*

$$S = \left\{ \mathbf{u} + \sum_{p \in P} t_p \mathbf{v}_p : (\forall p \in P) t_p \in \mathbb{R} \right\}.$$

V kapitole 5 si ukážeme elegantnější důkaz polední věty.

2.4.3. Shrnutí. Obecnou soustavu lineárních rovnic o n neznámých lze vyřešit následujícím postupem.

1. Gaussovou eliminací převedeme soustavu na ekvivalentní soustavu v odstupňovaném tvaru.
2. Rozhodneme, zda soustava má řešení. Pokud ne, tj. pokud existuje rovnice typu $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \neq 0$, skončíme s tím, že soustava je neřešitelná.

3. Určíme volné proměnné (parametry) – proměnné odpovídající sloupcům, kde nejsou pivoty. Množinu indexů těchto sloupců označíme P .
4. Množina všech řešení je

$$\left\{ \mathbf{u} + \sum_{p \in P} t_p \mathbf{v}_p : (\forall p \in P) t_p \in \mathbb{R} \right\},$$

kde \mathbf{u} je libovolné řešení soustavy a \mathbf{v}_p je řešení příslušné homogenní soustavy, kde za parametr odpovídající sloupci p volíme 1 a za zbylé parametry volíme 0. Každý z vektorů spočítáme zpětnou substitucí.

Všimněte si, že počet volných proměnných je roven číslu $n - r$, kde r je počet nenulových řádků v odstupňovaném tvaru. Zatím neumíme dokázat, že toto číslo nezávisí na tom, jaké ekvivalentní úpravy používáme k převodu na odstupňovaný tvar. Nicméně je tomu tak, toto číslo je rovné tzv. *hodnosti* (rozšířené) matice soustavy. Intuitivně to lze zdůvodnit tak, že v popisu množiny řešení máme $n - r$ parametrů, takže množina řešení je $(n - r)$ -dimenzionální objekt, přičemž tato dimenze samozřejmě závisí jen na původní soustavě, nikoliv na konkrétním odstupňovaném tvaru.

Na popsání postupu na řešení rovnic se dá také dívat takto: na začátku máme rovnicový popis „rovného útvaru“ v n -rozměrném prostoru, v bodě 1. nalezneme kompaktnější rovnicový popis stejného útvaru a v bodě 4. nalezneme jeho parametrický popis.

2.5. Praktické problémy při numerickém řešení velkých soustav rovnic.

2.5.1. *Numerická stabilita.* Při počítání soustav lineárních rovnic na počítači často reprezentujeme reálná čísla s nějakou předem určenou přesností. Problémem je, že Gaussova eliminace je obecně *numericky nestabilní*. To znamená, že malé zaokrouhlovací chyby mohou vést k výsledku, který se velmi liší od správného. Uvažujme například soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right),$$

jejímž přesným řešením je

$$\left(\frac{1}{1,0001}, \frac{2,0003}{1,0001} \right)^T.$$

Pokud použijeme aritmetiku s třemi platnými ciframi, Gaussova eliminace nám dá

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & 10^4 & 2 \cdot 10^4 \end{array} \right)$$

a zpětnou substitucí dostaneme řešení $(0, 2)^T$, které se od správného liší významně v první složce. Problémem je, že jsme při úpravě přičítali 10^4 -násobek prvního řádku k druhému a číslo 10^4 je tak velké, že smaže pro danou soustavu podstatný rozdíl mezi koeficientem 1 u proměnné x_2 a pravou stranou 3 ve druhé rovnici. Tomuto problému lze někdy předejít tak, že vždy před eliminací jedné proměnné prohodíme řádky tak, aby pivot byl co největší (v absolutní hodnotě). Tato tzv. *částečná pivotace* ale nezamezí všem problémům s numerickou stabilitou. Příkladem může být soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right),$$

kteřá vznikne z předchozí vynásobením první rovnice číslem 10^5 . Řešení při použití aritmetiky se třemi platnými ciframi vyjde opět $(0, 2)^T$ a částečná pivotace tomuto problému nezamezí (řádky jsou již od začátku ve správném pořadí). U tohoto příkladu je problém ve značném rozdílu ve velikosti prvního řádku a druhého řádku. Těmto i dalším typům problémů lze zamezit *úplnou pivotací*, při níž prohodíme před každým cyklem eliminace zbylé řádky a sloupce tak, aby pivot byl co největší. Úplná pivotace je numericky stabilní v každém případě. Při prohození sloupců nesmíme zapomenout na to, že vlastně prohazujeme proměnné. Místo první soustavy bychom tak řešili soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -10^{-4} & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Gaussova eliminace se zaokrouhlováním na tři platná místa by proběhla následovně:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -10^{-4} & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -10^{-4} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

a zpětnou substitucí bychom dostali $x_1 = 1$ (prohazovali jsme sloupce, tak musíme také prohodit proměnné) a $x_2 = 2$, což je tak blízko přesnému řešení původní soustavy jak je to jenom při zaokrouhlování na tři platná místa možné.

Prohledávání matice v každém cyklu tak, aby byl pivot co největší, je časově hodně náročné, proto se mu algoritmy pro numerické řešení velkých soustav lineárních rovnic snaží vyhnout, pokud to jenom trochu lze.

2.5.2. *Špatně podmíněné soustavy.* Jiný typ problémů ukážeme na soustavě

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,835 & 0,667 & 0,168 \\ 0,333 & 0,266 & 0,067 \end{array} \right),$$

jejíž řešením je $(1, -1)^T$. Pokud číslo 0,067 jen nepatrně změním na hodnotu 0,066, řešení se změní na $(-666, 834)^T$. Důvodem tohoto drastického rozdílu je, že přímkou určené rovnicemi jsou téměř rovnoběžné, takže malá změna jedné z nich může posunout průnik daleko od původního.

OBRAZEK

Soustavám, jejichž řešení je velmi citlivé na malou změnu koeficientů, říkáme *špatně podmíněné*. U špatně podmíněných soustav nám nepomůže ani numericky velmi stabilní algoritmus, protože koeficienty jsou v praxi většinou získány měřením, takže jsou zatíženy chybou. Je proto zapotřebí změnit model, navrhnout jiný experiment, apod., abychom se vyhnuli špatně podmíněným soustavám.

2.6. **Sloupcový geometrický pohled.** Ukážeme si ještě jeden geometrický pohled na soustavy lineárních rovnic. Tento pohled bude v dalším textu nabývat na větším významu než původní pohled přes rovnice přímek, rovin, atd. Vezměme si jednoduchou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Rozšířená matice této soustavy je

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

Při řešení soustavy hledáme hodnoty proměnných x_1, x_2 tak, aby platila rovnost dvousložkových vektorů

$$\begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že v prvním sloupci matice soustavy jsou koeficienty u proměnné x_1 a ve druhém sloupci jsou koeficienty u proměnné x_2 . Těmto vektorům říkáme *sloupcové vektory* matice soustavy. Levou stranu poslední rovnosti můžeme pomocí sloupcových vektorů přepsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a celou soustavu jako

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Výraz

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nazýváme *lineární kombinace* vektorů $(-1, 2)^T$ a $(3, -1)^T$. Řešení soustavy spočívá v nalezení vhodné lineární kombinace sloupcových vektorů tak, aby se rovnala vektoru pravých stran. Lineární kombinace dvou vektorů jsme používali už při parametrickém vyjádření roviny v prostoru nebo při popisu množiny všech řešení soustav v příkladech v částech 2.3.3 a 2.3.4 nebo ve znění Věty 2.14, případně v bodu 4. shrnutí jak postupujeme při řešení obecných soustav lineárních rovnic.

Do předpisu

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

můžeme za proměnné x_1, x_2 dosazovat libovolná reálná čísla, neboli libovolný dvousložkový vektor $(x_1, x_2)^T$, po dosazení dostaneme opět dvousložkový vektor. Dosadíme-li například $(x_1, x_2)^T = (1, 0)^T$, vyjde nám vektor $(-1, 2)^T$ koeficientů u neznámé x_1 , tj. první sloupcový vektor matice soustavy. Dosadíme-li $(x_1, x_2)^T = (0, 1)^T$, vyjde nám druhý sloupcový vektor $(3, -1)^T$ koeficientů u neznámé x_2 . Tyto vektory si můžeme nakreslit do roviny spolu s vektorem pravých stran $(1, 3)^T$. Ten pak vyjádříme jako lineární kombinaci sloupcových vektorů. V tomto případě nám vyjdou jako jediná možnost koeficienty $x_1 = 2$ a $x_2 = 1$, což je také jediné řešení naší soustavy.

OBRAZEK

Podobný geometrický význam má řešení obecné soustavy m lineárních rovnic o n neznámých. Nejdříve si obecně definujeme lineární kombinaci vektorů.

Definice 2.15. Jsou-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ m -složkové vektory a a_1, a_2, \dots, a_n reálná čísla, pak definujeme *lineární kombinaci* vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ s koeficienty a_1, a_2, \dots, a_n jako m -složkový vektor

$$a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + a_n \mathbf{u}_n.$$

Soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

pak můžeme přepsat do tvaru

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy tak spočívá v nalezení všech možných vyjádření vektoru pravých stran jako lineární kombinace sloupcových vektorů matice soustavy. Vektory koeficientů každé takové lineární kombinace pak tvoří jednotlivá řešení soustavy.

2.6.1. *Soustava lineárních rovnic jako zobrazení.* Levou stranu soustavy

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

lze také chápat jako definici zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které každému vektoru $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ přiřadí vektor

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hodnota zobrazení f v libovolném vektoru $(x_1, x_2)^T$ je určena maticí soustavy

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešit soustavu $(A|\mathbf{b})$ s libovolnou pravou stranou \mathbf{b} znamená najít \mathbf{x} takové, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

V kapitole o maticích budeme definovat součin matice s vektorem, a potom budeme moci zapsat hodnotu zobrazení $f(\mathbf{x})$ jako součin $A\mathbf{x}$. V této chvíli budeme brát výraz $A\mathbf{x}$ jako pohodlný zápis hodnoty $f(\mathbf{x})$.

2.6.2. *Matice jako zobrazení.* Každá matice $A = (a_{ij})_{m \times n}$ určuje zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, které každému n -složkovému aritmetickému vektoru $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ přiřadí m -složkový aritmetický vektor

$$f_A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Hodnotu $f_A(\mathbf{x})$ můžeme zapsat jako lineární kombinaci sloupcových vektorů matice A

$$f_A(\mathbf{x}) = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

s koeficienty x_1, \dots, x_n . Nejpoužívanější zápis hodnoty $f_A(\mathbf{x})$ je $A\mathbf{x}$.

Připomeňme si, že

- matice A má m řádků a n sloupců,
- vektor \mathbf{x} má n složek,
- vektor $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ má m složek

2.7. Matice jako úložiště dat. Velmi časté použití matic je k ukládání dat. Mnohá data jsou přirozeným způsobem „dvourozměrná“. Tak například závěrečné ceny akcií v jednotlivých dnech tvoří matici, řádky odpovídají akciím, sloupce jejich závěrečným cenám v jednotlivých dnech. Noviny přináší každý den nový sloupec matice.

Jiným příkladem použití matice jako úložiště dat jsou nutriční hodnoty potravin na jejich obalech.

Informace o výrobě produktů ve velké korporaci můžeme také uspořádat do matice. Označíme p_1, p_2, \dots, p_n vstupy do výroby, jako např. materiál, součástky, energie, pracovní síly, atd. Jednotlivé produkty pak označíme q_1, \dots, q_m . Do matice $A = (a_{ij})_{m \times n}$ zapíšeme na místo (i, j) počet a_{ij} jednotek vstupu p_j nutných k výrobě produktu q_i .

Přestože takto využíváme matici A jako úložiště dat, zobrazení f_A definované maticí A má velmi užitečný význam.

Je-li $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ vektor cen vstupů p_1, p_2, \dots, p_n , kde x_j je cena jednotky vstupu p_j , pak hodnota zobrazení

$$f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$$

udává výrobní ceny jednotlivých produktů, y_i je výrobní cena produktu q_i . To je ihned vidět z rovnosti

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n .$$

2.7.1. Matice incidence orientovaného grafu. Jiný typ dat, která jsou často ukládána ve formě matic, jsou grafy. Různým účelům slouží různé typy grafů a z toho plynoucí různé způsoby uložení grafu v podobě matice.

Ukážeme si příklad uložení informace o struktuře *orientovaného grafu*. Orientovaný graf má nějakou množinu *vrcholů* $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a nějakou množinu *hran* $E = \{e_1, \dots, e_m\} \subseteq V \times V$. Každá hrana e je tedy uspořádanou dvojicí (v, w) vrcholů grafu. Vrchol v nazýváme *počáteční vrchol* hrany e a vrchol w je *koncový vrchol* hrany e .

Vrcholy grafu mohou například odpovídat městům a hrany dopravním spojům, nebo mohou vrcholy být uzly elektrického obvodu a hrany větve/spoje mezi uzly v obvodu, apod.

Příklad grafu, který má vrcholy 1, 2, 3, 4 a hrany $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (1, 3)$, $e_3 = (2, 3)$, $e_4 = (2, 4)$, $e_5 = (3, 4)$.

OBRAZEK

Tento graf zapíšeme pomocí následující matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sloupce matice odpovídají vrcholům 1, 2, 3, 4, řádky hranám e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 . Je-li $e_i = (j, k)$, pak v matici napíšeme do i -tého řádku číslo -1 do j -tého sloupce, který

odpovídá počátečnímu vrcholu hrany e_i , a číslo 1 do k -tého sloupce, který odpovídá koncovému vrcholu hrany e_i . Všechny ostatní prvky v i -tém řádku jsou rovné 0.

Všimněme si, že v j -tém sloupci matice A je informace o tom, které hrany vycházejí z vrcholu j a které vcházejí do vrcholu j .

Cvičení

1. Dokažte, že prohození dvou rovnic lze docílit zbylými dvěmi elementárními řádkovými úpravami.
2. SLOZITOST

3. TĚLESA

Cíl. *Studiem vlastností reálných čísel, které používáme při řešení soustav lineárních rovnic, dojdeme k pojmu tělesa. Ukážeme si několik důležitých příkladů těles.*

3.1. Motivace.

V minulé kapitole jsme řešili soustavy lineárních rovnic nad reálnými čísly. Zcela stejný postup lze využít pro řešení soustav lineárních rovnic nad jinými obory, například komplexními čísly. Obecně lze stejný postup použít nad libovolným *tělesem*. Těleso je tedy struktura, ve které jsou definované operace sčítání a násobení mající podobné vlastnosti jako reálná čísla, konkrétněji máme na mysli ty vlastnosti reálných čísel, které využíváme při řešení soustav lineárních rovnic.

Zamysleme se nejprve jaké vlastnosti reálných čísel využíváme při řešení rovnice $x + a = b$, konkrétně třeba

$$x + 11 = 18 .$$

Snažíme se odhlédnout od toho, že řešení okamžitě vidíme a že některé vlastnosti reálných čísel již používáme zcela automaticky.

Většina z nás by na tomto místě navrhla odečíst od obou stran číslo 11. My se budeme snažit vystačit se dvěma základními operacemi, sčítáním a násobením. Ostatní operace, jako odčítání a dělení, budeme považovat za odvozené. Proto k oběma stranám raději přičteme číslo -11 . Protože jsme zapomněli na komutativitu sčítání, musíme se domluvit, z které strany přičítáme. V našem případě potřebujeme přičíst zprava. Dostáváme

$$(x + 11) + (-11) = 7 ,$$

přičemž na pravé straně jsme rovnou spočítali, že $18 + (-11) = 7$. Dalším krokem je přezávkování levé strany:

$$x + (11 + (-11)) = 7 .$$

Teď můžeme závorku vypočítat:

$$x + 0 = 7 .$$

Nakonec využijeme skutečnosti, že $x + 0 = x$ a dostáváme

$$x = 7 .$$

(Teď bychom ještě buď ověřili, že 7 je opravdu řešením, případně nahlédli, že úpravy jsou vratné.)

Při řešení rovnic typu $x + a = b$ tedy využíváme asociativitu sčítání, existenci neutrálního prvku a existenci opačných prvků. Přesněji řečeno, využíváme následující vlastnosti:

- (S1) („asociativita sčítání“) Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- (S2) („existence nulového prvku“) Existuje číslo $0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí $0 + a = a + 0 = a$.
- (S3) („existence opačného prvku“) Pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že $a + b = b + a = 0$. (Takové b značíme $-a$.)

Pointa je v tom, že kdykoliv máme na nějaké množině operaci $+$ s těmito vlastnostmi, pak můžeme na řešení rovnic typu $x + a = b$ (nebo $a + x = b$) použít zcela stejný postup. (Binární) operaci na množině T se rozumí jakékoliv zobrazení, které každé dvojici prvků z T jednoznačně přiřadí prvek T . Formálně:

Definice 3.1. *Binární operaci* na množině T rozumíme zobrazení z $T \times T$ do T .

Je-li \oplus binární operace na T , pak její hodnotu na dvojici (a, b) zapisujeme většinou $a \oplus b$, místo $\oplus(a, b)$, nebo formálně ještě správnějšího $\oplus((a, b))$.

Všimněte si, že $a \oplus b$ musí být definované pro každou dvojici $a, b \in T$ a že výsledek operace je opět prvek T . Pokud má \oplus vlastnost (S1), pak ve výrazech typu $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n$ nemusíme psát závorky, protože každé smysluplné uzavřování dá stejný výsledek (důkaz je technicky docela náročný, nebudeme jej provádět). Obecně však nemůžeme beztrestně prohazovat pořadí.

Příklady množin a operací splňující (S1), (S2), (S3) jsou

- $T = \mathbb{Z}$ a $+$ je běžné sčítání.
- Podobně $T = \mathbb{Q}$ (nebo $T = \mathbb{R}$, nebo $T = \mathbb{C}$) a $+$ je běžné sčítání.
- Větším příkladem je množina všech reálných funkcí reálné proměnné s operací sčítání funkcí.
- Naopak velmi malým příkladem je $T = \{0, 1\}$ s operací \oplus definovanou $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ a $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$.
- Zcela odlišným příkladem pak je množina všech permutací na nějaké pevné množině s operací \circ skládání permutací. Tento příklad vybočuje tím, že operace není komutativní (tj. nesplňuje $a \circ b = b \circ a$).

Vraťme se nyní k problému, které vlastnosti reálných čísel využíváme při řešení soustav lineárních rovnic. Uvažujme rovnici typu $x \cdot a = b$, například $x \cdot 3 = 12$. Postup řešení je následující.

$$\begin{aligned} x \cdot 3 &= 12 \\ (x \cdot 3) \cdot 3^{-1} &= 4 \\ x \cdot (3 \cdot 3^{-1}) &= 4 \\ x \cdot 1 &= 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Všimněte si, že postup je velmi podobný postupu na řešení rovnice $x + a = b$. Rozdíl je v tom, že místo operace $+$ pracujeme s operací \cdot , místo 0 používáme prvek 1 a místo $-x$ používáme x^{-1} . Vlastnosti \cdot , které využíváme, jsou proto velmi podobné vlastnostem (S1), (S2), (S3) s jedním důležitým rozdílem – obdoba vlastnosti (S3), což je existence inverzního prvku, platí pouze pro nenulová čísla. Použité vlastnosti jsou následující.

- (N1) („asociativita násobení“) Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- (N2) („existence jednotkového prvku“) Existuje číslo $1 \in \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
- (N3) („existence inverzního prvku“) Pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a \neq 0$, existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot b = b \cdot a = 1$. (Takové b značíme a^{-1} .)

Při elementárních úpravách používáme ještě dvě další vlastnosti. Ty lze vidět například z úprav, které mlčky probíhají při přičítání 2-násobku rovnice $x + 3y = 10$

k rovnici $(-2)x + 4y = 15$. V úpravách již využíváme (S1) a (N1), takže nepíšeme závorky.

$$\begin{aligned} 2(x + 3y) + (-2)x + 4y &= 35 \\ 2x + 2 \cdot 3y + (-2)x + 4y &= 35 \\ 2x + 6y + (-2)x + 4y &= 35 \\ 2x + (-2)x + 6y + 4y &= 35 \\ (2 + (-2))x + (6 + 4)y &= 35 \\ 0x + 10y &= 35 \\ 0 + 10y &= 35 \\ 10y &= 35 \end{aligned}$$

Kromě již formulovaných vlastností jsme využili tyto:

(D) („oboustranná distributivita“) Pro libovolná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ a $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

(S4) („komutativita sčítání“) Pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a + b = b + a$.

Ještě jsme využili, že $0 \cdot x = 0$. Později však ukážeme, že tento vztah plyne ze zbylých vlastností.

Shrneme-li všechny doposud zformulované vlastnosti, dostaneme pojem *nekomutativního tělesa*. Nikde jsme totiž nevyužili komutativitu násobení a soustavy lineárních rovnic lze Gaussovou eliminací řešit i nad nekomutativními tělesy, jen bychom se museli dohodnout, zda koeficienty v rovnicích budeme psát zleva nebo zprava. Rovnice $ax = b$ totiž může mít jiné řešení než rovnice $xa = b$. Důležitým příkladem nekomutativního tělesa je těleso kvaternionů, viz níže.

My ale budeme pracovat s tělesy, kde násobení je komutativní, proto do definice tělesa tuto vlastnost přidáme. Tím pádem stačí vyžadovat jen jeden z distributivních zákonů a můžeme také zjednodušit vlastnosti (S2), (S3), (N2) a (N3). Ještě přidáme tzv. axiom netriviality, tj. požadavek že těleso má alespoň 2 prvky. Jedno-prvkovou množinu totiž za těleso nechceme považovat.

3.2. Definice tělesa.

Definice 3.2. *Tělesem* \mathbf{T} rozumíme množinu T spolu s dvěma binárními operacemi $+, \cdot$ na T , které splňují následující axiomy.

(S1) („asociativita sčítání“) Pro libovolné prvky $a, b, c \in T$ platí $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(S2) („existence nulového prvku“) Existuje prvek $0 \in T$ takový, že pro libovolné $a \in T$ platí $a + 0 = a$.

(S3) („existence opačného prvku“) Pro každé $a \in T$ existuje $-a \in T$ takové, že $a + (-a) = 0$.

(S4) („komutativita sčítání“) Pro libovolné prvky $a, b \in T$ platí $a + b = b + a$.

(N1) („asociativita násobení“) Pro libovolné prvky $a, b, c \in T$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(N2) („existence jednotkového prvku“) Existuje prvek $1 \in T$ takový, že pro libovolné $a \in T$ platí $a \cdot 1 = a$.

(N3) („existence inverzního prvku“) Pro každé $0 \neq a \in T$ existuje $a^{-1} \in T$ takové, že $a \cdot a^{-1} = 1$.

(N4) („komutativita násobení“) Pro libovolné prvky $a, b \in T$ platí $a \cdot b = b \cdot a$.

- (D) („distributivita“) Pro libovolné prvky $a, b, c \in T$ platí $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
 (\neg T) („netrivialita“) $|T| > 1$.

Prvek 0 z axiomu (S2) též nazýváme *neutrální prvek vzhledem k operaci +* a prvek 1 z axiomu (N2) je *neutrální prvek vzhledem k ·*. V následujícím tvrzení ukážeme, že jsou určeny jednoznačně. Tyto jednoznačně určené prvky pak vystupují v axiomech (S3) a (N3).

Formulace (S3) může být trochu matoucí. Přesněji bychom měli říct, že pro každé $a \in T$ existuje $b \in T$ takové, že $a + b = 0$, a poté libovolné takové b označit $-a$. V následujícím tvrzení dokážeme, že $b = -a$ je pro dané a určeno jednoznačně. Podobně pro inverzní prvky.

Stejně jak je běžné u reálných čísel, prvek $a \cdot b$ často značíme jen ab . Definujeme

$$a - b = a + (-b) \quad \text{a} \quad \frac{a}{b} = ab^{-1}.$$

Těleso je zadané množinou T a určením dvou binárních operací $+$ a \cdot na množině T . Samotná množina těleso neurčuje. Rovněž poznamenejme, že vzhledem k definici binární operace (definice 3.1) musí být $a+b$ a ab definované pro každou dvojici prvků $a, b \in T$ a výsledek musí ležet v množině T .

Příkladem tělesa je množina racionálních (nebo reálných, nebo komplexních) čísel spolu s běžnými operacemi. Množina celých čísel spolu s běžnými operacemi těleso netvoří kvůli axiomu (N3). Dříve než se podíváme na další příklady, dokážeme několik jednoduchých vlastností, které mají všechna tělesa.

Tvrzení 3.3. *V každém tělese \mathbf{T} platí*

- (1) *nulový prvek je určený jednoznačně,*
- (2) *rovnice $a + x = b$ má vždy právě jedno řešení, speciálně, opačný prvek $-a$ je prvkem $a \in T$ určený jednoznačně,*
- (3) *jednotkový prvek je určený jednoznačně,*
- (4) *rovnice $ax = b$, $a \neq 0$, má vždy právě jedno řešení, speciálně, prvek a^{-1} inverzní k prvku $0 \neq a \in T$, je prvkem a určený jednoznačně,*
- (5) *$0a = 0$ pro libovolný prvek $a \in T$,*
- (6) *je-li $ab = 0$, pak buď $a = 0$ nebo $b = 0$,*
- (7) *$(-1)a = -a$ pro každý prvek $a \in T$,*
- (8) *z rovnosti $a + b = a + c$ plyne $b = c$,*
- (9) *z rovnosti $ab = ac$ a předpokladu $a \neq 0$, vyplývá $b = c$,*
- (10) $0 \neq 1$

Důkaz. (1) Předpokládejme, že 0 a $0'$ jsou prvky, pro které $a + 0 = a = a + 0'$ pro libovolné $a \in T$. Pak platí

$$0 = 0' + 0 = 0 + 0' = 0'.$$

V první rovnosti jsme využili, že $a = a + 0$ pro libovolné a (využili jsme to pro $a = 0'$), ve druhé rovnosti využíváme komutativitu sčítání (axiom (S3)) a ve třetí rovnosti využíváme, že $a + 0' = a$ (pro $a = 0$).

Tedy $0 = 0'$, což jsme chtěli.

- (2) Vezmeme libovolné $a, b \in T$ a předpokládáme, že $x \in T$ i $x' \in T$ splňují $a + x = b$ a $a + x' = b$. Přičteme k oběma stranám rovnosti $a + x = a + x'$ libovolný pevně zvolený opačný prvek $-a$ k a , použijeme asociativitu sčítání

a axiomy (S3),(S4) a (S2). Dostáváme

$$\begin{aligned} a + x &= a + x' \\ (-a) + (a + x) &= (-a) + (a + x') \\ ((-a) + a) + x &= ((-a) + a) + x' \\ 0 + x &= 0 + x' \\ x &= x' . \end{aligned}$$

Tvrzení o jednoznačnosti opačného prvku dostaneme volbou $b = 0$.

- (3) Obdobně jako (1)
- (4) Obdobně jako (2)
- (5) Pro libovolné a máme užitím (D)

$$0a + 0a = (0 + 0)a = 0a.$$

Rovnice $0a + x = 0a$ má tedy řešení $x = 0a$, ale také $x = 0$ podle axiomu (S2). Z bodu (2) nyní vyplývá $0a = 0$.

- (6) Předpokládejme, že $ab = 0$ a $a \neq 0$ a dokážeme, že $b = 0$. Rovnice $ax = 0$ má řešení $x = b$ a také $x = 0$ podle předešlého bodu. Takže $0 = b$ podle bodu (2).
- (7) Je třeba ukázat, že $(-1)a$ je opačný prvek k a . Pak tvrzení plyne z jednoznačnosti opačného prvku (bod (2)). Skutečně

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0,$$

kde jsme využili (N2), (D), (S3) a předchozí bod.

- (8) Rovnice $a + x = (a + c)$ má řešení $x = c$ (zřejmě) a $x = b$ (podle předpokladu). Z bodu (2) plyne $b = c$.
- (9) Podobně jako předešlý bod.
- (10) Pokud $0 = 1$, pak vynásobením obou stran libovolným číslem a a užitím (5) a (N2) dostaneme $0 = 0a = 1a = a$. Tedy každý prvek je roven nulovému, takže $|T| = 1$.

□

Další společné vlastnosti těles jsou ve cvičeních.

3.3. Tělesa \mathbb{Z}_p .

Důležitými příklady těles jsou tělesa \mathbb{Z}_p , kde p je prvočíslo. Tato a jiná konečná tělesa mají aplikace například v informatice při studiu kódů nebo k návrhu rychlých algoritmů pro počítání s celočíselnými polynomy.

Těleso \mathbb{Z}_p má prvky $0, 1, 2, \dots, p - 1$ (má tedy p prvků) a operace \oplus, \odot jsou definovány

$$a \oplus b = (a + b) \bmod p, \quad a \odot b = (a \cdot b) \bmod p.$$

Na levých stranách jsou operace v \mathbb{Z}_p , které definujeme, a na pravých stranách jsou běžné operace v \mathbb{Z} . Pripomeňme, že $c \bmod p$ značí zbytek po dělení čísla c číslem p . Tento zbytek je vždy v množině $0, 1, \dots, p - 1$, takže operace jsou dobře definovány.

Ve skutečnosti pro zápis operací \oplus, \odot používáme symboly $+, \cdot$. Z kontextu je třeba rozhodnout, ve kterém tělese počítáme. Například v \mathbb{Z}_5 máme

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 4 = 0, \quad 3 + 4 = 2, \quad 2 \cdot 2 = 4, \quad 2 \cdot 3 = 1, \quad 3 \cdot 3 = 4, \dots$$

Věta 3.4. *Pro libovolné prvočíslo p tvoří množina \mathbb{Z}_p spolu s výše definovanými operacemi těleso.*

Důkaz. Obě definované operace \oplus a \odot jsou binární operace na množině $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ neboť $a \oplus b, a \odot b \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ pro libovolné $a, b \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Zbývá ověřit platnost všech axiomů tělesa pro operace \oplus a \odot .

Pro libovolná dvě celá čísla a, b a obvyklé sčítání celých čísel platí komutativita $a + b = b + a$. Speciálně také platí pro $a, b \in \mathbb{Z}_p$. Proto také

$$(a + b) \bmod p = (b + a) \bmod p$$

a tedy rovněž $a \oplus b = b \oplus a$. Tím jsme dokázali (S4). Zcela analogicky lze dokázat axiom (N4).

Dále dokážeme platnost (N2). Pro každé $a \in \mathbb{Z}_p$ platí $a \cdot 1 = a$ (běžné násobení). Proto také

$$(a \cdot 1) \bmod p = a \bmod p.$$

Protože $a \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, platí $a \bmod p = a$. Proto také $a \odot 1 = a$. Tím je dokázáno, že prvek 1 splňuje axiom (N2). Podobně dokážeme, že číslo 0 naplňuje axiom (S2).

K důkazu (S3) zvolme libovolné $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$. Potom rovněž $p - a \in \mathbb{Z}_p$. Vzhledem k tomu, že $a + (p - a) = p$, platí také

$$[a + (p - a)] \bmod p = p \bmod p.$$

Protože $p \bmod p = 0$, platí $a \oplus (p - a) = 0$. Protože $0 + 0 = 0$, platí také $0 \oplus 0 = 0$. Tím je (S3) dokázáno.

Platnost (N3) jsme dokázali v části o kongruencích celých čísel v první kapitole. Tam jsme ukázali, že pro každý nenulový prvek $a \in \mathbb{Z}_p$ existuje $b \in \mathbb{Z}_p$ takové, že $a \cdot b \equiv 1 \pmod{p}$ a tedy $a \odot b = 1$.

Protože $p \geq 2$, má \mathbb{Z}_p aspoň dva prvky. Zbývá tedy dokázat obě asociativity (S1) a (N1) a distributivitu (D).

Dokážeme asociativitu násobení. Zvolíme libovolná tři čísla $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$. Protože $a \odot b = (a \cdot b) \bmod p$, platí

$$a \odot b \equiv a \cdot b \pmod{p} .$$

Dále z definice násobení v \mathbb{Z}_p plyne rovněž $(a \odot b) \odot c = [(a \odot b) \cdot c] \bmod p$ a tedy rovněž

$$(a \odot b) \odot c \equiv (a \odot b) \cdot c \pmod{p} .$$

Z reflexivity kongruencí plyne $c \equiv c \pmod{p}$. Spolu s již dokázanou kongruencí $a \odot b \equiv a \cdot b \pmod{p}$ odtud dostáváme

$$(a \odot b) \cdot c \equiv (a \cdot b) \cdot c \pmod{p} .$$

Z tranzitivity kongruencí pak plyne

$$(a \odot b) \odot c \equiv (a \cdot b) \cdot c \pmod{p} .$$

Analogicky dokážeme, že také

$$a \cdot (b \cdot c) \equiv a \odot (b \odot c) \pmod{p} .$$

Běžné násobení celých čísel je asociativní, proto $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, a z reflexivity kongruencí pak plyne

$$a \cdot (b \cdot c) \equiv (a \cdot b) \cdot c \pmod{p} .$$

Dokáža-li jsme tak posloupnost kongruencí

$$(a \odot b) \odot c \equiv (a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \equiv a \odot (b \odot c) \pmod{p}$$

a z tranzitivity kongruencí tak plyne

$$(a \odot b) \odot c \equiv a \odot (b \odot c) \pmod{p} .$$

Protože platí $(a \odot b) \odot c, a \odot (b \odot c) \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, plyne odtud kýžené

$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c) .$$

Zcela stejně se dokáže asociativita sčítání (S1), v právě předvedeném důkazu nahradíme všude násobení sčítáním.

Důkaz distributivity ponecháme do cvičení. □

Příklad 3.5. V tělese \mathbb{Z}_5 máme

$$1^{-1} = 1, 2^{-1} = 3, 3^{-1} = 2, 4^{-1} = 4 .$$

V tělese \mathbb{Z}_7 je

$$1^{-1} = 1, 2^{-1} = 4, 3^{-1} = 5, 4^{-1} = 2, 5^{-1} = 3, 6^{-1} = 6 .$$

Inverzní prvky jsme našli zkusmo, například $2^{-1} = 3$, protože $2 \cdot 3 = 1$. Uvedeme několik snadných pozorování, které usnadní práci. Každé z nich ověřte na uvedených příkladech.

V každém tělese platí $1^{-1} = 1$ a také $(-1)^{-1} = -1$. Tedy v \mathbb{Z}_p je $(p-1)^{-1} = (p-1)$, protože $-1 = p-1$ (čti „opačný prvek k 1 je $p-1$ “). Podle cvičení 3.5.6 je $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$, takže známe-li inverzní prvek k a , můžeme též určit inverzní prvek k $-a = p-a$. Podle stejného cvičení je inverzní prvek k inverznímu prvku původní prvek, tj. víme-li, že $b = a^{-1}$, pak $a = b^{-1}$.

Příklad 3.6. V tělese \mathbb{Z}_7 platí

$$\frac{-3}{5} = \frac{4}{5} = 4 \cdot 5^{-1} = 4 \cdot 3 = 5 .$$

Využili jsme $5^{-1} = 3$, což jsme nahlédli v předchozím příkladu. Alternativně se lze rovnou zeptat kolika je třeba vynásobit pětku, abychom dostali 4. Ještě jinak můžeme počítat

$$\frac{-3}{5} = \frac{4}{-2} = -2 = 5 .$$

Poznamenejme, že zatímco v tělese reálných (nebo racionálních) čísel je $\frac{4}{5}$ číslo, v tělese \mathbb{Z}_7 jde o výraz „4 děleno 5“. Takové výrazy by se ve výsledcích příkladů neměly objevovat, protože jdou ještě dopočítat.

Příklad 3.7. V tělese \mathbb{Z}_{11} vyřešíme soustavu lineárních rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 & 10 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 8 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 0 & 2 & 6 & 8 \end{array} \right) .$$

Soustavu převedeme do odstupňovaného tvaru.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 & 10 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 8 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 0 & 2 & 6 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 6 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 9 \end{array} \right) \end{aligned}$$

V první úpravě jsme 9-násobek prvního řádku přičetli ke druhému a 2-násobek prvního řádku jsme přičetli ke třetímu.

Jak jsme přišli například na číslo 9 při nulování pozice $(2, 1)$? Jednou možností je spočítat $-\frac{4}{2} = -2 = 9$. Pro malá tělesa, zejména $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$, je asi nejrychlejší určit potřebné číslo zkusmo. Tím myslíme v našem případě úvahou „kolika je třeba vynásobit 2, aby po přičtení 4 vznikla 0“. Možná o něco početně příjemnější než přičítat 9-násobek je přičítat (-2) -násobek.

Na koeficient 2 při nulování pozice $(3, 1)$ můžeme obdobně přijít buď výpočtem nebo zkusmo. Výpočet provedeme přímočaře

$$-\frac{7}{2} = -7 \cdot 2^{-1} = -7 \cdot 6 = -9 = 2 ,$$

nebo šikovněji například takto:

$$-\frac{7}{2} = \frac{-7}{2} = \frac{4}{2} = 2 .$$

V další úpravě jsme 5-násobek druhého řádku přičetli k třetímu. V poslední úpravě jsme vynásobili řádky čísly tak, aby pivoty byly rovny 1. To nám usnadní zpětné substituce při dopočítání řešení. Konkrétně jsme první řádek vynásobili číslem $2^{-1} = 6$, druhý řádek číslem $4^{-1} = 3$ a třetí řádek číslem $7^{-1} = 8$.

Bázové proměnné jsou x_1, x_2 a x_3 a volné proměnné jsou x_4 a x_5 . Řešení tedy bude tvaru

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{Z}_{11} \right) \right\} .$$

Zpětnou substitucí dopočítáme neznámé pozice a získáme řešení

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{Z}_{11} \right) \right\} .$$

3.4. Charakteristika. Důležitým číselným parametrem těles je jejich *charakteristika*:

Definice 3.8. Existuje-li kladné celé číslo n takové, že v tělese \mathbf{T} platí

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_n = 0 ,$$

pak nejmenší takové kladné číslo nazýváme *charakteristika* tělesa \mathbf{T} .

Pokud žádné takové kladné celé číslo n neexistuje, tak říkáme, že těleso \mathbf{T} má *charakteristiku* 0.

Charakteristika tedy určuje, kolikrát je nejméně třeba sečíst jedničku, abychom dostali 0. Někdy se zápisem n rozumí součet n jedniček. Charakteristika je při této úmluvě nejmenší kladné celé číslo n takové, že $n = 0$. Pokud takové n neexistuje, charakteristika je 0.

Věta 3.9. *Charakteristika každého tělesa je buď 0, nebo prvočíslo.*

Důkaz. Jestliže charakteristika tělesa \mathbf{T} není rovná 0, pak existuje nějaké kladné celé číslo $n \geq 2$, pro které platí

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_n = 0.$$

Jestliže je n složené číslo, platí $n = kl$ pro nějaká kladná celá čísla $k, l < n$. V důsledku axiomu distributivity (D) platí

$$\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_k \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_l = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_n = 0.$$

Podle tvrzení 3.3.(6) může být součin dvou prvků v tělese rovný 0 pouze pokud je aspoň jeden z činitelů rovný 0. Proto je buď

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_k = 0$$

nebo

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_l = 0.$$

V každém případě nemůže být složené číslo $n \geq 2$ nejmenším kladným celým číslem, pro které platí

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_n = 0.$$

Protože je $1 \neq 0$ podle tvrzení 3.3.(10), musí být nejmenší takové číslo prvočíslo. \square

Charakteristika těles $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ je 0. Pro libovolné prvočíslo p je charakteristika tělesa \mathbb{Z}_p rovná p .

Tělesa charakteristiky 2 mají tu příjemnou vlastnost, že sčítání a odčítání splývají, viz cvičení. V některých situacích tato tělesa tvoří výjimečné případy, které je třeba zvlášť rozebírat. Jedním z důvodů je fakt, že v nich nelze počítat aritmetický průměr dvou čísel – výraz $\frac{a+b}{2}$ totiž nedává smysl, protože dělíme nulou.

3.5. Další příklady těles.

3.5.1. *Čtyřprvkové těleso.* Pokud n není prvočíslo, pak \mathbb{Z}_n , definované podobně jako \mathbb{Z}_p , není těleso. Tedy například \mathbb{Z}_4 není těleso. Selže axiom (N3), 2 nemá inverzní prvek. Můžeme také použít větu 3.9, protože charakteristika by byla 4, což je nemožné.

Čtyřprvkové těleso ale existuje. Nejlépe je počítat s polynomy

$$GF(4) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$$

jedné proměnné α s koeficienty v \mathbb{Z}_2 . Sčítání je definované jako přirozené sčítání polynomů (např. $\alpha + (\alpha + 1) = (1 + 1)\alpha + 1 = 1$), při násobení pak polynomy vynásobíme přirozeným způsobem a pak vezme zbytek po dělení polynomem

$$\alpha^2 + \alpha + 1,$$

například

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)(\alpha + 1) &= ((\alpha + 1) \cdot \text{běžné } (\alpha + 1)) \bmod (\alpha^2 + \alpha + 1) = \\ &= (\alpha^2 + 1) \bmod (\alpha^2 + \alpha + 1) = \alpha. \end{aligned}$$

3.5.2. *Další konečná tělesa.* Těleso s n prvky existuje právě tehdy, když n je mocnina prvočísla. Důkaz uvidíte později v kurzu algebry. Naopak, pro každé číslo $n = p^k$, kde p je prvočísl, těleso s n prvky existuje a je dokonce jednoznačně určené až na přeznačení prvků. Jde zkonstruovat podobně jako čtyřprvkové těleso. Prvky budou polynomy stupně nejvýše $k - 1$ s koeficienty v \mathbb{Z}_p a počítat budeme modulo pevně zvolený nerozložitelný polynom stupně k , tj. polynom, který se nedá napsat jako (běžný) součin polynomů nižšího stupně.

Podobně jako u těles \mathbb{Z}_p by se existence inverzních prvků dokázala pomocí Bezoutových koeficientů, analogie Bezoutovy věty totiž platí i pro polynomy s koeficienty v \mathbb{Z}_p . Důležité je, že počítáme modulo nerozložitelný polynom. Tento fakt hraje v důkazu stejnou roli jako fakt, že p je prvočísl v důkazu věty 3.4 – největší společný dělitel zvoleného nerozložitelného polynomu a libovolného nenulového polynomu nižšího stupně bude díky tomu 1.

3.5.3. *Podtělesa komplexních čísel.* Existuje celá řada těles „mezi“ racionálními a komplexními čísly. Například množina komplexních čísel

$$\{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

tvorí s běžnými operacemi těleso. K důkazu musíme ověřit, že tato množina je uzavřena na sčítání a násobení. Většina zbylých axiomů je pak očividná, kromě existence inverzního prvku. Úplný důkaz přenecháme do cvičení.

Dalším příkladem je množina

$$\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

opět s běžnými operacemi.

Tato a podobná tělesa hrají velkou roli například při důkazu slavné věty, že neexistuje vzoreček (využívající operace $+$, \cdot , $-$, $:$, $\sqrt{\quad}$) pro kořeny polynomu většího než pátého stupně, nebo při důkazu nemožnosti kvadratury kruhu, trisekce úhlu a zdvojení krychle.

3.5.4. *Těleso racionálních funkcí.* Příkladem „většího“ tělesa je těleso racionálních funkcí, tedy funkcí tvaru $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x)$ a $q(x) \neq 0$ jsou reálné polynomy s běžnými operacemi sčítání a násobení funkcí. Je potřeba ztotožnit racionální funkce, které se liší pouze definičním oborem, např. 1 je potřeba považovat za tu samou racionální funkci jako $(x + 1)/(x + 1)$, viz cvičení.

3.5.5. *Charakteristika a konečnost.* Každé těleso charakteristiky 0 má nekonečně mnoho prvků, protože čísla $0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1$ jsou všechna navzájem různá. Jde ukázat, že takové těleso v jistém smyslu obsahuje těleso racionálních čísel (viz cvičení).

Na druhou stranu, není pravda, že těleso nenulové charakteristiky má nutně konečný počet prvků. Příkladem je těleso racionálních funkcí nad \mathbb{Z}_p , které má charakteristiku p a není konečné. Při zavádění tohoto tělesa je potřeba postupovat opatrněji než v případě tělesa racionálních funkcí nad \mathbb{R} , musíme pracovat s formálními podíly (nikoliv funkcemi tvaru podílu) a vhodné podíly ztotožnit. Detaily probírat nebudeme.

Každé těleso charakteristiky p „obsahuje“ těleso \mathbb{Z}_p (opět viz cvičení).

3.5.6. *Kvaterniony.* Důležitým příkladem nekomutativního tělesa jsou kvaterniony. Kvaterniony definujeme jako výrazy tvaru

$$a + bi + cj + dk,$$

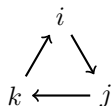
kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a i, j, k, l jsou „imaginární jednotky“. Sčítání je definováno přirozeně, tedy

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k.$$

Při násobení roznásobíme závorky a využijeme vztahů $ai = ia, aj = ja, ak = ka$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ a

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, jk = i, ki = j, \quad ji = -k, kj = -i, ik = -j,$$

kteří se dobře pamatují pomocí cyklu $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$:



Pokud násobíme po směru cyklu, dostaneme třetí proměnnou s kladným znaménkem, a násobení proti směru znaménko obrací. Tedy

$$\begin{aligned} & (a + bi + cj + dk) \cdot (a' + b'i + c'j + d'k) = \\ & = aa' + ab'i + ac'j + ad'k + ba'i + bb'i^2 + bc'ij + bd'ik + \\ & \quad + ca'j + cb'ji + cc'j^2 + cd'jk + da'k + db'ki + dc'kj + dd'k^2 = \\ & = aa' + ab'i + ac'j + ad'k + ba'i - bb' + bc'k - bd'j + \\ & \quad + ca'j - cb'k - cc' + cd'i + da'k + db'j - dc'i - dd' = \\ & = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i + \\ & \quad + (ac' - bd' + ca' + db')j + (ad' + bc' - cb' + da')k . \end{aligned}$$

Lineární algebra lze mimo jiné použít také ke zkoumání geometrických zobrazení. Rotace o úhel α kolem nějaké osy patří mezi důležitá geometrická zobrazení. V letním semestru si ukážeme, že složení dvou rotací kolem různých os je opět rotace kolem nějaké osy. Najít osu a úhel složené rotace není vůbec jednoduché. Hledání toho, jak osa a úhel složené rotace závisí na osách a úhlech rotací, které skládáme, vedlo k objevu kvaternionů.

Délkou kvaternionu $a + bi + cj + dk$ rozumíme reálné číslo $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Kvaternion délky 1 nazýváme *jednotkový kvaternion*. Lze spočítat (viz cvičení), že součin dvou jednotkových kvaternionů je zase jednotkový kvaternion.

Rotaci kolem osy procházející počátkem souřadnic a bodem $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ o úhel α v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček díváme-li se na rovinu, ve které se body pohybují, z kladného směru osy rotace) zapíšeme pomocí kvaternionu

$$\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)(ai + bj + ck) .$$

Tak například otočení o úhel $\pi/2$ kolem první souřadné osy zapíšeme jako kvaternion $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Otočení kolem osy z o úhel $\pi/2$ v kladném směru zapíšeme pomocí kvaternionu $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k$.

Pro každé kladné reálné číslo r popisuje kvaternion $\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)(rai + rbj + rck)$ stejnou rotaci jako kvaternion $\cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)(ai + bj + ck)$. Oba vektory $(a, b, c)^T$ a $(ra, rb, rc)^T$ totiž určují stejnou přímku procházející počátkem.

Ze všech možných kvaternionů popisujících stejnou rotaci si vybereme jednotkový kvaternion. Oba příklady z předchozího odstavce jsou jednotkové kvaterniony.

Složíme-li dvě rotace, dostaneme osu a úhel složené rotace tak, že vynásobíme příslušné kvaterniony v daném pořadí.

Příklad 3.10. Složíme rotaci kolem osy x o úhel $\pi/2$ a rotaci kolem osy z o úhel $\pi/2$. Osu a úhel složené rotace najdeme jako součin kvaternionů

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k),$$

použili jsme rovnost $ki = j$.

Platí tedy, že složená rotace je kolem osy prvního oktantu o úhel $2\pi/3$ v kladném směru.

Cvičení

1. Dokažte, že v libovolném tělese \mathbf{T} platí pro každé dva prvky $a, b \in T$ vztahy $(-a)(-b) = ab$, $(-a)b = -(ab)$ a $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

2. Dokažte, že v libovolném tělese \mathbf{T} funguje převod na společný jmenovatel, tzn. dokažte, že pro libovolná $a, b, c, d \in T$, $b, d \neq 0$, platí

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

3. Dokažte, že v libovolném tělese platí $-0 = 0$, $1^{-1} = 1$, $(-a)^{-1} = -a^{-1}$, $(a^{-1})^{-1} = a$ pro libovolné $0 \neq a \in T$.

4. Dokončete důkaz, že \mathbb{Z}_p je těleso pro libovolné prvočíslo p .

5. Dokažte, že \mathbb{Z}_n je těleso právě tehdy, když n je prvočíslo.

6. Dokažte, že v libovolném tělese \mathbf{T} charakteristiky 2 platí $a = -a$ pro libovolný prvek $a \in T$.

7. Vytvořte tabulku počítání ve čtyřprvkovém tělese a ověřte, že se skutečně jedná o těleso.

8. Rozhodněte (a odpověď dokažte), které z následujících podmnožin \mathbb{C} tvoří s běžnými operacemi těleso.

- $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, kde n je pevně zvolené přirozené číslo
- $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
- $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
- $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$

9. Proč je při definici tělesa racionálních funkcí třeba ztotožňovat racionální funkce, které se liší pouze definičním oborem?

10. Dokažte, že v tělese charakteristiky 0 jsou všechna čísla $0, 1, 1+1, 1+1+1, \dots$ navzájem různá.

11. Nechť \mathbf{T} s operacemi \oplus, \odot je těleso charakteristiky 0. Opačné prvky a dělení v tomto tělese budeme značit \ominus, \oslash . Pro libovolné přirozené číslo n označme

$$\bar{n} = \underbrace{1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1}_{n \times} \quad \text{a} \quad \overline{-n} = \ominus \bar{n}$$

Dokažte, že pro libovolné $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ a $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ platí, že $\overline{p_1} \otimes \overline{q_1} = \overline{p_2} \otimes \overline{q_2}$ právě tehdy, když se racionální čísla p_1/q_1 a p_2/q_2 rovnají a platí

$$(\overline{p_1} \otimes \overline{q_1}) \odot (\overline{p_2} \otimes \overline{q_2}) = \overline{p_1 p_2} \otimes \overline{q_1 q_2}, \quad (\overline{p_1} \otimes \overline{q_1}) \oplus (\overline{p_2} \otimes \overline{q_2}) = \overline{p_1 q_2 + p_2 q_1} \otimes \overline{q_1 q_2} .$$

Prvky T typu $\overline{p} \otimes \overline{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ se tedy sčítají a násobí jako racionální čísla. V tomto smyslu obsahuje každé těleso charakteristiky 0 těleso racionálních čísel.

12. Po vzoru předchozího tvrzení přesně zformulujte a dokažte tvrzení, že každé těleso charakteristiky p obsahuje těleso \mathbb{Z}_p .

13. V tělese kvaternionů najděte prvek inverzní k prvku $a + bi + cj + dk$.

14. Dokažte, že součin dvou jednotkových kvaternionů je opět jednotkový kvaternion.

4. MATICE

Cíl. *Dozvíme se, že matice určují zobrazení. Naučíme se provádět základní operace s maticemi. Zajímavou operací je násobení, které odpovídá skládání zobrazení, a invertování, které odpovídá invertování zobrazení.*

Matice pro nás zatím byly pouze pomůckou k přehlednému zápisu soustav lineárních rovnic. V této kapitole se budeme dívat na matice jako na samostatné objekty. Definujeme základní operace, zmíníme některé aplikace a základní vlastnosti. K pochopení násobení matic nahlédneme, že matice přirozeným způsobem určují zobrazení. Takto jdou popsat například rotace nebo osové souměrnosti v rovině. Násobení matic pak odpovídá skládání zobrazení.

4.1. Matice a jednoduché operace.

Začneme definicí matice a speciálních typů matic. Nová definice rozšiřuje stávající definice 2.1 a 2.4 tím, že prvky mohou být z libovolného pevně zvoleného tělesa.

Definice 4.1. Nechť \mathbf{T} je těleso. *Maticí nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové schéma prvků T s m řádky a n sloupci. Matice typu $m \times m$ se nazývá čtvercová matice řádu m . Matice typu $m \times 1$ se nazývá (sloupcový) aritmetický vektor a matice typu $1 \times m$ se nazývá (řádkový) aritmetický vektor.*

Připomeňme, že zápisem $A = (a_{ij})_{m \times n}$ rozumíme matici A typu $m \times n$, která má na pozici (i, j) prvek $a_{ij} \in T$. Index $m \times n$ vynecháváme, pokud nechceme typ specifikovat nebo je zřejmý z kontextu.

Definice 4.2. Čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ nazýváme

- *diagonální*, pokud $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i \neq j$,
- *horní trojúhelníková*, pokud $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i > j$,
- *dolní trojúhelníková*, pokud $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i < j$.

U libovolné matice říkáme, že prvky a_{ii} tvoří *hlavní diagonálu*.

Matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ považujeme za stejné, pokud mají stejný typ $m \times n$ a mají stejné prvky na odpovídajících pozicích (formálněji, pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $a_{ij} = b_{ij}$).

Zavedeme několik jednoduchých operací s maticemi, které zobecňují příslušné operace pro vektory.

Definice 4.3. Jsou-li $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ matice nad stejným tělesem \mathbf{T} , stejného typu $m \times n$ a $t \in T$, pak definujeme

- *součet matic A a B* jako matici $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$,
- *t -násobek matice A* jako matici $t \cdot A = tA = (ta_{ij})_{m \times n}$,
- *matice opačnou k A* jako matici $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$,
- *nulovou matici* typu $m \times n$ jako matici $0_{m \times n} = (0)_{m \times n}$.

Součet matic různých typů nebo nad různými tělesy není definován. Rovněž nedefinujeme výraz tA , t -násobek matice A píšeme vždy tA .

Příklad 4.4. Nad tělesem \mathbb{Z}_5 máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 1+2 & 3+2 \\ 4+1 & 0+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -4 & -0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad 0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Právě definované operace vůbec neberou v úvahu tabulkovou strukturu matice – kdybychom napsali sloupce matice pod sebe, dostali bychom aritmetický vektor s mn složkami a operace $+$, \cdot , $-$ by se shodovaly se stejnými operacemi pro vektory. Jednoduchou operací, která není tohoto typu, je transpozice. Zavedené značení je v souladu s dříve používaným značením $(a_1, \dots, a_n)^T$ pro sloupcový vektor.

Definice 4.5. *Transponovaná matice* k matici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ je matice $A^T = (b_{ji})_{n \times m}$, kde $b_{ji} = a_{ij}$ pro libovolné indexy $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Sloupce transponované matice jsou tedy řádky původní matice a naopak. Například

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Násobení matic.

4.2.1. *Geometrická motivace.* Na rozdíl od sčítání, násobení matic není definováno po pozicích. Abychom pochopili na první pohled záhadnou definici, podíváme se trochu jinak na řešení soustav lineárních rovnic. Uvažujme například soustavu 2 rovnic o 2 neznámých nad reálnými čísly a její matici:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 10 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 20 \end{aligned}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Levá strana soustavy, neboli matice soustavy, definuje zobrazení f_A z množiny \mathbb{R}^2 všech 2-složkových vektorů nad \mathbb{R} do téže množiny \mathbb{R}^2 :

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy jsou ty vektory $(x_1, x_2)^T$, které zobrazení f_A zobrazí na vektor $(10, 20)^T$. (Jinými slovy, řešením je vektor $(10, 20)^T$ při zobrazení f_A .) Obecněji, matice typu $m \times n$ definuje zobrazení z množiny \mathbb{R}^n do množiny \mathbb{R}^m . Studium těchto typů zobrazení je věnována kapitola ??, my se zatím podíváme na tři příklady.

- *Otočení o 30° v \mathbb{R}^2 .* Obraz vektoru $(x_1, x_2)^T$ určíme úvahou podle obrázku (přesněji bychom měli říkat obraz bodu, jehož polohový vektor je $(x_1, x_2)^T$, ale dělat to nebudeme).

OBRÁZEK

Obrazem vektoru $(1, 0)^T$ je

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že obrazem vektoru $(x_1, 0)^T$ je

$$x_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \sqrt{3}/2 \\ x_1/2 \end{pmatrix}.$$

Podobně zjistíme, že obrazem vektoru $(0, x_2)^T$ je vektor $(-x_2/2, x_2\sqrt{3}/2)$. Obraz součtu vektorů $(x_1, 0)^T$ a $(0, x_2)^T$ (což je vektor $(x_1, x_2)^T$) určíme jako součet jejich obrazů. Obrazem vektoru $(x_1, x_2)^T$ je tedy vektor

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že rotace o 30° je zobrazení f_A , kde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Obecněji, rotace o úhel α je zobrazení f_A , kde

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

- *Osová souměrnost podle osy x v \mathbb{R}^2 .* Obrazem vektoru $(x_1, x_2)^T$ je vektor $(x_1, -x_2)^T$, takže souměrnost podle osy x je zobrazení f_A , kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Zobrazení f_A z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^3 dané maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

je znázorněné na obrázku.

OBRÁZEK

Uvažujme teď dvě zobrazení f_A a f_B z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 daná maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Podíváme se na složení zobrazení f_B a f_A , tedy zobrazení g definované vztahem $g(\mathbf{x}) = f_A(f_B(\mathbf{x}))$.

$$\begin{aligned} g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= f_A \left(f_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = f_A \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \\ a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vidíme, že $g = f_C$ pro matici

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Obecněji bychom mohli složit zobrazení f_B z \mathbb{R}^p do \mathbb{R}^n dané maticí typu $n \times p$ a zobrazení f_A z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m dané maticí typu $m \times n$. Podobným výpočtem jako výše bychom zjistili, že výsledné zobrazení z \mathbb{R}^p do \mathbb{R}^m je dáno maticí C typu $m \times p$, která má na pozici (i, k) prvek

$$a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

4.2.2. *Definice násobení.* Dostali jsme se k definici součinu matic.

Definice 4.6. Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a $B = (b_{jk})$ matice typu $n \times p$ nad stejným tělesem \mathbf{T} , pak definujeme *součin matic* $A \cdot B = AB = (c_{ik})$ jako matici nad \mathbf{T} typu $m \times p$, kde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Součin AB je tedy definován, pokud počet sloupců matice A je rovný počtu řádků matice B . Jinak definován není. To souhlasí s motivací součinu matic jako skládání zobrazení.

Prvek na místě (i, k) dostaneme jako standardní skalární součin i -tého řádku matice A a k -tého sloupce matice B . Pro řádky a sloupce matice zavedeme speciální značení.

Definice 4.7. Je-li A matice typu $m \times n$ a $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, pak $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T$ nazýváme *i -tý řádkový vektor matice A* a značíme jej $\tilde{\mathbf{a}}_i$. Podobně pro $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ definujeme *j -tý sloupcový vektor* jako $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$.

Matici A můžeme zapsat „po sloupcích“ jako $A = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n)$ nebo „po řádcích“ jako

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_m \end{pmatrix}.$$

Prvek na místě (i, k) součinu AB je v tomto značení roven

$$c_{ik} = \tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{b}_k = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}.$$

OBRAZEK

Příklad 4.8. Nad tělesem \mathbb{R} máme

$$(1, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} (1, 2) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.9. Počítáme opět nad \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ & 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zobrazení f_A určené maticí A nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ jde napsat pomocí maticového součinu. Obrazem n -složkového vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ (nad \mathbf{T}) je m -složkový vektor $A\mathbf{x}$:

$$f_A : T^n \rightarrow T^m, \quad f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} .$$

Příklad 4.10.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Použili jsme součtové vzorce pro goniometrické funkce. Výsledek není překvapující. Odvodili jsme, že násobené matice určují pořadě otočení o α a otočení o β . Výsledná matice tedy odpovídá složení otočení o β a otočení o α , což je otočení o $\alpha + \beta$ a to odpovídá výsledné matici. Pokud bychom uměli rychle určit matici odpovídající otočení o nějaký úhel (to se naučíme v kapitole ??), pak lze uvedený výpočet použít k rychlému odvození součtových vzorců pro \cos a \sin .

Příklad 4.11. Matice v předchozím příkladu mají tu vzácnou vlastnost, že komutují, tzn. nezáleží na pořadí, ve kterém je násobíme. To odpovídá geometricky tomu, že nezáleží, zda nejprve rotujeme o úhel α a pak o úhel β , nebo naopak. **Násobení matic ale obecně komutativní není.** Součin v opačném pořadí nemusí být dokonce vůbec definován, například pro matici A typu 2×3 a matici B typu 3×5 (nad stejným tělesem) je součin AB matice typu 2×5 , ale součin BA není definován.

Součin není obecně komutativní ani pro čtvercové matice stejného řádu. Například složíme-li osovou souměrnost v \mathbb{R}^2 podle osy x a otočení o $\pi/2$ dostaneme zobrazení odpovídající matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pokud naopak nejprve rovinu otočíme o $\pi/2$ a pak překloupíme kolem osy x , dostaneme zobrazení odpovídající matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Geometrický popis vzniklých zobrazení přenecháme do cvičení.

Příklad 4.12. Podíváme se ještě jednou na příklad 3.10, kde jsme v \mathbb{R}^3 pomocí kvaternionů skládali rotaci kolem osy x o úhel $\pi/2$ s rotací kolem osy z o úhel π .

OBRAZEK kladné orientace os

Obrazem vektoru $(x_1, x_2, x_3)^T$ při rotaci kolem osy x o úhel $\pi/2$ je $(x_1, x_3, -x_2)^T$, tedy tato rotace je rovna f_B pro

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Obrazem vektoru $(x_1, x_2, x_3)^T$ při rotaci kolem osy z o úhel $\pi/2$ je $(x_1, x_3, -x_2)^T$, tedy tato rotace je rovna f_A pro

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Složení je zobrazení f_C , kde $C = AB$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Z matice C určíme snadno obraz vektoru $(x_1, x_2, x_3)^T$:

$$f_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Není ale vidět, že je to rotace kolem osy prvního oktantu o úhel $2\pi/3$ v kladném směru, jak jsme zjistili z kvaternionového přístupu.

4.2.3. Násobení jako provádění lineárních kombinací. Někdy je výhodný trochu jiný pohled na násobení matic. Násobíme-li matici $A = (a_{ij})$ maticí B , pak i -tý řádek výsledku získáme sečtením a_{i1} -násobku 1. řádku matice B , a_{i2} -násobku 2. řádku matice B , atd. Je to dobře vidět na příkladu 4.9. Toto pozorování a podobné pozorování pro sloupce často usnadní numerické počítání a je také důležité z teoretického hlediska. Snadněji jde vyjádřit pomocí pojmu lineární kombinace matic.

Definice 4.13. Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_k matice stejného typu nad stejným tělesem \mathbf{T} a t_1, t_2, \dots, t_k prvky tělesa \mathbf{T} , pak součet

$$t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_k A_k$$

se nazývá *lineární kombinace matic* A_1, A_2, \dots, A_k . Prvky $t_1, \dots, t_k \in T$ nazýváme *koefficienty lineární kombinace*.

Speciálním případem této definice je definice lineární kombinace vektorů.

Pozorování lze nyní přeformulovat tak, že i -tý řádek součinu AB je lineární kombinací řádků matice B s koefficienty v i -tém řádku matice A . Podobně, k -tý sloupec součinu AB je lineární kombinací sloupců matice A , kde koefficienty jsou v k -tém sloupci matice B :

Tvrzení 4.14. Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a $B = (b_{jk})$ matice nad stejným tělesem typu $n \times p$, pak

- (1) pro každé $i = 1, \dots, m$ platí, že i -tý řádek součinu AB se rovná lineární kombinaci $a_{i1}\tilde{\mathbf{b}}_1^T + a_{i2}\tilde{\mathbf{b}}_2^T + \dots + a_{im}\tilde{\mathbf{b}}_m^T = \tilde{\mathbf{a}}_i^T B$.
- (2) pro každé $k = 1, \dots, p$ platí, že k -tý sloupec součinu AB se rovná lineární kombinaci $b_{1k}\mathbf{a}_1 + b_{2k}\mathbf{a}_2 + \dots + b_{nk}\mathbf{a}_n = A\mathbf{b}_k$.

Důkaz. (1). Označíme $C = AB = (c_{ik})$ a vezmeme libovolné $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Pro libovolné $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ je k -tá složka řádkového vektoru na levé straně rovna c_{ik} a k -tá složka vektoru $a_{i1}\tilde{\mathbf{b}}_1^T + a_{i2}\tilde{\mathbf{b}}_2^T + \dots + a_{im}\tilde{\mathbf{b}}_m^T$ je $a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{im}b_{mk}$, což je totéž podle definice součinu matic. Tento výraz je roven k -té složce řádkového vektoru $\tilde{\mathbf{a}}_i^T B$, rovněž podle definice součinu.

Část (2) se dokáže podobně. □

Příklad 4.15. Podívejme se ještě jednou na součin v příkladu 4.9.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Podle první části tvrzení je první řádek výsledku součet 1-násobku řádkového vektoru $\tilde{\mathbf{b}}_1^T = (3, 5, 2, 4)$, 0-násobku $\tilde{\mathbf{b}}_2^T = (1, 1, -3, 2)$ a (-1) -násobku $\tilde{\mathbf{b}}_3^T = (0, 2, -2, 1)$, to je $(3, 3, 4, 3)$. Druhý řádek výsledku je součtem prvních dvou řádků matice B , tedy $(4, 6, -1, 6)$. Tímto způsobem získáme výsledek

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

daleko rychleji. Používat druhou část tvrzení se v tomto případě příliš nevyplatí.

Obě části si rozmyslete na příkladu 4.11.

4.2.4. *Jednotková matice.* Neutrální prvky vzhledem k násobení tvoří tzv. jednotkové matice:

Definice 4.16. *Jednotková matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} je čtvercová matice $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$, kde $a_{ii} = 1$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tj.*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Prvky jednotkové matice také označujeme pomocí symbolu δ_{ij} , tzn. *Kroneckerovo delta*. Ten se rovná 1, pokud $i = j$, a 0 jinak. Těleso, ve kterém pracujeme musí být zřejmé z kontextu.

Z tvrzení 4.14 nahlédneme, že $I_n A = A$, kdykoliv je součin definován, tj. pokud A má n řádků. Skutečně, i -tý řádek výsledku je rovný lineární kombinaci řádků matice A s koeficienty $0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0$, kde 1 je na pozici i . Tato kombinace je rovná i -tému řádku výsledku. Podobně z druhé části stejného tvrzení dostaneme, že $A I_n = A$, kdykoliv A má n sloupců.

Geometricky, jednotková matice I_n odpovídá identickému zobrazení z T^n do T^n .

4.3. Maticový zápis soustavy lineárních rovnic. Uvažujme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n s rozšířenou maticí $(A \mid \mathbf{b})$ nad tělesem \mathbf{T} .

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Označíme-li \mathbf{x} vektor neznámých, tj. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, pak máme

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Vektor $A\mathbf{x}$ je tedy sloupcový vektor vzniklý dosazením \mathbf{x} do levé strany soustavy. Vidíme, že soustavu rovnic lze psát ve tvaru

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} .$$

I elementární úpravy matic lze interpretovat maticově.

Tvrzení 4.17. *Nechť C je matice typu $m \times n$ nad tělesem \mathbf{T} , $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j$ a $0 \neq t \in T$.*

- (1) *Nechť E je matice, která vznikne z I_m prohozením i -tého a j -tého řádku. Pak EC vznikne z C prohozením i -tého a j -tého řádku.*

$$E = \begin{matrix} & & & i & & j & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ i & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ j & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) *Nechť E je matice, která vznikne z I_m nahrazením prvku 1 na místě (i, i) prvkem t . Pak EC vznikne z C vynásobením i -tého řádku prvkem t .*

$$E = \begin{matrix} & & & i & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ i & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) *Nechť E je matice, která vznikne z I_m nahrazením prvku 0 na místě (i, j) prvkem t . Pak EC vznikne z C přičtením t -násobku j -tého řádku k i -tému řádku.*

$$E = \begin{matrix} & & & i & & j & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ i & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Důkaz. Pozorování plyne z první části tvrzení 4.14. □

Definice 4.18. Maticím E z předchozího tvrzení říkáme *elementární matice*.

4.4. Vlastnosti maticových operací. V této části zformulujeme několik základních algebraických vlastností maticových operací. Téměř všechny z nich, snad až na asociativitu násobení, jsou očividné. Nicméně používání maticové algebry může například značně zpřehlednit a zkrátit technické výpočty.

Sčítání matic má podobné vlastnosti jako sčítání v tělese. Musíme dát ale pozor, abychom sčítali matice stejných typů.

Tvrzení 4.19. *Jsou-li A, B, C matice stejného typu $m \times n$ nad stejným tělesem \mathbf{T} , pak platí*

- (1) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- (2) $A + 0_{m \times n} = A$,
- (3) $A + (-A) = 0_{m \times n}$,
- (4) $A + B = B + A$.

Důkaz. Matice mají stejný typ, takže výrazy $(A + B) + C$ a $A + (B + C)$ jsou definovány a výsledkem jsou matice typu $m \times n$. Prvek na místě (i, j) v matici $(A + B) + C$ se rovná $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$, na místě (i, j) v matici $A + (B + C)$ se rovná $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. Protože sčítání prvků tělesa je asociativní (axiom (S1) v definici tělesa), prvky na stejném místě v maticích $(A + B) + C$ a $A + (B + C)$ se rovnají. Proto platí $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Ostatní vlastnosti sčítání se dokáží podobně. \square

Násobení matic a násobení v tělese mají některé společné vlastnosti. Násobení je asociativní (pokud násobíme matice správných typů) a jednotkové matice jsou neutrálním prvkem. Navíc platí oboustranný distributivní zákon. Rozdíl oproti násobení v tělese je ve dvou podstatných vlastnostech. Násobení matic není komutativní (ani pro čtvercové matice stejného řádu), jak jsme si již všimli. Dále není pravda, že ke každé nenulové matici existuje matice inverzní.

Tvrzení 4.20. *Jsou-li A, B matice typu $m \times n$, C matice typu $n \times p$ a D, E matice typu $p \times q$, kde všechny matice jsou nad stejným tělesem \mathbf{T} , pak*

- (1) $(BC)D = B(CD)$,
- (2) $I_m A = A I_n = A$,
- (3) $(A + B)C = AC + BC$, $C(D + E) = CD + CE$.

Důkaz. Dokážeme asociativitu násobení. Nejprve si všimneme, že výrazy $(BC)D$ a $B(CD)$ na obou stranách jsou definovány a vyjdou matice typu $m \times q$. Na levé straně je BC matice typu $m \times p$, takže součin matic BC a D je definován a výsledkem je matice typu $m \times q$. Podobně se ukáže, že na pravé straně vyjde matice typu $m \times q$.

Vezmeme nyní libovolné $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $l \in \{1, 2, \dots, q\}$ a spočítáme prvek na místě (i, l) v matici $(BC)D$. Označíme-li $BC = (e_{ij})$, pak hledaný prvek je

$$\sum_{k=1}^p e_{ik} d_{kl} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} c_{jk} \right) d_{kl} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n b_{ij} c_{jk} d_{kl} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p b_{ij} c_{jk} d_{kl} .$$

Ve druhé úpravě jsme použili distributivitu platnou v tělese \mathbf{T} a v poslední úpravě jsme prohodili sumy, což můžeme díky asociativitě sčítání v \mathbf{T} . (Zde si můžeme všimnout, že prohazování sum jde interpretovat jako sčítání všech prvků matice dvojím způsobem – po řádcích a po sloupcích.)

Označíme-li $(CD) = (f_{jl})$, pak prvek na místě (i, l) v matici $B(CD)$ je

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} f_{jl} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \left(\sum_{k=1}^p c_{jk} d_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p b_{ij} c_{jk} d_{kl} .$$

Prvky na stejných místech v maticích $(BC)D$ a $B(CD)$ se rovnají, takže $(BC)D = B(CD)$.

Zbylé dvě vlastnosti přenecháme do cvičení. \square

Asociativitu lze (zatím pouze neformálně) odůvodnit geometricky: víme, že násobení matic odpovídá skládání zobrazení a skládání zobrazení je asociativní.

Díky asociativitě můžeme pro přirozené číslo n definovat n -tou mocninu čtvercové matice vztahem

$$A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \times} .$$

Výsledek totiž nezávisí na uzávorkování.

Další tvrzení hovoří o vztahu násobení matice prvkem tělesa s operacemi sčítání a násobení. Důkazy jsou snadné a přenecháme je jako cvičení.

Tvrzení 4.21. *Jsou-li A, B matice nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$, C matice nad \mathbf{T} typu $n \times p$ a $a, b \in T$, pak*

- (1) $(a + b)A = aA + bA$,
- (2) $a(A + B) = aA + aB$,
- (3) $a(bA) = (ab)A$,
- (4) $1A = A$,
- (5) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$.

K poslednímu bodu poznamenejme, že výraz $(Ba)C$ není definován, protože není definován výraz Ba .

Nakonec zformulujeme vztah transpozice a zbylých operací.

Tvrzení 4.22. *Jsou-li A, B matice nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$, C je matice typu $n \times p$ nad \mathbf{T} a $a \in T$, pak*

- (1) $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- (2) $(aA)^T = aA^T$,
- (3) $(A^T)^T = A$.
- (4) $(BC)^T = C^T B^T$.

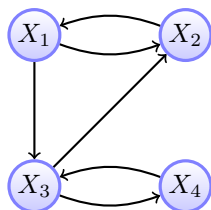
Příklad 4.23. Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n se nazývá *symetrická*, pokud $a_{ij} = a_{ji}$ pro libovolné $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ekvivalentně, A je symetrická, pokud $A^T = A$. Pomocí vlastností z tvrzení 4.22 ukážeme, že pro libovolnou čtvercovou matici A je matice $B = 2AA^T + A^T A$ symetrická:

$$\begin{aligned} B^T &= (2AA^T + A^T A)^T = (2AA^T)^T + (A^T A)^T = 2(AA^T)^T + (A^T A)^T = \\ &= 2(A^T)^T A^T + A^T (A^T)^T = 2AA^T + A^T A = B . \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že $B = B^T$, matice B je tedy symetrická. Mlčky jsme používali i vlastnosti z tvrzení 4.21, kdy jsme například nepsali závorky ve výrazu $2AA^T$.

Příklad 4.24. Mnohé vlastnosti množiny všech řešení soustavy lineárních rovnic se dokazují pohodlně pomocí vlastností maticových operací. Podívejme se na vlastnost

- jsou-li vektory \mathbf{w}, \mathbf{z} řešením soustavy $(A \mid \mathbf{o})$, pak je vektor $\mathbf{w} + \mathbf{z}$ řešením soustavy $(A \mid \mathbf{o})$.

OBRÁZEK 5. Letecká spojení mezi městy X_1 , X_2 , X_3 a X_4 z části 4.5.2

Skutečně, pokud \mathbf{w} , \mathbf{z} řeší soustavu $(A \mid \mathbf{o})$, čili $A\mathbf{w} = \mathbf{o}$ a $A\mathbf{z} = \mathbf{o}$, pak $A(\mathbf{w} + \mathbf{z}) = A\mathbf{w} + A\mathbf{z} = \mathbf{o}$, neboli $\mathbf{w} + \mathbf{z}$ řeší stejnou soustavu. Použili jsme distributivitu.

4.5. Další aplikace.

Viděli jsme, že maticové operace se hodí na práci s některými zobrazeními (jako třeba rotace) a na kompaktní popis soustav lineárních rovnic. Uvedeme některé další příklady využití.

4.5.1. *Rekurentní rovnice.* Asi jste se už setkali s Fibonacciho posloupností definovanou předpisem

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{i+2} = a_{i+1} + a_i \text{ pro každé } i = 1, 2, \dots$$

Chtěli bychom najít explicitní vzorec pro výpočet n -tého členu.

Z definice posloupnosti nahlédneme, že dvojice sousedních členů splňuje vztah

$$\begin{pmatrix} a_{i+2} \\ a_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ a_i \end{pmatrix}$$

(Pro ověření tohoto vztahu použijeme tvrzení 4.14.) Označíme-li C matici 2×2 vystupující v tomto vztahu, vidíme, že

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = C \left(C \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = C^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

a indukcí dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{i+2} \\ a_{i+1} \end{pmatrix} = C^i \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = C^i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podstatným způsobem zde využíváme asociativitu násobení matic. K výpočtu n -tého členu Fibonacciho posloupnosti tedy stačí umět mocnit matice. To se naučíme v kapitole o vlastních číslech a vektorech. Vyjde možná překvapivý vzorec

$$a_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

kde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ je hodnota zlatého řezu.

4.5.2. *Počet cest.* Na obrázku ?? jsou vyznačena letecká spojení mezi městy X_1 , X_2 , X_3 , X_4 . Vypočítáme počet spojení s nejvýše čtyřmi přestupy mezi každou dvojicí měst.

Spojení mezi městy uspořádáme do matice $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ nad \mathbb{R} tak, že a_{ij} definujeme rovné 1, pokud z X_i vede cesta do X_j , a $a_{ij} = 0$ jinak.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní se zamyslíme, jaký je význam prvku na místě (i, j) v matici A^2 . Tento prvek je rovný $a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + a_{i3}a_{3j} + a_{i4}a_{4j}$. Všimněte si, že k -tý člen součtu je rovný jedné právě tehdy, když z X_i vede spojení do X_j a z X_j vede spojení do X_k , a je rovný nule jinak. Prvek na místě (i, j) v matici A^2 je proto rovný počtu cest z X_i do X_k s právě jedním přestupem.

Podobně nahlédneme, že prvek na místě (i, k) v matici A^n je rovný počtu cest z X_i do X_k s právě $(n - 1)$ přestupy. Hledaný počet cest s nejvýše čtyřmi přestupy z X_i do X_k je tedy prvek na místě (i, k) v matici

$$\begin{aligned} A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.6. Blokové matice.

Někdy je výhodné nahlížet na matici jako rozdělenou do bloků a operace, zejména násobení, provádět blokově.

Vezměme dvě matice nad tělesem \mathbf{T} : matici A typu $m \times n$ a matici B typu $n \times p$. Dále nechť $m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s$ a p_1, \dots, p_t jsou přirozená čísla, pro která

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_r, \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_s \quad \text{a} \quad p = p_1 + \dots + p_t.$$

Matici A rozdělíme podélně na prvních m_1 řádků, dalších m_2 řádků, atd. až posledních m_r řádků, a a vertikálně na prvních n_1 sloupců, dalších n_2 sloupců, atd. až posledních n_s sloupců. Matice A se nyní skládá z rs bloků $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1s}, A_{21}, \dots, A_{rs}$.

$$A = \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} n_1 & n_2 & \dots & n_s \\ \hline A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{array} \right)$$

Každý blok A_{ij} je matice typu $m_i \times n_j$.

Podobně, matici B rozdělíme podélně na oddíly velikosti n_1, n_2, \dots, n_s a vertikálně na oddíly velikosti p_1, p_2, \dots, p_t . Matici B tím rozdělíme na st bloků B_{11}, \dots, B_{st} :

$$B = \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} p_1 & p_2 & \dots & p_t \\ \hline B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{st} \end{array} \right).$$

Součin $C = AB$ lze potom rozdělit do bloků následovně.

$$C = AB = \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} p_1 & p_2 & \dots & p_t \\ \hline C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1t} \\ \hline C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_{s1} & C_{s2} & \dots & C_{st} \end{array} \right),$$

kde pro každé $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ a $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ platí

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^s A_{ij} B_{jk}.$$

Důkaz, který pouze vyžaduje správně si napsat jednotlivé prvky ve všech maticích a jejich blocích, přenecháme do cvičení.

Příklad 4.25. Matice A, B z příkladu 4.12 o rotacích v prostoru mají přirozenou blokovou strukturu.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Příklad 4.26. Najdeme A^2 pro matici A nad \mathbb{Z}_7 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Označíme-li

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

máme

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\begin{array}{c|c} I_2 & B \\ \hline 0_{3 \times 2} & I_3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_2 & B \\ \hline 0_{3 \times 2} & I_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} II + B0 & IB + BI \\ \hline 0I + I0 & 0B + II \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I & 2B \\ \hline 0 & I \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pro přehlednost jsme od druhé úpravy vynechávali indexy u jednotkových a nulových matic.

4.7. Regulární matice. V poslední části této kapitoly se budeme zabývat otázkou, kdy lze čtvercovou matici (nebo příslušné zobrazení) invertovat.

4.7.1. *Geometrický a algebraický pohled.* Začneme geometrickým pohledem. Jak víme, čtvercová matice A nad tělesem \mathbf{T} řádu n určuje zobrazení

$$f_A : T^n \rightarrow T^n, \quad f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} .$$

K tomuto zobrazení existuje inverzní zobrazení $T^n \rightarrow T^n$ právě tehdy, když f_A je bijekce. To se dá říct tak, že pro každý aritmetický vektor $\mathbf{b} \in T^n$ existuje právě jeden vektor při zobrazení f_A , tj. právě jeden aritmetický vektor $\mathbf{x} \in T^n$ takový, že $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. V takovém případě říkáme, že A je *regulární*.

Definice 4.27. Čtvercová matice A nad tělesem \mathbf{T} řádu n se nazývá *regulární*, pokud je příslušné zobrazení f_A bijekce (tj. vzájemně jednoznačné), ekvivalentně, pokud má soustava rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení pro každou pravou stranu $\mathbf{b} \in T^n$.

Čtvercová matice, která není regulární, se nazývá *singulární*.

Příklad 4.28. Z geometrického náhledu vidíme, že matice odpovídající rotaci kolem počátku a zrcadlení podle přímky procházející počátkem jsou regulární, protože tato zobrazení jsou bijektivní. Matice odpovídající projekci na osu x v \mathbb{R}^2 je singulární, protože toto zobrazení není bijekcí (není dokonce ani prosté ani na celý prostor \mathbb{R}^2).

Je-li A regulární, tedy f_A je bijekce, pak musí existovat inverzní zobrazení $g : T^n \rightarrow T^n$, tj. zobrazení, které splňuje $f_A \circ g = g \circ f_A = \text{id}_{T^n}$. Za okamžik ukážeme, že g je opět tvaru f_X pro jistou čtvercovou matici X . Protože skládání zobrazení odpovídá součinu matic a identické zobrazení odpovídá jednotkové matici, vztahy $f_A \circ f_X = f_X \circ f_A = \text{id}_{T^n}$ se ekvivalentně přepíší na $f_{AX} = f_{XA} = f_{I_n}$, a protože různé matice určují různá zobrazení (viz cvičení), dostáváme ekvivalentně $AX = XA = I_n$. Z tohoto důvodu říkáme matici X *matice inverzní k A* .

Definice 4.29. Čtvercová matice A nad tělesem \mathbf{T} řádu n se nazývá *invertovatelná*, pokud existuje čtvercová matice X nad \mathbf{T} řádu n taková, že $AX = XA = I_n$. Matici X nazýváme *inverzní matice k A* a označujeme ji A^{-1} .

Několik poznámek, než ověříme, že zavedené pojmy regulární a invertibilní matice splývají.

- Zdůrazněme, že zavedené pojmy se týkají **pouze čtvercových matic**.
- Z geometrického i algebraického pohledu vidíme, že pro matice obecně neplatí obdoba vlastnosti (N3) z definice tělesa o existenci inverzních prvků. Například projekce na osu x chápaná jako zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 je zobrazení f_A pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Toto zobrazení není bijekce (není dokonce ani prosté, ani na), takže A není regulární.

Z algebraického pohledu: neexistuje matice X taková, že $AX = I_2$ (protože druhý řádek matice AX je vždy nulový), ani matice Y taková, že $YA = I_2$ (protože druhý sloupec matice YA je vždy nulový). Říkáme, že matice A nemá matici *zprava inverzní* ani matici *zleva inverzní*.

- Inverzní matice k invertovatelné matici je určena jednoznačně. Pokud jsou totiž X, Y dvě inverzní matice k A , pak

$$X = XI_n = X(AY) = (XA)Y = I_n Y = Y .$$

Je-li matice invertovatelná, pak je regulární. Pokud totiž $AX = XA = I_n$ pak $f_A f_X = f_X f_A = f_{I_n} = \text{id}_{I_n}$, tedy k f_A existuje oboustrané inverzní zobrazení $f_A^{-1} = f_X$, tedy f_A je bijekce. Opačnou implikaci dokážeme tím, že popíšeme postup jak inverzní matici nalézt. Připomeňme, že vlastně dokazujeme, že inverzní zobrazení k f_A je opět tvaru f_X pro jistou matici X .

4.7.2. *Hledání pravého inverzu.* Pokusme se nyní k dané regulární čtvercové matici A řádu n najít matici X takovou, že $AX = I_n$. (Matici X nazýváme maticí zprava inverzní k A .) Budeme provádět obecnou diskuzi a zároveň ji ilustrovat na příkladu reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pro $i = 1, 2, \dots, n$ srovnáme i -té sloupce ve vztahu $AX = I_n$ a využijeme $AX = (A\mathbf{x}_1 | A\mathbf{x}_2 | \dots | A\mathbf{x}_n)$ (viz tvrzení 4.14). Dostáváme, že rovnice $AX = I_n$ je ekvivalentní s

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešíme tedy n soustav lineárních rovnic se stejnou maticí A s různými pravými stranami. Protože A je regulární, soustavy mají právě jedno řešení. V našem případě řešíme soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soustavy vyřešíme.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & | & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 9 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Matice inverzní zprava je tedy

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Provedeme nyní dvě modifikace tohoto postupu.

Protože je matice všech n -soustav stejná, totiž A , je možné všechny řešit stejnými úpravami. Proto je můžeme řešit najednou tak, že pravé strany napíšeme vedle matice soustavy všechny vedle sebe a upravíme celou matici do odstupňovaného tvaru. Dopočtení zpětnou substitucí pak proběhne jako předtím, zvlášť pro každou pravou stranu. V našem případě

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 2 & 9 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 3 & | & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Před druhou modifikací si uvědomme, jak vypadá odstupňovaný tvar matice A po Gaussově eliminaci. Protože předpokládáme, že rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení pro každé \mathbf{b} , nemůžou při řešení soustav $A\mathbf{x}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots$ existovat volné proměnné (pokud by existovaly, pak $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ buď nemá žádné řešení, nebo každé volbě volné proměnné odpovídá řešení, takže by soustava měla více než

jedno řešení). Tím pádem musí pro odstupňovaný tvar matice A platit $r = n$ a $k_1 = 1, k_2 = 2, \dots, k_n = n$. Jinými slovy, odstupňovaný tvar je horní trojúhelníková matice s nenulovými všemi prvky na diagonále. (Pro čtvercové matice je tato podmínka zřejmě ekvivalentní tomu, že odstupňovaný tvar neobsahuje nulový řádek.)

Ke slíbené modifikaci. Po převedení soustav na odstupňovaný tvar budeme dále pokračovat v řádkových úpravách tak, aby na levé straně vznikla jednotková matice. To lze provést díky tomu, že odstupňovaný tvar je horní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále. Postup je takový, že nejprve „doeliminujeme“ druhý sloupec – přičtením vhodného násobku druhého řádku k prvnímu docílíme, že hodnota na pozici $(1, 2)$ je nula. Pak vynulujeme přičtením vhodných násobků pozice $(1, 3)$ a $(2, 3)$, atd. Tímto vznikne diagonální matice s nenulovými prvky na diagonále, ze které umíme udělat jednotkovou vynásobením řádků vhodnými prvky.

V našem případě máme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) . \end{aligned}$$

Soustavu s jednotkovou maticí je velmi snadné vyřešit – řešením je zřejmě přímo pravá strana. Postup lze nyní shrnout takto: řádkovými úpravami převedeme matici $(A | I_n)$ do tvaru $(I_n | X)$ a vpravo si přečteme výslednou matici zprava inverzní k A .

4.7.3. Jiný pohled. Ukázali jsme, že k regulární matici existuje matice inverzní zprava. V řeči zobrazení, našli jsme X takovou, že $f_A \circ f_X = \text{id}_{T^n}$. Protože f_A je bijekce, lze z tohoto vztahu usoudit (viz cvičení ?? v kapitole 1), že $f_X \circ f_A = \text{id}_{T^n}$, což v řeči matic znamená, že $XA = I_n$.

My ukážeme, že platí $XA = I_n$, jiným způsobem, který se nám jednak bude hodit k důkazu hlavní věty 4.30 a který rovněž poskytuje alternativní pohled na odvozený postup

$$(A | I_n) \sim \dots \sim (I_n | X) .$$

Podívejme se na tento postup maticově. V tvrzení 4.17 jsme nahlédli, že elementární řádková úprava odpovídá násobení jistou maticí zleva. Úpravy lze tedy psát

$$(A | I_n) \sim E_1(A | I_n) \sim E_2(E_1(A | I_n)) \sim \dots ,$$

kde E_1, E_2, \dots jsou elementární matice příslušných úprav. Vezmeme v úvahu asociativitu násobení a pravidlo o násobení po blocích, můžeme postup psát

$$\begin{aligned} (A | I_n) \sim (E_1 A | E_1 I_n) &= (E_1 A | E_1) \sim (E_2 E_1 A | E_2 E_1) \sim \dots \sim \\ &\sim (E_k \dots E_2 E_1 A | E_k \dots E_2 E_1) = (I_n | X) . \end{aligned}$$

Srovnáním pravých bloků dostaneme $X = E_k \dots E_2 E_1$, takže srovnáním levých bloků dostaneme $XA = I_n$. Máme $XA = AX = I_n$, tedy X je inverzní matice k A . Rovněž vidíme, že X je součinem elementárních matic.

4.7.4. *Matice inverzní zprava a zleva.* Pro zobrazení $f : X \rightarrow X$ obecně neplatí, že f je bijekce, pokud f je prosté, ani neplatí, že f je bijekce, pokud f je na, viz ???. To je rozdíl oproti situaci, kdy množina X je konečná. Ve větě 4.30 si všimneme, že zobrazení tvaru f_A (pro čtvercovou matici A) jsou „spořádaná“ v tom smyslu, že kdykoliv f_A je prosté nebo na, pak f_A je bijekce.

Z kapitoly 1 víme, že f je prosté právě tehdy, když k f existuje zobrazení inverzní zleva, a f je na právě tehdy, když k f existuje zobrazení inverzní zprava¹. Maticově tedy lze zmíněnou spořádanost přeformulovat tak, že kdykoliv má čtvercová matice A matici X inverzní zprava nebo zleva, pak již je A invertovatelná a platí $X = A^{-1}$.

4.7.5. *Charakterizace.* Následující věta shrnuje různé ekvivalentní charakterizace regularity – geometrické charakterizace, charakterizace pomocí odstupňovaného tvaru a algebraické charakterizace pomocí invertovatelnosti a elementárních matic.

Věta 4.30. *Nechť A je čtvercová matice nad tělesem \mathbf{T} řádu n . Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) A je regulární.
- (2) Zobrazení f_A je na.
- (3) Zobrazení f_A je prosté.
- (4) Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má jediné řešení ($\mathbf{x} = \mathbf{o}$).
- (5) Gaussova eliminace převede matici A do horního trojúhelníkového tvaru s nenulovými prvky na diagonále (ekvivalentně odstupňovaného tvaru bez nulových řádků).
- (6) Matici A lze převést elementárními řádkovými (ekvivalentně sloupcovými) úpravami do jednotkové matice I_n .
- (7) A je invertovatelná.
- (8) Existuje čtvercová matice X řádu n taková, že $AX = I_n$.
- (9) Existuje čtvercová matice X řádu n taková, že $XA = I_n$.
- (10) A je součinem elementárních matic.

Důkaz. Implikace (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) a (1) \Rightarrow (2) jsou triviální.

Argumenty pro (2) nebo (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (1) byly již předvedeny výše, takže je jen stručně shrneme. U (6) budeme pracovat s řádkovou verzí.

(4) \Rightarrow (5). Řešíme-li soustavu rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ Gaussovou eliminací a získáme odstupňovaný tvar s alespoň jednou volnou proměnnou, pak má soustava více řešení (u homogenní soustavy se ani nemůže stát, že řešení neexistuje). Podobně ukážeme (2) \Rightarrow (5). Pokud odstupňovaný tvar matice A má nulový řádek, pak soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá pro nějakou pravou stranu řešení, takže f_A není na. Toto si rozmyslete podrobně jako cvičení.

(5) \Rightarrow (6). Matici A převedeme do horní trojúhelníkové matice s nenulovými prvky na diagonále a pak doeliminuujeme postupně druhý sloupec, třetí sloupec, atd. Získáme diagonální matici a stačí vynásobit řádky vhodnými prvky tělesa.

(6) \Rightarrow (7). Použijeme postup $(A \mid I_n) \sim \cdots \sim (I_n \mid X)$. Díváme-li se na tento postup jako na řešení n -soustav lineárních rovnic, máme $AX = I_n$. Díváme-li se na něj jako na násobení elementárními maticemi zleva, získáme $XA = I_n$.

¹to je axiom výběru

(7) \Rightarrow (1). Předvedeme algebraický argument, již jsme viděli geometrický. Platí-li $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pak $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, takže rovnice má nejvýše jedno řešení, a to $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Na druhou stranu, tento vektor je skutečně řešením, protože $A(A^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$.

Nyní jsme dokázali, že tvrzení (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) jsou ekvivalentní. Ekvivalenci regularity s podmínkou (10) ukážeme v tvrzení 4.39.

Triviálně platí (7) \Rightarrow (8), (9), takže stačí dokázat třeba (8) \Rightarrow (2) a (9) \Rightarrow (3).

(8) \Rightarrow (2). Je-li $AX = I_n$, pak $f_A f_X = f_{I_n} = \text{id}_{T^n}$, takže k zobrazení f_A existuje zobrazení inverzní zprava, tedy f_A je na. Implikace (9) \Rightarrow (2) se dokáže obdobně. \square

Příklad 4.31. Najdeme matici inverzní k matici A nad tělesem \mathbb{Z}_5 , pokud existuje.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řádkovými úpravami upravujeme $(A | I_3)$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Takže A je regulární a platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.32. Najdeme matici inverzní k matici A nad tělesem \mathbb{Z}_2 , pokud existuje.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opět řádkovými úpravami upravujeme $(A | I_n)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Odstupňovaný tvar matice A není horní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále, takže A je singulární podle (1) \Leftrightarrow (5) z věty 4.30 a inverzní matice neexistuje (podle bodu (7) stejné věty).

Chápeme-li A jako matici nad tělesem \mathbb{Z}_3 nebo \mathbb{R} , pak je regulární.

Příklad 4.33. Matice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

nad \mathbb{R} je pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ regulární a inverzní matice je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

To lze nahlédnout z úvahy, že f_A je rotace o α , což je bijekce a inverzním zobrazení je rotace o $-\alpha$.

Příklad 4.34. Dalším příkladem, kdy je výhodnější se trochu zamyslet, než ihned začít počítat podle odvozeného algoritmu, je výpočet inverzní matice k reálné matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Hledáme matici X takovou, že $AX = I_3$. Znovu si uvědomíme, že při násobení matice X zleva maticí A děláme lineární kombinace řádků matice X , kde koeficienty jsou v řádcích matice A (tvrzení 4.14.(1)). Druhý řádek matice A nám říká, že druhý řádek výsledku (to je řádek $(0, 1, 0)$) je $1/2$ -násobek prvního řádku matice X . Z toho okamžitě vidíme, že první řádek matice X je $(0, 2, 0)$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}.$$

Z posledního řádku matice A vidíme, že třetí řádek výsledku (to je $(0, 0, 1)$) je roven 1 -násobku prvnímu řádku matice X (to už víme, že je $(0, 2, 0)$) plus $1/3$ -násobek třetího řádku matice X . Z toho snadno dopočteme, že třetí řádek X je $(0, -6, 3)$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ ? & ? & ? \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Z prvního řádku matice A pak podobně dopočítáme druhý řádek matice X a získáme

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Snadno ověříme, že X je skutečně matice inverzní.

Jako cvičení proveďte podobnou úvahu sloupcově pro rovnici $XA = I_3$ a řádkově pro rovnici $AX = I_3$.

Příklad 4.35. Pokud A je regulární matice, pak každá soustava rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má podle definice právě jedno řešení. Vynásobením obou stran maticí A^{-1} zleva získáme explicitní vzorec:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Například řešením soustavy rovnic nad \mathbb{Z}_5

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

je vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde A^{-1} jsme spočítali v příkladu 4.31.

Na praktické řešení se tento vzorec nehodí, protože Gaussova eliminace a zpětná substituce je rychlejší. Vzorec se hodí pro teoretické úvahy, nebo pokud řešíme mnoho soustav s jednou pravou stranou, i když i v tomto případě spíše používáme jiné techniky, jako LU-rozklad.

Příklad 4.36. V odstavci 4.5.1 jsme odvodili, že pro členy Fibonacciho posloupnosti a_1, a_2, \dots platí

$$\begin{pmatrix} a_{i+2} \\ a_{i+1} \end{pmatrix} = C^i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici C lze zapsat ve tvaru

$$C = XDX^{-1}, \quad \text{kde} D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1 - \varphi \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi - 1 & -\varphi \end{pmatrix}.$$

Tento vztah můžeme samozřejmě ověřit. Jak jej lze získat se dozvíme v kapitole o vlastních číslech a vlastních vektorech.

Když už jej známe, můžeme vypočítat n -tou mocninu matice C :

$$C^n = \underbrace{(XDX^{-1})(XDX^{-1}) \dots (XDX^{-1})}_{n \times} = XD^n X^{-1}$$

Mocninu diagonální matice vypočítáme snadno a dosazením pak získáme vzorec pro n -tý člen.

Důležité příklady regulárních matic tvoří elementární matice. To je v souladu se skutečností, že elementární úpravy jsou vratné.

Tvrzení 4.37. Každá elementární matice je regulární, navíc inverzní matice k regulární matici je opět elementární.

Důkaz. K důkazu můžeme přímo najít matice inverzní, jsou jimi matice úprav, které vrací příslušnou elementární úpravu. Pak pouze využijeme ekvivalenci invertovatelnosti a regulárnosti z charakterizační věty 4.30. \square

4.7.6. *Regularita a maticové operace.* Nakonec se podíváme na vztah invertování a maticových operací.

Tvrzení 4.38. Jsou-li A, B regulární matice nad stejnými tělesem \mathbf{T} stejného řádu a $t \in T$ nenulový prvek, pak platí

- (1) A^{-1} je regulární a platí $(A^{-1})^{-1} = A$,
- (2) A^T je regulární a platí $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
- (3) $(tA)^T$ je regulární a platí $(tA)^{-1} = t^{-1}A^{-1}$,
- (4) AB je regulární a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Důkaz. Důkaz můžeme provést tak, že ukážeme, že popsané matice jsou skutečně matice inverzní (stačí z jedné strany). Například $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, protože $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$. \square

Body (1), (3), (4) v tvrzení mají geometrickou interpretaci, kterou si rozmyslete jako cvičení. Transponování budeme umět geometricky interpretovat až později.

Pro sčítání podobné tvrzení neplatí, stačí se podívat na součet $A + (-A)$, kde matice A (a tím pádem i $-A$) je regulární, například $A = I_n$.

Pomocí bodu (4) dokončíme důkaz charakterizační věty 4.30.

Tvrzení 4.39. Čtvercová matice A je regulární právě tehdy, když jde napsat jako součin elementárních matic.

Důkaz. Každá elementární matice je regulární podle tvrzení 4.37, takže podle bodu (4) v předchozím tvrzení je libovolný součin elementárních matic regulární. To dokazuje implikaci zprava doleva.

Naopak, je-li A regulární, pak ji lze elementárními řádkovými úpravami převést na jednotkovou matici (podle bodu (5) charakterizační věty 4.30). Elementární řádkové úpravy se dají napsat jako násobení zleva elementární maticí, takže existují elementární matice E_1, E_2, \dots, E_k takové, že

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I_n ,$$

kde n je řád A . Protože elementární matice jsou regulární (podle tvrzení 4.37), tedy i invertibilní, můžeme vztah upravit na

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} .$$

Teď jsme hotovi, protože inverzní matice k elementárním maticím jsou elementární (opět podle tvrzení 4.37). \square

Příklad 4.40. Z důkazu také vidíme postup, jak rozklad na elementární matice nalézt. Najdeme rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Matici převedeme elementárními řádkovými úpravami na jednotkovou a zaznamenejme si úpravy.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matice úprav jsou

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Takže máme

$$\begin{aligned} A &= E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

4.8. Maticový zápis Gaussovy eliminace, LU-rozklad. Důsledkem úvah v této kapitole je maticový popis situace, kdy jedna matice vznikne z jiné posloupností elementárních úprav. Uvažujme dvě matice A, B stejného typu (nad stejným tělesem). Pokud B vznikla z A posloupností elementárních úprav, pak pro příslušné elementární matice E_1, \dots, E_k , které popisují provedené úpravy, platí

$$B = E_k \dots E_2 E_1 A .$$

Podle tvrzení 4.39 je matice $R = E_k \dots E_1$ regulární.

Naopak, pokud $B = RA$ pro nějakou regulární matici R , pak podle stejného tvrzení platí $R = E_k \dots E_2 E_1$ pro nějaké elementární matice E_1, \dots, E_k . Z toho vyplývá, že B lze z A získat posloupností elementárních úprav. Dokázali jsme následující tvrzení.

Tvrzení 4.41. *Nechť A, B jsou matice typu $m \times n$ nad tělesem \mathbf{T} . Pak B lze z A získat posloupností elementárních úprav právě tehdy, když existuje regulární matice R řádu m nad \mathbf{T} taková, že $B = RA$.*

Uvažujme nyní regulární matici A . Tu lze elementárními úpravami převést na horní trojúhelníkovou matici U s nenulovými prvky na hlavní diagonále (viz bod (5) ve větě 4.30) a platí $U = RA$ pro jistou regulární matici R . (Speciálně je U regulární podle tvrzení 4.38.)

Předpokládejme nyní navíc, že při úpravě matice A do horního trojúhelníkového tvaru nemusíme prohazovat řádky. Pak si vystačíme pouze s jedním typem úprav – přičtením několikanásobku i -tého řádku k j -tému, kde $j > i$. Příslušné elementární matice E_1, \dots, E_k jsou pak dolní trojúhelníkové, s jednotkami na hlavní diagonále. Matice $R = E_1 \dots E_k$, a rovněž R^{-1} , je pak také dolní trojúhelníková:

Tvrzení 4.42. *Nechť C, D jsou horní (resp. dolní) trojúhelníkové matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} . Pak platí:*

- *Matice CD je horní (resp. dolní) trojúhelníková.*
- *Pokud je C regulární, pak C^{-1} je horní (resp. dolní) trojúhelníková.*

Důkaz. Předpokládejme, že $C = (c_{ij}), D = (d_{ij})$ jsou horní trojúhelníkové. Prvek na pozici (i, j) v součinu CD je roven

$$c_{i1}d_{1j} + \dots + c_{i,i-1}d_{i-1,j} + c_{i,i}d_{i,j} + \dots + c_{in}d_{nj} .$$

Prvky $c_{i1}, \dots, c_{i,i-1}$ jsou nulové a pro $i > j$ jsou nulové rovněž prvky $d_{i,j}, \dots, d_{nj}$. Pro $i > j$ je tedy prvek na pozici (i, j) v matici CD nulový, takže CD je horní trojúhelníková.

Pro dolní trojúhelníkové matice se první bod dokáže podobně.

Druhý bod dokážeme v „dolní verzi“. Předpokládejme tedy, že C je regulární dolní trojúhelníková matice. Při převodu do odstupňovaného tvaru vystačíme s přičítáním násobků nějakého řádku k řádkům pod ním. Získáme regulární diagonální matici, kterou můžeme násobením řádků upravit na jednotkovou (na diagonále nemůžou být nuly kvůli regularitě). Platí tedy $I_n = E_k \dots E_1 A$, kde všechny matice E_i elementárních úprav jsou dolní trojúhelníkové. Matice $A^{-1} = E_k \dots E_1$ je proto podle prvního bodu také dolní trojúhelníková. \square

Vraťme se k diskuzi před tvrzením. Máme $U = RA$, kde R je dolní trojúhelníková s jednotkami na hlavní diagonále. Označme $L = R^{-1}$. Matice L je opět dolní

trojúhelníková a lze nahlédnout (cvičení), že má také jednotky na diagonále. Získali jsme rozklad

$$A = LU \text{ ,}$$

kde L je dolní trojúhelníková matice s jednotkami na hlavní diagonále a U je regulární horní trojúhelníková matice. Takovému rozkladu říkáme LU -rozklad. Tento rozklad je dokonce jednoznačný.

Věta 4.43 (O LU -rozkladu). *Nechť A je regulární matice řádu n , u které při Gaussově eliminaci na odstupňovaný tvar nemusíme prohazovat řádky. Pak existují regulární matice L, U řádu n , pro které platí*

- $A = LU$,
- L je dolní trojúhelníková s jednotkami na hlavní diagonále,
- U je horní trojúhelníková.

Matice L, U jsou těmito podmínkami určeny jednoznačně.

Důkaz. Existenci jsme již dokázali, zbývá dokázat jednoznačnost. Předpokládejme tedy, že $A = L_1U_1 = L_2U_2$ jsou rozklady splňující podmínky. Chceme dokázat, že $L_1 = L_2$ a $U_1 = U_2$.

Vynásobením rovnosti $L_1U_1 = L_2U_2$ zleva maticí L_2^{-1} a poté zprava maticí U_1^{-1} získáme

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} \text{ .}$$

Matice $L_2^{-1}L_1$ je dolní trojúhelníková s jednotkami na hlavní diagonále. Je rovná horní trojúhelníkové matici $U_2U_1^{-1}$. Z toho plyne, že obě strany jsou diagonální matice s jednotkami na hlavní diagonále, tj. jednotkové matice. Proto $L_2^{-1}L_1 = I_n$ a $U_2U_1^{-1} = I_n$, z čehož po úpravě dostáváme $L_1 = L_2$ a $U_1 = U_2$. \square

Příklad 4.44. Provedeme LU -rozklad reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ .}$$

Matici upravíme do odstupňovaného tvaru

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

V první úpravě jsme (-2) -násobek prvního řádku přičetli k druhému. Matice po úpravě je proto rovná E_1A , kde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ .}$$

Potom jsme 1-násobek prvního řádku přičetli ke třetímu a nakonec 1-násobek druhého řádku přičetli k třetímu. Po druhé úpravě jsme tedy dostali matici E_2E_1A a po třetí $E_3E_2E_1A$, kde

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ .}$$

Máme $U = E_3E_2E_1A$, čili $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U$. Spočítáme ještě $L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$.

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Získali jsme LU-rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Počítání matice L tímto způsobem je zdlouhavé. Musíme násobit matice inverzní ke všem provedeným úpravám. Jako cvičení si rozmyslete, že provádíme-li eliminaci po sloupcích (jako na příkladu), pak v matici L je na pozici (i, j) ($i > j$) opačná hodnota ke koeficientu, kterým násobíme j -tý řádek při přičítání k i -tému řádku. Matice L je tedy „záznamem“ o provedené Gaussově eliminaci a U je výsledná matice po eliminaci.

4.8.1. *Využití LU-rozkladu.* LU-rozklad regulární matice $A = LU$ lze využít při řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Stačí totiž nejprve přímou substitucí najít (jednoznačné) řešení \mathbf{y} soustavy $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ a posléze zpětnou substitucí vyřešit soustavu $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Nalezený vektor \mathbf{x} splňuje $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, takže řeší původní soustavu.

4.9. **Jednostranné inverzy.** Dokázali jsme, že pro čtvercovou matici A , příslušné zobrazení f_A je prosté právě tehdy, když je na, a to nastane právě tehdy, když A má inverzní matici (zleva nebo zprava). Následující dvě tvrzení podávají podobné charakterizace pro obecné, ne nutně čtvercové, matice.

Tvrzení 4.45 (o matici inverzní zprava). *Pro matici A typu $m \times n$ nad \mathbf{T} je ekvivalentní:*

- (i) Existuje matice X typu $n \times m$ nad \mathbf{T} taková, že $AX = I_m$.
- (ii) Zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^m$ je na \mathbf{T}^m .

Důkaz. Pokud $AX = I_m$, pak pro příslušná zobrazení f_A a f_X platí $f_{AX} = f_{I_m}$, tedy $f_A \circ f_X = \text{id}_{\mathbf{T}^m}$. Zobrazení f_A má tedy pravý inverz, takže je na podle ??.

Naopak, předpokládejme, že f_A je na. Pro j -tý sloupec \mathbf{e}_j jednotkové matice najdeme nějaké řešení soustavy rovnic $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ (řešení existuje, protože f_A je na). Vektory \mathbf{x}_j srovnáme do sloupců matice $X = (\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \dots | \mathbf{x}_m)$. Pak platí $AX = (A\mathbf{x}_1 | \dots | A\mathbf{x}_m) = I_m$. \square

Tvrzení 4.46 (o matici inverzní zleva). *Pro matici A typu $m \times n$ nad \mathbf{T} je ekvivalentní:*

- (i) Existuje matice X typu $n \times m$ nad \mathbf{T} taková, že $XA = I_n$.
- (ii) Zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^m$ je prosté.

Důkaz. První část se dokáže obdobně jako u předchozího tvrzení.

Je-li zobrazení f_A prosté, má soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Všechny proměnné jsou bázové. Gaussova eliminace převede A do odstupňovaného tvaru C , kde prvních n řádků v C je nenulových a ostatní jsou nulové. Stejně jako v algoritmu pro hledání inverzní matice změníme pomocí elementárních úprav všechny pivoty na 1 a vynulujeme prvky nad nimi. Dostáváme

$$E_k \dots E_1 A = \begin{pmatrix} I_n & \\ O_{(m-n) \times n} & \end{pmatrix}$$

pro vhodné elementární matice E_1, \dots, E_k . Matici X definujeme jako prvních n řádků matice $E_k \dots E_1$. \square

Cvičení

1. Co musí splňovat matice A, B , aby byly definovány oba součiny AB i BA .
2. Geometricky interpretejte násobení matice prvkem tělesa a sčítání matic.
3. Geometricky popište zobrazení, které vznikne složením osové souměrnosti v \mathbb{R}^2 podle osy x a otočením o $\pi/2$. Srovnajte s algebraickým výpočtem v příkladu na násobení matic. Stejnou úlohu řešte pro složení v opačném pořadí.
4. Najděte matici, která odpovídá osové souměrnosti podle přímky $y = ax$, kde $a \in \mathbb{R}$.
5. Dokažte, že součin dvou horních trojúhelníkových matic stejného řádu je opět horní trojúhelníková matice. Podobně pro dolní trojúhelníkové matice i diagonální matice.
6. Najděte nenulovou reálnou matici A typu 2×2 , ke které neexistuje matice inverzní (tj. neexistuje matice B taková, že $AB = BA = I_2$). Interpretejte geometricky.
7. Pro matice neplatí obdoba tvrzení 3.3.(6): Najděte reálnou čtvercovou matici $A \neq 0_{2 \times 2}$, pro kterou $A^2 = 0_{2 \times 2}$. Interpretejte geometricky.
8. Dokažte vlastnosti (p1), (p3) a (p4) z důkazu věty 2.14.
9. Vypočítejte n -tou mocninu matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Ukažte, že násobení elementární maticí zprava odpovídá elementární sloupcové úpravě.
11. Ukažte, že pro čtvercové matice stejného řádu nad stejným tělesem obecně neplatí vztah $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Naleznete podobný, ale platný vztah.
12. Dokončete důkaz tvrzení 4.20.
13. Dokažte tvrzení 4.21.
14. Dokažte tvrzení 4.22.
15. Matice se nazývá antisymetrická, pokud $A = -A^T$. Je pravda, že antisymetrická matice má vždy na hlavní diagonále nuly? (Pozor na vlastnosti tělesa, ve kterém pracujeme!)
16. Dokažte vzorec pro blokové násobení matic.
17. Najděte A^n pro matici z příkladu 4.26.
18. Nechť $A \neq B$ jsou matice stejného typu nad stejným tělesem. Dokažte, že příslušná zobrazení f_A a f_B jsou různá.
19. Navrhněte alternativní postup na převod regulární matice na jednotkovou řádkovými úpravami tak, aby po eliminaci sloupce byly rovnou všechny členy, kromě diagonálního, nulové.
20. Spočítejte znovu příklad 4.34 alternativními postupy navržené v tomto příkladu.
21. Ke každé elementární matici najděte příslušnou matici inverzní, viz tvrzení 4.37.

- 22.** Předpokládejme, že odstupňovaný tvar matice A obsahuje nulový řádek. Dokažte, že potom existuje pravá strana \mathbf{b} taková, že soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá ani jedno řešení (tj. f_A není na).
- 23.** Dokažte implikaci (2) \Rightarrow (5) z věty 4.30.
- 24.** Dokažte přímo implikaci (9) \Rightarrow (3) z věty 4.30.
- 25.** Dokažte tvrzení 4.38 a vysvětlete geometrický význam.
- 26.** Dokažte, že n -tá mocnina diagonální matice je diagonální a na diagonále jsou n -té mocniny původních prvků. Dokončete výpočet n -tého členu Fibonacciho posloupnosti v příkladu 4.36.

5. VEKTOROVÉ PROSTORY

Cíl. *Zobecněním aritmetických vektorů definujeme základní pojem lineární algebry, vektorový prostor. Budeme zkoumat důležité pojmy jako podprostor, lineární obal, množina generátorů, lineární závislost a nezávislost, báze a dimenze. Motivací je porozumět geometrickým vztahům mezi vektory a podprostory (rovné útvary procházející počátkem) například v rovině a v prostoru. To nám také umožní lépe porozumět řešení soustav lineárních rovnic.*

5.1. Definice, příklady a základní vlastnosti. V kapitole o tělesech jsme si všimli, jaké vlastnosti čísel využíváme při řešení lineárních rovnic, a reálná čísla jsme zobecnili na tělesa. Odměnou za větší abstraktnost je větší použitelnost. Stejně věty, například o soustavách rovnic nebo invertování matic, můžeme použít jak pro reálná čísla, tak pro komplexní čísla, tělesa \mathbb{Z}_p , nebo také například pro racionální funkce.

V této kapitole zobecníme \mathbb{R}^n , tedy množinu n -tic reálných čísel, na *vektorový prostor*. Vektorový prostor nad \mathbb{R} tvoří množina (jejíž prvky nazýváme vektory), operace sčítání vektorů a operace násobení vektoru reálným číslem. Tyto ingredience musí splňovat sadu axiomů, které jsou ve shodě s představou vektoru jako „šipky“ a operací prováděných podle obrázku ??.

OBRAZEK

Obecněji definujeme vektorový prostor nad tělesem \mathbf{T} , kde místo násobení vektoru reálným číslem máme operace násobení vektoru prvkem T .

Definice 5.1. Nechť \mathbf{T} je těleso. *Vektorovým prostorem \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T}* rozumíme množinu V spolu s binární operací $+$ na V (tj. $+$ je zobrazení z $V \times V$ do V) a operací \cdot násobení vektorů prvky tělesa (tj. \cdot je zobrazení z $T \times V$ do V), které splňují následující axiomy.

(vS1) Pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

(vS2) Existuje $\mathbf{o} \in V$ takový, že pro libovolné $\mathbf{v} \in V$ platí $\mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}$.

(vS3) Pro každé $\mathbf{v} \in V$ existuje $-\mathbf{v} \in V$ takové, že $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{o}$.

(vS4) Pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

(vN1) Pro libovolné $\mathbf{v} \in V$ a $a, b \in T$ platí $a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{v}$.

(vN2) Pro libovolné $\mathbf{v} \in V$ platí $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

(vD1) Pro libovolné $\mathbf{v} \in V$ a $a, b \in T$ platí $(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

(vD2) Pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a $a \in T$ platí $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$.

Prvkům V říkáme *vektory* a prvky T nazýváme *skaláry*.

„Operace“ \cdot není binární operací ve smyslu definice 3.1, protože násobíme prvky dvou různých množin. Místo $a \cdot \mathbf{v}$, kde $a \in T$ a $\mathbf{v} \in V$, píšeme často $a\mathbf{v}$. Nikdy neprohazujeme pořadí, tj. výrazy $\mathbf{v} \cdot a$ a $\mathbf{v}a$ nejsou definované. Jak je běžné u těles, úmluva je, že \cdot má přednost před $+$, proto nemusíme ve výrazech na pravé straně v axiomech (vD1) a (vD2) psát závorky.

V definici je implicitně obsaženo, že součet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ je definován pro každou dvojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a násobení vektoru skalárem $a\mathbf{v}$ je definováno pro každé $a \in T, \mathbf{v} \in V$. Z definice rovněž vyplývá, že množina V je neprázdná, protože musí obsahovat podle (vS2) alespoň nulový vektor.

Axiomy (vS1), (vS2), (vS3), (vS4) jsou stejné jako axiomy pro sčítání v tělese. Stejně jako v tělese platí, že nulový prvek a opačné prvky jsou určeny jednoznačně. Máme teď dvě různé nuly, 0 v tělese \mathbf{T} a \mathbf{o} ve vektorovém prostoru \mathbf{V} . Axiom (vN1) připomíná asociativitu násobení a (vN2) existenci jednotkového prvku, i když zde je podstatný rozdíl v tom, že násobíme prvky různých množin. Axiomy (vD1) a (vD2) připomínají distributivitu.

5.1.1. *Aritmetické vektorové prostory a další příklady.* Základním příkladem vektorového prostoru je množina n -tic prvků tělesa.

Definice 5.2. Nechť \mathbf{T} je těleso a n je přirozené číslo. *Aritmetickým vektorovým prostorem nad \mathbf{T} dimenze n* rozumíme množinu všech n -složkových aritmetických (sloupcových) vektorů T^n spolu s přirozenými operacemi $+$ a \cdot (definovanými jako v definici 2.2). Značíme \mathbf{T}^n .

To, že aritmetický vektorový prostor je skutečně vektorovým prostorem jsme formulovali a dokázali obecně pro matice v tvrzení 4.19 a tvrzení 4.21.

Aritmetické vektorové prostory (a jejich nekonečně dimenzionální varianty, viz cvičení) jsou velmi konkrétní, zároveň ale v jistém smyslu „jediné“ příklady vektorových prostorů. Uvidíme, že v každém vektorovém prostoru lze zvolit soustavu souřadnic (tzv. bázi), a místo vektorů můžeme počítat s jejich souřadnicemi stejně jako v aritmetickém vektorovém prostoru. Omezit se ale na studium aritmetických vektorových prostorů není výhodné z mnoha důvodů.

Jedním z nich je, že vektorový prostor (hlavně nad \mathbb{R}) si představujeme jako množinu šipek na nekonečném papíru, v prostoru, apod. Z tohoto prostoru se stává aritmetický vektorový prostor až po volbě nějaké soustavy souřadnic, kdežto operace s vektory na této volbě nezávisí. Žádná volba souřadnic nemusí být přirozená, nebo různé volby mohou být výhodné v různých situacích. Například množina všech řešení rovnice $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$ je rovina, tedy „v podstatě totéž co \mathbb{R}^2 “, ale asi by bylo těžké argumentovat, že nějaká konkrétní volba souřadnic je ta nejlepší. Přesný význam výrazů typu „v podstatě totéž co \mathbb{R}^2 “ uvidíme později.

Dalším důvodem je, že u některých vektorových prostorů není ihned patrné, že se v podstatě jedná jen o n -tice prvků tělesa. Navíc i když to někdy vidět je, není vždy výhodné se na prostory takto dívat, například proto, že na dané množině máme i jiné operace, které jsou při takovém pohledu nepřehledné, apod. Uvedeme několik příkladů vektorových prostorů.

- Množina všech polynomů stupně nejvýše 173 s reálnými koeficienty (nebo jiného daného maximálního stupně, s koeficienty v jiném tělese) s běžnými operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem. Tento vektorový prostor je „v podstatě“ \mathbb{R}^{174} , protože na polynom $a_0 + a_1x + \dots + a_{173}x^{173}$ se můžeme dívat jako na 174-ici koeficientů $(a_0, a_1, \dots, a_{174})^T$ a operace jsou při tomto pohledu stejné jako v \mathbb{R}^{174} .
- Množina všech matic typu 7×15 nad tělesem \mathbb{Z}_3 s běžnými operacemi $+$ a \cdot (nebo jiného daného typu nad jiným tělesem). Vzhledem k operacím $+$ a \cdot se tato množina chová stejně jako množina $7 \cdot 15 = 105$ -tic, takže tento vektorový prostor je „v podstatě“ \mathbb{Z}_3^{105} . (To, že množina matic daného typu nad daným tělesem je vektorový prostor jsem formulovali v tvrzení 4.19 a tvrzení 4.21.) Když matice daného typu sčítáme a násobíme skalárem, můžeme se na ně dívat jako na n -tice prvků tělesa, ale tento pohled není

výhodný například když matice interpretujeme jako zobrazení, násobíme je nebo invertujeme.

Pro prostory matic zavedeme značení.

Definice 5.3. Vektorový prostor matic nad \mathbf{T} typu $m \times n$ s běžnými operacemi sčítání a násobení prvkem T značíme $\mathbf{T}^{m \times n}$.

Aritmetický vektorový prostor \mathbf{T}^n lze chápat jako $\mathbf{T}^{n \times 1}$.

Následují další příklady vektorových prostorů.

- Množina všech podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, 11\}$ (nebo jiné dané množiny X) spolu s operací symetrické diference, tj. $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, je vektorový prostor nad \mathbb{Z}_2 . Násobení skalárem je $0 \cdot A = \emptyset, 1 \cdot A = A$ pro libovolné $A \subseteq X$. Jako cvičení dokažte, že toto je skutečně vektorový prostor, a vysvětlíte, proč je tento prostor „v podstatě“ \mathbb{Z}_2^{11} .
- Množina komplexních čísel je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} (s běžnými operacemi). Vzhledem ke sčítání a násobení reálným číslem se komplexní číslo $a + bi$ chová stejně jako dvojice $(a, b)^T$, takže z tohoto pohledu je \mathbb{C} v podstatě \mathbb{R}^2 . Pokud chápeme komplexní čísla jako vektorový prostor nad \mathbb{R} , zapomínáme vlastně na násobení v \mathbb{C} , pamatujeme si pouze sčítání a násobení reálným číslem.
- Obecněji, každé těleso \mathbf{T} je vektorový prostor nad libovolným svým podtělesem \mathbf{S} . (Podtěleso tělesa \mathbf{T} je podmnožina, která tvoří spolu se stejnými operacemi těleso.) Například \mathbb{R} je vektorový prostor nad \mathbb{Q} , ale není vidět, že reálná čísla jdou vnímat jako n -tice racionálních. Dimenze n je zde nespočetná a potřebovali bychom zobecnění definice aritmetického prostoru (viz cvičení). U tohoto příkladu souřadná soustava dokonce nejde v jistém smyslu zkonstruovat.

U jiných příkladů je situace přehlednější, například $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s běžnými operacemi je vektorový prostor nad \mathbb{Q} . Skutečně, číslo $a + b\sqrt{2}$ lze chápat jako dvojici $(a, b)^T \in \mathbb{Q}^2$. Není ale na první pohled patrné, že každá dvojice odpovídá právě jednomu číslu, důkaz je přenechán jako cvičení.

Vlastnosti těchto vektorových prostorů, jako například dimenze, jsou důležité například v již zmíněných problémech kvadratury kruhu, trisekce úhlu, zdvojení krychle a „neřešitelnosti“ rovnic pátého stupně.

- Množina všech funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} tvoří spolu s přirozenými operacemi vektorový prostor nad \mathbb{R} . Podobnými příklady jsou množina všech spojitých funkcí na \mathbb{R} , množina diferencovatelných funkcí, množina polynomiálních funkcí, nebo třeba množina spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$.

Toto jsou důležité příklady vektorových prostorů, kterými se budete dále zabývat hlavně v jiných předmětech (například funkcionální analýze). My se budeme soustředit hlavně na tzv. prostory konečné dimenze.

5.1.2. *Jednoduché vlastnosti.* Formulujeme některé vlastnosti všech vektorových prostorů. Dokazují se podobně jako příslušné vlastnosti pro tělesa v tvrzení 3.3, proto důkaz přenecháme jako cvičení.

Tvrzení 5.4. V každém vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} platí

- (1) nulový vektor \mathbf{o} je určen jednoznačně,

- (2) rovnice $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ má pro pevná $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ právě jedno řešení, speciálně, opačný vektor \mathbf{v} je vektorem \mathbf{v} určen jednoznačně,
- (3) $0\mathbf{v} = \mathbf{o}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in V$,
- (4) $a\mathbf{o} = \mathbf{o}$ pro libovolný skalár $a \in T$,
- (5) je-li $a\mathbf{v} = \mathbf{o}$, pak buď $a = 0$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$,
- (6) $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in V$, speciálně $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$,

Axiomy vektorového prostoru i uvedené jednoduché důsledky budeme používat zcela automaticky. Je dobré si při prvním čtení důkazů v této kapitole podrobně rozmyslet všechny kroky a použité axiomy.

5.2. Podprostory.

Prvním pojmem, který budeme pro vektorové prostory studovat, je *podprostor*.

Definice 5.5. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad \mathbf{T} . Vektorový prostor \mathbf{U} nad \mathbf{T} je *podprostorem* \mathbf{V} , pokud $U \subseteq V$ a operace $+$ a \cdot v \mathbf{U} se shodují s příslušnými operacemi ve \mathbf{V} . Skutečnost, že \mathbf{U} je podprostorem \mathbf{V} zapisujeme $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$.

Protože operace v podprostoru \mathbf{U} jsou určené původními operacemi ve \mathbf{V} nemusíme je uvádět a stačí říkat, že množina U tvoří podprostor prostoru \mathbf{V} . K tomu aby U byl podprostor \mathbf{V} , musí být U neprázdná množina uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem. Naopak, pokud U splňuje tyto podmínky, pak U spolu s příslušnými operacemi tvoří podprostor.

Tvrzení 5.6. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad \mathbf{T} . Neprázdná podmnožina U množiny V je podprostorem \mathbf{V} právě tehdy, když

- („uzavřenost na sčítání“) pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ platí $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ a
- („uzavřenost na násobení skalárem“) pro libovolné $\mathbf{v} \in U$ a $a \in T$ platí $a\mathbf{v} \in U$.

Důkaz. Pokud $U \leq \mathbf{V}$, pak U musí být zřejmě uzavřená na sčítání a násobení skalárem.

Předpokládejme, že U je neprázdná množina uzavřená na sčítání a násobení skalárem. Pak opačný vektor k $\mathbf{u} \in U$ je v U , protože $-\mathbf{u}$ lze napsat jako $(-1) \cdot \mathbf{u}$. Rovněž nulový vektor vektorového prostoru \mathbf{V} je prvkem U , protože U je neprázdná a platí $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$. Všechny axiomy nyní vyplývají z toho, že jsou splněny ve \mathbf{V} . \square

Množina tvořená pouze prvkem \mathbf{o} je vždy podprostorem, rovněž celý prostor \mathbf{V} je podprostorem \mathbf{V} . Těmto podprostorům říkáme *triviální*, ostatní podprostory nazýváme *netriviální* nebo *vlastní*. Zdůrazněme pozorování z důkazu předchozího tvrzení — nulový vektor je obsažen v každém podprostoru.

5.2.1. *Podprostory* \mathbb{R}^n . Uvažujme podprostor $U \leq \mathbb{R}^2$. Pokud U obsahuje nenulový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, pak musí obsahovat všechny jeho násobky: $\{t\mathbf{x} : t \in \mathbb{R}\} \subseteq U$. Geometricky tvoří tyto násobky přímku procházející bodem \mathbf{x} a počátkem. Pokud U obsahuje ještě jiný nenulový vektor \mathbf{y} , který neleží na přímce $\{t\mathbf{x} : t \in \mathbb{R}\}$, pak opět obsahuje všechny jeho násobky, a z toho již geometricky nahlédneme, že $U = \mathbb{R}^2$, protože každý vektor z \mathbb{R}^2 je součtem nějakého vektoru na přímce $\{t\mathbf{x} : t \in \mathbb{R}\}$ a nějakého vektoru na přímce $\{t\mathbf{y} : t \in \mathbb{R}\}$.

OBRÁZEK

Formální důkaz tohoto tvrzení přenecháme jako cvičení, později budeme podobné věci umět dokazovat snadno a rychle pomocí pojmu báze.

Ukázali jsme, že kromě triviálních podprostorů $\{(0,0)^T\}$ a \mathbb{R}^2 jsou jedinými kandidáty na podprostory \mathbb{R}^2 množiny tvaru $\{t\mathbf{x} : t \in \mathbb{R}\}$. Snadno ověříme, že pro libovolný vektor $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ je tato množina uzavřená na sčítání a násobení skalárem. Podprostory \mathbb{R}^2 jsou tedy $\{\mathbf{o}\}$, přímky procházející počátkem a celý prostor \mathbb{R}^2 .

Podobnou úvahou nalezneme všechny podprostory \mathbb{R}^3 . Pokud $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in U$, pak U obsahuje celou přímku $\{t\mathbf{x} : t \in \mathbb{R}\}$. Pokud U obsahuje ještě jiný vektor \mathbf{y} , pak $\{t\mathbf{y} : t \in \mathbb{R}\} \subseteq U$ a pak obsahuje celou rovinu určenou \mathbf{x}, \mathbf{y} a počátkem, což je rovina

$$\{s\mathbf{x} + t\mathbf{y} : s, t \in \mathbb{R}\} .$$

Obsahuje-li U ještě nějaký jiný vektor, pak $U = \mathbb{R}^3$. Podprostory \mathbb{R}^3 jsou tedy triviální podprostory, přímky procházející počátkem a roviny procházející počátkem.

I když vizuální představa prostoru \mathbb{R}^n pro $n > 3$ chybí, intuice stále je, že podprostory jsou rovné útvary procházející počátkem.

5.2.2. Podprostory \mathbf{T}^n . Nad jinými tělesy již nemáme tak dobrou vizuální představu aritmetického prostoru, ale stále můžeme podobné úvahy jako výše provádět algebraicky. Tak například stále platí (viz cvičení), že podprostory \mathbf{T}^2 jsou triviální podprostory a „přímky“ procházející počátkem, tj. množiny tvaru $\{t\mathbf{x} : t \in T\}$, kde $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in T^2$.

OBRAZEK přímky v Z_5^2

S podprostory \mathbb{R}^n jsme se již setkali při řešení homogenních soustav rovnic. Vlastnosti (p1), (p2) z věty 2.14 vlastně přesně říkají, že množina všech řešení homogenní soustavy rovnic nad \mathbb{R} s maticí A typu $m \times n$ je podprostorem \mathbb{R}^n . Tento podprostor zobecníme na případ libovolného tělesa.

Definice 5.7. Nechť A je matice nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$. Pak množinu všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí A nazýváme *jádro matice A* a značíme $\text{Ker } A$, tzn.

$$\text{Ker } A = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\} .$$

Tvrzení 5.8. Pro libovolnou matici A nad \mathbf{T} typu $m \times n$ platí $\text{Ker } A \leq \mathbf{T}^n$.

Důkaz. Podle tvrzení 5.6 stačí ověřit, že množina $\text{Ker } A$ je neprázdná a uzavřená na sčítání a násobení skalárem.

$\text{Ker } A$ obsahuje nulový vektor, takže je neprázdná.

Pokud $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Ker } A$, pak podle definice $\text{Ker } A$ je $A\mathbf{u} = \mathbf{o} = A\mathbf{v}$. Z distributivity násobení matic nyní dostaneme $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Ker } A$.

Pokud $\mathbf{u} \in \text{Ker } A$ a $a \in T$, pak $A(a\mathbf{u}) = a(A\mathbf{u}) = a\mathbf{o} = \mathbf{o}$, tedy $a\mathbf{u} \in \text{Ker } A$. \square

Geometricky je $\text{Ker } A$ vzorem nulového vektoru při zobrazení f_A . Vzor jiného vektoru (neboli množina řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$) podprostor netvoří, viz cvičení. Tato množina je sice rovný útvar, ale neprochází počátkem. Takovým množinám budeme později říkat afinní podprostory \mathbf{T}^n .

5.2.3. Další příklady podprostorů. Množina spojitých funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} je podprostorem vektorového prostoru všech funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} , protože množina spojitých funkcí je uzavřená na operace sčítání a násobení reálným číslem. Podobně, prostor diferencovatelných funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} je podprostorem prostoru spojitých funkcí. Množina

reálných čísel je podprostorem prostoru komplexních čísel, kde obě tělesa chápeme jako vektorové prostory nad \mathbb{Q} .

5.2.4. *Lineární kombinace, podprostor generovaný množinou, množina generátorů.* Už několikrát jsme potkali množiny vektorů typu $t\mathbf{u} + s\mathbf{v} + \dots$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$ jsou nějaké vektory. Naposledy při popisu podprostorů \mathbb{R}^3 . Takovým výrazům se říká lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$. Již jsme tento pojem definovali pro matice (tedy např. i pro aritmetické vektory) v definici 4.13.

Definice 5.9. Jsou-li $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektory z vektorového prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} a t_1, t_2, \dots, t_k prvky \mathbf{T} , pak součet

$$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\mathbf{v}_k$$

se nazývá *lineární kombinace vektorů* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$. Skaláry t_1, t_2, \dots, t_k nazýváme *koefficienty lineární kombinace*.

Lineární kombinaci prázdného systému vektorů definujeme jako nulový vektor.

Zdůrazněme, že v lineární kombinaci máme vždy konečný počet vektorů.

Příklad 5.10. Lineární kombinaci vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} s koefficienty 2,3, tj. vektor $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$, je vlastně „vektor o souřadnicích (2, 3) vzhledem k soustavě souřadnic \mathbf{u}, \mathbf{v} “. Přesný význam dáme této větě později, ale smysl je snad zřejmý z obrázku.

OBRAZEK - lineární kombinace $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

Lineární kombinace se vyskytují v popisu podprostorů, například množina $\{t\mathbf{x} + s\mathbf{y} : s, t \in \mathbf{T}\}$ je množinou všech lineárních kombinací vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} . Obecně definujeme *lineární obal množiny* X jako množinu všech lineárních kombinací prvků X . Tato množina tvoří vždy podprostor.

Definice 5.11. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad \mathbf{T} a $X \subseteq \mathbf{V}$. Pak *lineárním obalem množiny* X rozumíme množinu $\langle X \rangle$ všech lineárních kombinací prvků X , tj. množinu

$$\langle X \rangle = \left\{ t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\mathbf{v}_k : k \in \mathbb{N}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in X, t_1, \dots, t_k \in \mathbf{T} \right\}$$

Geometricky, lineární obal je „rovinný útvar procházející počátkem“ obsahující dané vektory.

Příklad 5.12. $\langle \emptyset \rangle = \{\mathbf{o}\}$ – lineární obal prázdné množiny je triviální prostor tvořený nulovým vektorem.

Příklad 5.13. V prostoru \mathbb{R}^3 máme

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 9 \\ 12 \\ 15 \end{array} \right) \right\rangle &= \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right) \right\rangle = \\ &= \left\{ s \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) + t \left(\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Inkluze \subseteq v první rovnosti plyne z toho, že každou lineární kombinaci vektorů $(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T, (9, 12, 15)^T$ lze psát jako lineární kombinace vektorů $(1, 2, 3)^T,$

$(4, 5, 6)^T$, protože vektor $(9, 12, 15)^T$ lze napsat jako lineární kombinaci prvních dvou vektorů:

$$\begin{aligned} t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} &= \\ &= t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \\ &= (t_1 + t_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (t_2 + 2t_3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Geometricky, lineární obal daných tří vektorů je rovina procházející počátkem, třetí vektor leží v rovině určené prvními dvěma vektory.

V zápisech lineární kombinace množiny vektorů dané výčtem jako výše vynecháváme pro přehlednost závorky $\{, \}$ označující množinu. Někdy říkáme „lineární obal vektorů ...“, místo formálně přesného „lineární obal množiny vektorů $\{\dots\}$ “.

Tvrzení 5.14. *Pro libovolný vektorový prostor \mathbf{V} nad \mathbf{T} a libovolnou $X \subseteq V$ je $\langle X \rangle$ podprostorem \mathbf{V} .*

Důkaz. Je třeba ověřit, že $\langle X \rangle$ je neprázdná množina uzavřená na sčítání a násobení libovolným $r \in T$.

Předně $\langle X \rangle$ je neprázdná, protože obsahuje lineární kombinaci prázdné množiny, tj. vektor \mathbf{o} .

Součet lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in X$ s koeficienty $s_1, s_2, \dots, s_k \in T$ a lineární kombinace vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l \in X$ s koeficienty t_1, t_2, \dots, t_l je lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \in X$ s koeficienty $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_l$.

Konečně, r -násobkem lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in X$ s koeficienty s_1, s_2, \dots, s_k je lineární kombinace stejných vektorů s koeficienty rs_1, rs_2, \dots, rs_k . \square

Obsahuje-li podprostor $U \leq \mathbf{V}$ množinu X , pak, díky uzavřenosti na sčítání a násobení skalárem, obsahuje i všechny lineární kombinace prvků X . To znamená, že $\langle X \rangle$ je „nejmenší“ podprostor, který obsahuje X . (Slovo nejmenší je zde třeba chápat vzhledem k inkluzi, tj. tak, že jakýkoliv podprostor obsahující X obsahuje $\langle X \rangle$.) Proto se rovněž hovoří o podprostoru generovaném X .

Definice 5.15. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad \mathbf{T} a $X \subseteq V$. Pokud $\langle X \rangle = V$, pak říkáme, že X je *množina generátorů prostoru \mathbf{V}* , nebo říkáme, že X *generuje \mathbf{V}* .

Jinými slovy, množina $X \subseteq V$ generuje \mathbf{V} , pokud každý vektor ve V lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů z X .

Příklad 5.16. Prázdná množina generuje triviální prostor $\{\mathbf{o}\}$.

Množina $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ generuje pro libovolné \mathbf{T} prostor \mathbf{T}^2 , protože každý vektor $(x_1, x_2)^T$ v T^2 lze napsat jako lineární kombinaci vektorů $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ takto:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy také libovolná množina obsahující vektory $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ je množinou generátorů \mathbf{T} .

Množina $\{(1, 2, 3)^T\}$ generuje podprostor $\mathbf{V} = \langle (1, 2, 3)^T \rangle$ vektorového prostoru \mathbb{R}^3 . Jiné množiny generátorů stejného prostoru \mathbf{V} jsou například $\{(2, 4, 6)^T\}$, $\{(2, 4, 6)^T, (3, 6, 9)^T\}$, V . Množina $\{(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T\}$ není množinou generátorů \mathbf{V} , protože není ani jeho podmnožinou.

Množina $\{1, x, x^2\}$ je množinu generátorů prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 2.

Příklad 5.17. V části 5.2.1 jsme si geometricky zdůvodnili, že pro každý netriviální podprostor \mathbb{R}^3 existuje množina generátorů, která má jeden, nebo dva prvky.

Příklad 5.18. Definujeme \mathbb{R}^ω jako prostor všech posloupností reálných čísel s operacemi prováděnými po složkách, podobně jako s aritmetickými vektory. Množina

$$X = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots), \dots\}$$

negeneruje prostor \mathbb{R}^ω . Jako cvičení zjistěte lineární obal této množiny.

Zajímavým podprostorem \mathbb{R}^ω je například množina Y všech posloupností (a_1, a_2, \dots) splňujících $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$. Mezi prvky tohoto podprostoru patří Fibonacciho posloupnost.

Následující tvrzení budeme mlčky používat při práci s lineárním obalem konečné množiny nebo posloupnosti prvků.

Tvrzení 5.19. *Je-li $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l)$ posloupnosti prvků vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} , pak*

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle = \{t_1 \mathbf{v}_1 + \dots + t_l \mathbf{v}_l : t_1, \dots, t_l \in T\} .$$

Důkaz. Inkluze „ \supseteq “ plyne triviálně z definice lineárního obalu.

Naopak, je-li $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$, pak $\mathbf{u} = s_1 \mathbf{u}_1 + \dots + s_k \mathbf{u}_k$, kde každý z vektorů \mathbf{u}_i leží v množině $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$. V součtu $s_1 \mathbf{u}_1 + \dots + s_k \mathbf{u}_k$ seskupíme sčítance podle vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ a užitím (vD1) nahradíme jediným sčítancem tvaru $t_j \mathbf{v}_j$. Nakonec pro chybějící \mathbf{v}_j přidáme sčítanec $0\mathbf{v}_j$. Tím získáme vyjádření $\mathbf{u} = t_1 \mathbf{v}_1 + \dots + t_l \mathbf{v}_l$. \square

5.2.5. *Sloupcový a řádkový prostor matice.* Ke každé matici máme přirozeně přiřazeny dvě skupiny aritmetických vektorů, řádkové a sloupcové. Prostorům, které generují, říkáme řádkový a sloupcový prostor.

Definice 5.20. Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$. *Sloupcovým prostorem matice* A rozumíme podprostor \mathbf{T}^m generovaný sloupci matice a značíme jej $\text{Im } A$.

$$\text{Im } A = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle \leq \mathbf{T}^m$$

Řádkovým prostorem matice A rozumíme sloupcový prostor matice A^T , tj.

$$\text{Im } A^T = \langle \tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_m \rangle \leq \mathbf{T}^n$$

Příklad 5.21. Pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

je

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} A &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \operatorname{Im} A^T &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.\end{aligned}$$

Jak poznáme, že vektor $\mathbf{b} \in T^m$ leží v $\operatorname{Im} A$? Stačí si připomenout, že $A\mathbf{x}$ je lineární kombinace sloupců matice A , kde koeficienty jsou složky vektoru \mathbf{x} . Takže $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} A$ právě když rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení, přičemž koeficienty lineární kombinace jsou složky libovolného řešení. Také vidíme, že $\operatorname{Im} A$ je obraz (obor hodnot) zobrazení f_A , což ospravedlňuje zavedené značení $\operatorname{Im} A$:

$$\operatorname{Im} A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in T^m\} = \{f_A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in T^m\} = f_A(T^m).$$

Příklad 5.22. Pro matici A z předchozího příkladu zjistíme, zda $(0, 1)^T \in \operatorname{Im} A$ a $(1, 0)^T \in \operatorname{Im} A$. Protože máme dvě soustavy rovnic se stejnou maticí, můžeme je řešit najednou.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Pro pravou stranu $(1, 0)^T$ dostaneme volbou 0 za volnou proměnnou řešení $\mathbf{x} = (7, -2, 0)^T$, což dává vyjádření

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Koeficienty nejsou určeny jednoznačně, například volbou 2 za volnou proměnnou dostaneme $\mathbf{x} = (-55, 16, 2)^T$, což odpovídá vyjádření

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -55 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 16 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pro vektor $(0, 1)^T$ dostaneme například vyjádření

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tím jsme ukázali, že oba vektory $(1, 0)^T, (0, 1)^T$ patří do $\operatorname{Im} A$, tím pádem $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^2$, protože z příkladu 5.16 víme, že $\langle (1, 0)^T, (0, 1)^T \rangle = \mathbb{R}^2$.

Leží vektor $(2, 1, 1)^T$ v prostoru $\operatorname{Im} A^T$?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -9 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -52 \end{array} \right)$$

Soustava nemá řešení, takže vektor $(2, 1, 1)^T$ v $\operatorname{Im} A^T$ neleží.

5.2.6. Prostory přidružené k matici a elementární úpravy. Důležitým pozorováním je, že řádkové elementární úpravy nemění lineární obal řádků (tj. prostor $\operatorname{Im} A^T$). Obecněji, násobení zleva regulární maticí nemění $\operatorname{Im} A^T$ a násobení zprava nemění $\operatorname{Im} A$. Násobení zleva obecně mění $\operatorname{Im} A$ tak, že sloupcový prostor vzniklé matice je lineární obal R -násobků původních sloupců.

Dalším prostorem přidruženým k matici A je $\operatorname{Ker} A$. Ten se řádkovými úpravami (nebo násobením zleva regulární maticí) rovněž nemění. To již vlastně víme: $\operatorname{Ker} A$

je množina řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, ta se nemění provedením elementární úpravy. Maticově, $\text{Ker}(EA) = \text{Ker} A$ pro každou elementární matici E . Protože však každá regulární matice R je součinem elementárních matic, máme $\text{Ker}(RA) = \text{Ker} A$. V důkazu následujícího tvrzení zvolíme rychlejší postup.

Tvrzení 5.23. *Nechť $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$ a R je regulární matice řádu m . Pak*

$$\text{Ker} A = \text{Ker}(RA), \quad \text{Im} A^T = \text{Im}(RA)^T, \quad \text{Im}(RA) = \langle R\mathbf{a}_1, R\mathbf{a}_2, \dots, R\mathbf{a}_n \rangle.$$

Důkaz. Třetí část je důsledkem tvrzení o násobení matic vnímaném jako tvoření lineárních kombinací (tvrzení 4.14).

Je-li $\mathbf{x} \in \text{Ker} A$, pak $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Vynásobením R zleva získáme $RA\mathbf{x} = R\mathbf{o} = \mathbf{o}$, čili $\mathbf{x} \in \text{Ker}(RA)$. Naopak, je-li $\mathbf{x} \in \text{Ker}(RA)$, pak $RA\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Protože R je regulární, máme $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ (použijeme například bod (4) charakterizace regulárních matic z věty 4.30), ekvivalentně $\mathbf{x} \in \text{Ker} A$.

K důkazu druhé rovnosti si opět uvědomíme, že násobení matice A zleva maticí R odpovídá provádění lineárních kombinací na řádky matice A . Proto každý řádek matice RA je lineární kombinací řádků matice A , takže $\text{Im}(RA)^T \subseteq \text{Im} A^T$. Stejnou úvahou, kde místo A uvažujeme matici RA a místo R uvažujeme R^{-1} získáme $\text{Im}(R^{-1}RA)^T \subseteq \text{Im}(RA)^T$, což je po úpravě druhá inkluze. \square

Pro sloupcové úpravy máme obdobně například $\text{Im} A = \text{Im}(AR)$, pokud R je regulární matice řádu n . Důkaz můžeme provést buď užitím sloupcových úprav místo řádkových, nebo přechodem k transponované matici: Použitím předchozí věty pro A^T místo A a R^T místo R dostaneme $\text{Im}(A^T)^T = \text{Im}(R^T A^T)^T$, což je po úpravě dokazovaný vztah.

Důsledek 5.24. *Elementární řádkové úpravy nemění $\text{Ker} A$ a $\text{Im} A^T$. Elementární sloupcové úpravy nemění $\text{Ker} A^T$ a $\text{Im} A$.*

5.3. Lineární závislost a nezávislost.

5.3.1. *Definice.* Množina aritmetických vektorů $(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T, (9, 12, 15)^T$ generuje ten samý podprostor $\mathbf{V} \leq \mathbb{R}^3$ jako množina $(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T$, jak jsme viděli v příkladu 5.13. Důvod je ten, že třetí vektor lze napsat jako lineární kombinaci prvních dvou vektorů. Množinám vektorů, ve které žádné takové lineární závislosti nelze najít říkáme *lineárně nezávislé*. Z technických důvodů definujeme lineární (ne)závislost pro posloupnosti vektorů, nikoliv množiny.

Definice 5.25. *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor. Posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ ve \mathbf{V} se nazývá *lineárně závislá*, pokud některý z vektorů \mathbf{v}_i je lineární kombinací ostatních vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k$.*

V opačném případě říkáme, že posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je *lineárně nezávislá*.

(Lineární (ne)závislost definujeme i pro nekonečné skupiny vektorů, to ale necháme do samostatného oddílu.)

Užitím pojmu lineárního obalu můžeme definici přeformulovat tak, že posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně závislá, pokud existuje $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tak, že

$$\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k \rangle,$$

ekvivalentně

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k \rangle.$$

Geometricky to znamená, že \mathbf{v}_i leží v „rovném útvaru“ určeném zbylými vektory.

Naopak, posloupnost je lineárně nezávislá, když žádné takové i neexistuje, jinými slovy, když každý vektor \mathbf{v}_i „něco přidá“ k lineárnímu obalu zbylých vektorů.

Někdy se používá nepřesná formulace typu „vektory ... jsou lineárně nezávislé“, apod. Uvědomte si, že lineární (ne)závislost není vlastnost vektorů ale jejich posloupností. Takže takovou formulaci je potřeba vždy přeložit jako „posloupnost vektorů ... je lineárně nezávislá“.

Příklad 5.26. Posloupnost $((1, 2, 3)^T, (9, 12, 15)^T, (4, 5, 6)^T)$ ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 je lineárně závislá, protože druhý vektor lze napsat jako lineární kombinaci zbylých dvou:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Geometricky to znamená, že vektor $(9, 12, 15)^T$ leží v rovině určené zbylými dvěma vektory.

Posloupnost vektorů $(1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T$ v prostoru \mathbb{Z}_3^4 je lineárně nezávislá, protože, žádný z vektorů není lineární kombinací ostatních: lineární obal druhého až čtvrtého vektoru je množina $\{(0, a, b, c)^T : a, b, c \in \mathbb{Z}_3\}$, do níž vektor $(1, 0, 0, 0)^T$ nepatří. Podobně pro ostatní vektory.

Posloupnost vektorů $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v})$ v libovolném vektorovém prostoru je vždy lineárně závislá.

Posloupnost vektorů $(\cos x \sin x + 5, 1, \sin(2x) + 3)$ v prostoru reálných funkcí reálné proměnné (nad \mathbb{R}) je lineárně závislá, protože $\sin(2x) + 3$ lze napsat jako $2 \cdot (\cos x \sin x + 5) + (-7) \cdot 1$.

Několik snadných obecných pozorování:

- Kdykoliv posloupnost obsahuje nulový vektor, je lineárně závislá, protože nulový vektor je lineární kombinací prázdné skupiny vektorů.
- Jednočlenná posloupnost (\mathbf{v}) je lineárně nezávislá právě tehdy, když $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$.
- Kdykoliv posloupnost obsahuje dva stejné vektory, je lineárně závislá. Obecněji, pokud je některý z vektorů násobkem jiného, je posloupnost lineárně závislá. **Neplatí to ale naopak.** V posloupnosti $((1, 2, 3)^T, (9, 12, 15)^T, (4, 5, 6)^T)$ z předchozího příkladu není žádný z vektorů násobkem jiného, přesto je posloupnost lineárně závislá.
- Lineární závislost nebo nezávislost posloupnosti nezávisí na pořadí prvků.
- Podposloupnost lineárně nezávislé posloupnosti je lineárně nezávislá. Jinak řešeno, pokud je podposloupnost lineárně závislá, je lineárně závislá i původní posloupnost.

Pokud bychom ověřovali, že nějaká posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá, z definice, museli bychom pro každý z vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ ukázat, že nelze vyjádřit jako lineární kombinace ostatních. Snazší je použít bod (2) nebo (3) z následujícího pozorování, které dává elegantnější charakterizaci lineární nezávislosti.

Tvrzení 5.27. *Nechť $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je posloupnost vektorů ve vektorovém prostoru V nad tělesem T . Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá.*
- (2) *Žádný z vektorů \mathbf{v}_i ($1 \leq i \leq k$) nelze vyjádřit jako lineární kombinací množiny $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}\}$ předchozích vektorů.*

(3) Vektor \mathbf{o} lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ pouze triviálním způsobem $\mathbf{o} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_k$.

Jinými slovy, pro libovolné $a_1, a_2, \dots, a_k \in T$ platí, že když

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o} ,$$

pak $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

(4) Každý vektor $\mathbf{b} \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ nejvýše jedním způsobem.

Důkaz. (1) \Rightarrow (2) je zřejmé.

(2) \Rightarrow (3). Pokud platí

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}$$

a jedno z čísel a_1, a_2, \dots, a_k je nenulové, zvolíme největší takové i , aby $a_i \neq 0$. Pak můžeme upravit

$$a_i\mathbf{v}_i = -a_1\mathbf{v}_1 - \dots - a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}$$

a

$$\mathbf{v}_i = -a_i^{-1}a_1\mathbf{v}_1 - \dots - a_i^{-1}a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} ,$$

z čehož vidíme, že podmínka (2) není splněna.

(3) \Rightarrow (4). Pokud máme dvě vyjádření vektoru \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_k\mathbf{v}_k ,$$

pak úpravou získáme rovnost

$$\mathbf{o} = (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (a_k - b_k)\mathbf{v}_k ,$$

takže z (2) dostáváme, že $a_i - b_i = 0$ pro každé i , neboli $a_i = b_i$ a tedy vyjádření vektoru \mathbf{u} jsou stejná.

(4) \Rightarrow (3) je triviální.

(3) \Rightarrow (1). Pokud je posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ lineárně závislá, pak pro nějaké i je vektor \mathbf{v}_i lineární kombinací ostatních, tedy

$$\mathbf{v}_i = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + b_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \dots + b_k\mathbf{v}_k .$$

Pak můžeme psát

$$\mathbf{o} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + (-1)\mathbf{v}_i + b_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \dots + b_k\mathbf{v}_k ,$$

takže dostáváme netriviální kombinaci, která dává nulový vektor s koeficienty $a_i = -1$ a $a_j = b_j$ pro $j \neq i$. \square

Bod (3) lze formulovat tak, že posloupnost je lineárně závislá právě tehdy, když existuje její *netriviální* lineární kombinace, která dá nulový vektor. Netriviální znamená, že alespoň jeden koeficient je nenulový. Ještě jedna ekvivalentní formulace je ve cvičeních: Posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá právě tehdy, když žádný z vektorů není v lineárním obalu předchozích (tj. pro každé i platí $\mathbf{v}_i \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle$).

Připomeňme, že vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ generují \mathbf{V} , pokud se každý vektor dá napsat jako lineární kombinace těchto vektorů alespoň jedním způsobem. Bod (4) ukazuje, že lineární nezávislost je jakýmsi opakem.

Příklad 5.28. Zjistíme, zda je posloupnost vektorů

$$((1, 1, 1, 1)^T, (1, 2, 1, 1)^T, (0, 1, 0, 1)^T)$$

v prostoru \mathbb{Z}_3^4 lineárně nezávislá. Pokusíme se vyjádřit nulový vektor jako lineární kombinaci vektorů z dané posloupnosti

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

To je vlastně homogenní soustava rovnic!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustavu převedeme do odstupňovaného tvaru. Pravé strany psát nebudeme, protože je soustava homogenní.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nemáme žádnou volnou proměnnou, takže soustava má pouze triviální řešení $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$. Jediná lineární kombinace daných vektorů, která dává nulový vektor je triviální, takže posloupnost je podle předchozího tvrzení lineárně nezávislá.

Tento příklad nám dává návod, jak zjistit, zda daná posloupnost aritmetických vektorů je lineárně (ne)závislá. Formulujeme učiněné pozorování jako tvrzení.

Tvrzení 5.29. *Sloupce matice A typu $m \times n$ nad \mathbf{T} tvoří lineárně nezávislou posloupnost v \mathbf{T}^m právě tehdy, když $\text{Ker } A = \{\mathbf{o}\}$, tj. rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má jen triviální řešení $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.*

Důkaz. Podle stále používaného tvrzení o vnímání násobení matic jako lineárního kombinování máme $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$, kde $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Tvrzení nyní okamžitě plyne z charakterizace v tvrzení 5.27. \square

Příklad 5.30. Posloupnost $(3i + 5, 2, 3), (5, 2 + i, 1), (4, 2, 12), (\pi, e^\pi, 4)$ v prostoru \mathbb{C}^3 je lineárně závislá.

Můžeme argumentovat užitím předchozího tvrzení. Dané aritmetické vektory si napíšeme do sloupců matice A typu 3×4 . Při řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ máme díky typu alespoň jednu volnou proměnnou (protože proměnné jsou 4 a pivotů může být nejvíce tolik, kolik řádků, tedy 3). Z toho plyne, že soustava má netriviální řešení (stačí za volnou proměnnou dosadit například 1 a dopočítat zpětnou substitucí).

Později budeme moci argumentovat obecnějším tvrzením.

Na tomto místě si znovu uvědomme, že aritmetické prostory tvoří jen jeden z mnoha příkladů vektorových prostorů. (I když jsme v úvodu tvrdili, že jsou „v podstatě jediné“. Uvozovky jsou zde podstatné, na přesný význam si musíme ještě chvíli počkat.) Častá chybná odpověď studentů na otázku, jak určit, zda jsou dané

vektory lineárně závislé, je typu „Napišeme si je do sloupců, vyliminujeme a zjistíme, zda existují volné proměnné“. Odpověď je správná jen v aritmetických vektorových prostorech, obecně nedává žádný smysl: Jak napsat do sloupců vektory $\cos(2x)$, $\sin x + e^x, \dots$ z vektorového prostoru spojitých funkcí?

Příklad 5.31. Posloupnost $(1, \sqrt{2})$ je lineárně nezávislá v \mathbb{R} jako vektorovém prostoru nad \mathbb{Q} , protože $\sqrt{2}$ je iracionální. Stejná posloupnost je lineárně závislá v \mathbb{R} jako vektorovém prostoru nad \mathbb{R} , protože např. $\sqrt{2}$ je $\sqrt{2}$ -násobkem vektoru 1.

5.3.2. *Odstupňovaný tvar a elementární úpravy.* Jinou možností jak zjistit, zda jsou dané aritmetické vektory lineárně (ne)závislé je napsat je do řádků matice a elementárními řádkovými úpravami převádět matici do odstupňovaného tvaru. Tyto úpravy totiž nemění lineární (ne)závislost řádků a z odstupňovaného tvaru matice poznáme (ne)závislost řádků snadno. Výhodou také je, že řádkové úpravy nemění ani lineární obal řádků, což se nám bude později hodit při hledání báze.

Rovnou si také všimneme, že řádkové úpravy nemění ani lineární (ne)závislost sloupců. Tvrzení nejprve formulujeme pro sloupce. Řádkovou verzi dostaneme transponováním.

Tvrzení 5.32. *Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$, R je regulární matice řádu m a Q je regulární matice řádu n . Pak platí:*

- (1) *Sloupce matice A jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé sloupce matice AQ*
- (2) *Sloupce matice A jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé sloupce matice RA .*

Důkaz. Použijeme pozorování formulované jako tvrzení 5.29, totiž, že sloupce matice B jsou lineárně nezávislé, právě tehdy, když $B\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení.

Předpokládejme, že sloupce matice A jsou lineárně nezávislé a že \mathbf{x} je řešením $AQ\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Pak $Q\mathbf{x} = \mathbf{o}$, protože sloupce A jsou lineárně nezávislé. Z toho plyne, že $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ (použijeme například bod (4) charakterizace regulárních matic z věty 4.30, nebo bod (7) a vynásobíme rovnost zleva Q^{-1}). Ukázali jsme, že soustava $AQ\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení, takže AQ má lineárně nezávislé sloupce.

Opačná implikace se dá dokázat užitím první implikace na matici AQ místo A a Q^{-1} místo Q .

Druhou ekvivalenci jsme již vlastně dokázali v tvrzení 5.23, protože $\text{Ker}(RA) = \text{Ker} A$, takže A má netriviální řešení právě tehdy, když má RA netriviální řešení. \square

Ekvivalence v bodu (2) jde zesílit. Matice A má stejné lineární závislosti mezi sloupci jako matice RA . Například pokud $2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - 4\mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$, pak pro matici $RA = (\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_3)$ platí $2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 - 4\mathbf{b}_3 = \mathbf{o}$, a naopak. Slovy, součet 2-násobku prvního sloupce, 3-násobku druhého sloupce a (-4) -násobku třetího sloupce je nulový vektor v matici A právě tehdy, když stejný vztah platí pro sloupce matice RA .

Důsledek 5.33. *Sloupcové úpravy nemění lineární (ne)závislost sloupců ani řádků matice. Řádkové úpravy nemění lineární (ne)závislost sloupců ani řádků matice.*

Důkaz. Z předchozího tvrzení použitého na elementární matice plyne, že řádkové ani sloupcové úpravy nemění lineární obal sloupců. K důkazu řádkových verzí použijeme stejné tvrzení pro transponovanou matici. \square

Zbývá nahlédnout, kdy má řádkově odstupňovaný tvar lineárně nezávislé řádky. (Z předchozího tvrzení a tvrzení 5.29 vidíme, kdy má matice v odstupňovaném

tvaru lineárně nezávislé sloupce: právě tehdy, když příslušná homogenní soustava nemá žádné volné proměnné, viz cvičení.) Je zřejmé, že je-li v matici nulový řádek, pak jsou řádky lineárně závislé. V opačném případě jsou již lineárně nezávislé.

Tvrzení 5.34. *Řádky matice v odstupňovaném tvaru jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když matice neobsahuje nulový řádek.*

Důkaz. Implikace zleva doprava je zřejmá.

Předpokládejme, že matice A typu $m \times n$ bez nulového řádku je v odstupňovaném tvaru a vezmeme r, k_1, \dots, k_r z definice odstupňovaného tvaru. Protože A nemá nulový řádek je $r = n$. Chceme ukázat, že rovnice $A^T \mathbf{x} = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení (viz opět tvrzení 5.29). To je však snadné, protože již rovnice s pořadovými čísly k_1, k_2, \dots, k_n určují dolní trojúhelníkovou matici s nenulovými prvky na diagonále a ta má pouze triviální řešení.

OBRAZEK □

Myšlenku důkazu můžeme zobecnit na užitečné pozorování. Máme-li posloupnost vektorů v \mathbf{T}^n takovou, že již vybraných m souřadnic tvoří lineárně nezávislou množinu v \mathbf{T}^m , pak je původní posloupnost lineárně nezávislá.

Příklad 5.35. Posloupnost

$$((1, 37, 3, 45, 1)^T, (0, -e, 1, \pi^e, 4)^T, (0, -12, 0, 33, 2)^T)$$

v prostoru \mathbb{R}^5 je lineárně nezávislá, protože první, třetí a páté složky vektorů tvoří posloupnost

$$((1, 3, 1)^T, (0, 1, 4)^T, (0, 0, 2)^T),$$

v \mathbb{R}^3 , která je lineárně nezávislá podle předchozího tvrzení.

Příklad 5.36. Podíváme se znovu na příklad 5.28, tam jsme zjišťovali, zda je posloupnost

$$((1, 1, 1, 1)^T, (1, 2, 1, 1)^T, (0, 1, 0, 1)^T)$$

v prostoru \mathbb{Z}_3^4 lineárně nezávislá. Tentokrát si vektory napíšeme do řádků a převedeme řádkovými úpravami do odstupňovaného tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Původní posloupnost je podle důsledku 5.33 lineárně nezávislá právě tehdy, když jsou řádky vzniklé matice B lineárně nezávislé. Matice B je v odstupňovaném tvaru bez nulového řádku, takže podle předchozího tvrzení jsou řádky B lineárně nezávislé. Původní posloupnost je tedy lineárně nezávislá.

Příklad 5.37. Zjistíme, zda je posloupnost vektorů

$$((1, 1, 1, 0)^T, (0, 1, 0, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T)$$

v prostoru \mathbb{Z}_2^4 lineárně nezávislá. Napíšeme si vektory do řádků a upravujeme řádkovými úpravami.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V úpravách už nemusíme pokračovat, protože vidíme, že řádky vzniklé matice, tedy i původní matice, jsou lineárně závislé.

Shrneme poznatky o invariantech řádkových úprav. Řádkové úpravy nemění lineární závislost řádků ani sloupců, lineární obal řádků (to je $\text{Im } A^T$) a $\text{Ker } A$. Obecně mění lineární obal sloupců a $\text{Ker } A^T$.

5.4. Báze.

5.4.1. *Definice.* Dostali jsme se ke stěžejnímu pojmu *báze* vektorového prostoru. Jako u lineární nezávislosti zadefinujeme konečnou verzi a obecnou definici odložíme na později.

Definice 5.38. Posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ve vektorovém prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} se nazývá *báze*, pokud je lineárně nezávislá a generuje \mathbf{V} .

(Tím, že posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ generuje \mathbf{V} přirozeně myslíme to, že množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ generuje \mathbf{V} .)

Intuice je taková, že báze je „dost malá“, ve smyslu, že mezi vektory nejsou žádné lineární závislosti, a zároveň dost velká, ve smyslu, že vektory generují celý prostor.

Daná posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ generuje prostor \mathbf{V} právě tehdy, když lze každý vektor zapsat jako jejich lineární kombinace alespoň jedním způsobem. Podle tvrzení 5.27 je posloupnost lineárně nezávislá právě tehdy, když lze každý vektor vyjádřit jako lineární kombinace $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ nejvýše jedním způsobem. Dohromady dostáváme následující důležité pozorování.

Pozorování 5.39. *Posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ tvoří bázi vektorového prostoru \mathbf{V} právě tehdy, když lze každý vektor $\mathbf{b} \in V$ vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.*

Příklad 5.40. Sloupce jednotkové matice I_n nad tělesem \mathbf{T} , tj. n -tice vektorů $((1, 0, 0, \dots, 0)^T, (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)^T)$ je bázi aritmetického vektorového prostoru \mathbf{T}^n .

Tato posloupnost je totiž lineárně nezávislá, například podle tvrzení 5.34, a generuje \mathbf{T}^n , protože každý vektor $(x_1, \dots, x_n)^T$ jde vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obě podmínky (lineární nezávislost i generování) jde najednou nahlédnout z toho, že každý vektor lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci uvedenou výše.

Báze z příkladu jsou význačné báze aritmetických prostorů, proto mají svoje pojmenování a značení.

Definice 5.41. *Kanonická báze (též standardní báze) v aritmetickém prostoru \mathbf{T}^n je posloupnost*

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Příklad 5.42. Posloupnost $((1, 1)^T, (3, 2)^T)$ je bázi prostoru \mathbb{R}^2 . Můžeme argumentovat tak, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

je regulární, takže podle charakterizační věty regulárních matic má rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení pro každé \mathbf{b} . To znamená, že každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců matice A právě jedním způsobem, což nastane podle pozorování právě tehdy, když tvoří sloupce bázi.

Obecněji lze z charakterizační věty pro regulární matice nahlédnout, že sloupce (nebo řádky) čtvercové matice řádu n tvoří bázi \mathbf{T}^n právě tehdy, když A je regulární (viz cvičení). Tedy například sloupce (řádky) horní trojúhelníkové matice s nenulovými prvky na diagonále tvoří bázi.

Příklad 5.43. Jednočlenná posloupnost $((3, 3, 3)^T)$ je báze prostoru $\langle (1, 1, 1)^T \rangle \leq \mathbb{R}^3$.

Posloupnost $(1, x, x^2)$ je báze prostoru reálných polynomů stupně nejvýše 2, protože každý polynom lze napsat právě jedním způsobem ve tvaru $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$.

Prázdná posloupnost je bázi triviálního prostoru $\{\mathbf{0}\}$.

Posloupnost $((1, 2, 3)^T, (9, 12, 15)^T, (4, 5, 6)^T)$ není bázi prostoru

$$\mathbf{V} = \langle (1, 2, 3)^T, (9, 12, 15)^T, (4, 5, 6)^T \rangle \leq \mathbb{R}^3,$$

protože je lineárně závislá podle příkladu 5.26. Posloupnost $((1, 2, 3)^T)$ je sice lineárně nezávislá, ale není bázi \mathbf{V} , protože daný prostor negeneruje (například vidíme, že $(4, 5, 6)^T$ není v lineárním obalu vektoru $(1, 2, 3)^T$). Posloupnost $((1, 2, 3)^T, (2, 1, 1)^T)$ není bázi \mathbf{V} , protože vektor $(2, 1, 1)^T$ není ani prvkem \mathbf{V} , jak jsme se přesvědčili v příkladu 5.22. Posloupnost $((1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T)$ je bázi \mathbf{V} , protože generuje \mathbf{V} (viz opět 5.26) a je lineárně nezávislá, jak se snadno přesvědčíme.

Příklad 5.44. Najdeme nějakou bázi prostoru

$$\mathbf{V} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{Z}_7^4.$$

Využijeme toho, že řádkové úpravy matice nemění lineární obal řádků (viz důsledek 5.24). Vektory tedy napíšeme do řádků a převedeme řádkovými úpravami na odstupňovaný tvar. Nenulové řádky generují stejný prostor a navíc jsou podle tvrzení 5.34 lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bázi \mathbf{V} je tedy například posloupnost $((2, 1, 3, 0)^T, (0, 0, 6, 1)^T, (0, 0, 0, 4)^T)$.

Příklad 5.45. Uvažujme prostor \mathbf{V} nekonečných posloupností (a_1, a_2, \dots) splňujících $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$, s běžnými operacemi sčítání a násobení skalárem. Prostor \mathbf{V} je podprostorem \mathbb{R}^ω mezi jehož prvky patří Fibonacciho posloupnost, viz příklad 5.18.

Příkladem báze je dvoučlenná posloupnost

$$(p_1, p_2) = ((\varphi^1, \varphi^2, \dots), ((1 - \varphi)^1, (1 - \varphi)^2, \dots)) ,$$

kde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ je hodnota zlatého řezu. Tato posloupnost je lineárně nezávislá, protože již první dvě souřadnice tvoří lineárně nezávislou posloupnost v \mathbb{R}^2 . Rovněž generuje \mathbf{V} , protože první dvě souřadnice generují \mathbb{R}^2 a prvky \mathbf{V} jsou určeny prvními dvěma souřadnicemi. Jako cvičení si rozmyslete detaily, tedy například proč oba vektory p_1, p_2 patří do \mathbf{V} .

Nyní můžeme nalézt vzorec pro n -tý člen Fibonacciho posloupnosti, protože víme, že Fibonacciho posloupnost lze vyjádřit jako lineární kombinace posloupností p_1 a p_2 , takže stačí zjistit koeficienty. Dostaneme vzorec z části 4.5.1.

5.4.2. Steinitzova věta o výměně a důsledky, dimenze. Z vizuální představy prostorů \mathbb{R}^2 je patrné, že všechny báze mají dva prvky. Méně vektorů prostor nemůže generovat a množina třech a více vektorů nemůže být lineárně nezávislá. Podobně, v \mathbb{R}^3 mají všechny báze právě tři prvky. Obecně platí, že každý vektorový prostor má bázi a všechny báze mají stejný počet prvků. Tomuto počtu říkáme dimenze. Tyto zásadní skutečnosti v této části dokážeme pro konečně generované prostory.

Definice 5.46. Vektorový prostor se nazývá *konečně generovaný*, pokud má nějakou konečnou množinu generátorů.

Jedna možnost, jak se můžeme pokusit hledat bázi vektorového prostoru je vzít nějakou posloupnost generátorů a vynechávat vektory z posloupnosti, dokud vzniklé posloupnosti stále generují daný prostor. Pokud již nemůžeme pokračovat, máme minimální posloupnost generátorů. Minimální zde znamená, že vynecháním libovolného vektoru vznikne posloupnost, která prostor negeneruje. Následující tvrzení říká, že v tomto případě již máme bázi.

Tvrzení 5.47. *Minimální posloupnost generátorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ vektorového prostoru \mathbf{V} je báze \mathbf{V} .*

Důkaz. Podle poznámek za definicí 5.25 je posloupnost lineárně závislá právě tehdy, když

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

pro nějaké $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. To se ale nestane, protože předpokládáme, že máme minimální posloupnost generátorů. Posloupnost je tedy lineárně nezávislá, takže je to báze. \square

Důsledek 5.48. *Z každé konečné množiny generátorů vektorového prostoru lze vybrat bázi.*

Důkaz. Postupně vynecháváme vektory dokud nevznikne minimální množina generátorů. Množinu seřadíme do posloupnosti a ta je podle tvrzení báze. \square

Obecně z každé (ne nutně konečné) množiny generátorů konečně generovaného prostoru jde vybrat bázi. Myšlenka je, že nejprve vybereme konečnou množinu generátorů a pak použijeme předchozí výsledek. Detaily si rozmyslete jako cvičení.

Speciálně dostáváme důležitý důsledek:

Důsledek 5.49. *Každý konečně generovaný vektorový prostor má bázi.*

Příklad 5.50. Podíváme znovu na příklad prostoru $\mathbf{V} = \langle X \rangle \leq \mathbb{R}^3$, kde $X = \{(1, 2, 3)^T, (9, 12, 15)^T, (4, 5, 6)^T\}$. Množina generátorů X není minimální, protože např. vektor $(9, 12, 15)^T$ lze vynechat (viz příklad 5.26). Množina $Y = \{(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T\}$ je minimální množina generátorů, protože, jak je vidět, vynecháním kteréhokoliv ze dvou vektorů vznikne podprostor, který neobsahuje druhý z vektorů. Takže posloupnost $((1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T)$ musí být báze podle tvrzení 5.47, což skutečně je.

K důkazu dalších zásadních skutečností se nám bude hodit tzv. Steinitzova věta o výměně. Ta říká, že pro libovolnou lineárně nezávislou posloupnost N délky k lze v libovolné posloupnosti generující \mathbf{V} vyměnit některých k členů za členy N tak, že vzniklá posloupnost stále generuje \mathbf{V} .

Věta 5.51 (Steinitzova věta o výměně). *Nechť $N = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} a necht' $G = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l)$ generuje \mathbf{V} . Pak $k \leq l$ a při vhodném uspořádání $G' = (\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_l)$ posloupnosti G platí, že $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}'_{k+1}, \mathbf{w}'_{k+2}, \dots, \mathbf{w}'_l)$ generuje \mathbf{V} .*

Důkaz. Dokážeme indukcí podle k . Pro $k = 0$ je tvrzení zřejmé, takže předpokládáme, že $k > 0$ a že tvrzení platí pro $|N| < k$.

Podle indukčního předpokladu platí $k - 1 \leq l$ a můžeme najít přeuspořádání $G'' = (\mathbf{w}''_1, \mathbf{w}''_2, \dots, \mathbf{w}''_l)$ takové, že

$$P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w}''_k, \mathbf{w}''_{k+1}, \dots, \mathbf{w}''_l)$$

generuje \mathbf{V} . Zbývá do P umístit vektor \mathbf{v}_k výměnou za některý z vektorů $\mathbf{w}''_k, \mathbf{w}''_{k+1}, \dots$

Protože P generuje \mathbf{V} , vektor \mathbf{v}_k jde napsat jako lineární kombinace vektorů z P :

$$\mathbf{v}_k = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + a_k \mathbf{w}''_k + a_{k+1} \mathbf{w}''_{k+1} + \dots + a_l \mathbf{w}''_l.$$

Posloupnost N je lineárně nezávislá, proto \mathbf{v}_k není lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$. To znamená, že platí $k \leq l$ a navíc alespoň jeden z prvků a_k, a_{k+1}, \dots, a_l tělesa \mathbf{T} je nenulový. Předpokládejme, že $a_k \neq 0$, jinak můžeme posloupnost G'' přeuspořádat do posloupnosti G' (a patřičně změnit P), aby toto platilo.

Ukážeme, že

$$Z = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}''_{k+1}, \mathbf{w}''_{k+2}, \dots, \mathbf{w}''_l)$$

generuje \mathbf{V} . Vektor \mathbf{w}''_k jde napsat jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}''_{k+1}, \dots, \mathbf{w}''_l$, což lze nahlédnout z rovnosti výše (z rovnosti vyjádříme $a_k \mathbf{w}''_k$ a vynásobíme a_k^{-1}). Takže lineární obal Z obsahuje vektor \mathbf{w}''_k a tím pádem

$$\langle Z \rangle \supseteq \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w}''_k, \mathbf{w}''_{k+1}, \dots, \mathbf{w}''_l \rangle = \langle P \rangle = \mathbf{V}.$$

□

Nejdůležitější důsledek Steinitzovy věty je, že všechny báze obsahují stejný počet vektorů. To umožňuje dát přesný význam slovu dimenze.

Důsledek 5.52. *Každé dvě báze konečně generovaného vektorového prostoru mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Předpokládejme, že $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ a $C = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l)$ jsou dvě báze vektorového prostoru \mathbf{V} . Protože posloupnost B je lineárně nezávislá a posloupnost C generuje \mathbf{V} , platí podle Steinitzovy věty $k \leq l$. Z téže věty plyne také $l \leq k$, protože C je lineárně nezávislá a B generuje \mathbf{V} . Dohromady dostáváme $k = l$. □

Definice 5.53. *Dimenzí* konečně generovaného vektorového prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} rozumíme počet prvků jeho libovolné báze. Dimenzi prostoru \mathbf{V} značíme $\dim(\mathbf{V})$.

Příklad 5.54. V souladu s intuicí je dimenze aritmetického vektorového prostoru \mathbf{T}^n rovna n , protože kanonická báze má n prvků.

Triviální prostor $\{\mathbf{o}\}$ má dimenzi 0 protože prázdná posloupnost je jeho báze.

Prostor $\langle(1, 1, 1)\rangle \leq \mathbb{R}^3$ má dimenzi 1, protože $((1, 1, 1))$ je jeho báze. To odpovídá geometrické představě, že daný prostor je přímkou.

Dimenze prostoru

$$\mathbf{V} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{Z}_7^4$$

je 3, protože v příkladu 5.44 jsme našli tříprvkovou bázi.

Zdůvodnění následujících tvrzení přenecháme do cvičení. Dimenze prostoru všech matic nad \mathbf{T} typu $m \times n$ je mn . Dimenze prostoru reálných polynomů stupně nejvýše n je $n + 1$. Dimenze prostoru \mathbb{C} jako vektorového prostoru nad \mathbb{R} je 2.

V důsledku 5.48 jsme viděli, že z každé konečné množiny generátorů lze vybrat bázi. Při hledání báze můžeme postupovat i opačně – k lineárně nezávislé množině doplnit vektory, aby vznikla báze. Následující důsledek říká, že to jde, navíc můžeme doplňovat pouze vektory z libovolně zvolené množiny generátorů. Důsledek formulujeme pro konečné množiny, obecněji necháme důkaz do cvičení.

Důsledek 5.55. *Nechť G je konečná množina generátorů vektorového prostoru \mathbf{V} . Každá lineárně nezávislá posloupnost N ve \mathbf{V} jde doplnit prvky G na bázi \mathbf{V} .*

Důkaz. Označme $N = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$. Nejprve pomocí důsledku 5.48 vybereme z G bázi $B = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l)$. Ze Steinitzovy věty dostaneme, že při vhodném přeuspořádání báze B , posloupnost $Z = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_l)$ generuje \mathbf{V} . Ze Z jde podle důsledku 5.48 vybrat bázi. My ale víme, že dimenze \mathbf{V} je l (protože B je báze), takže již Z musí být báze. \square

Formulujeme dva triviální důsledky.

Důsledek 5.56. *Maximální lineárně nezávislá posloupnost v konečně generovaném prostoru je báze.*

Obecněji, maximální lineárně nezávislá podposloupnost konečné množiny generátorů je báze.

Příklad 5.57. V příkladu 5.44 jsme hledali nějakou bázi prostoru

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{Z}_7^4.$$

Teď z vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_5$ bázi \mathbf{V} vybereme. Z důsledku 5.48 plyne, že to jde. Předchozí důsledek 5.55 nám dává návod, jak to jde udělat. Stačí totiž vzít libovolnou maximální lineárně nezávislou podmnožinu $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5\}$, ta již musí být báze. Můžeme postupovat například tak, že začneme s lineárně nezávislou posloupností (\mathbf{v}_1) . Pokusíme se přidat \mathbf{v}_2 – otestujeme řádkovými úpravami, zda $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$

je lineárně nezávislá.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dvojice $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je lineárně závislá, vektor \mathbf{v}_2 tedy přidávat nebudeme. Zkusíme \mathbf{v}_3 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Máme lineárně nezávislou posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$. Pokusíme se k ní přidat \mathbf{v}_4 . Při testování lineární závislosti můžeme využít již provedených úprav.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vektor \mathbf{v}_4 přidávat nebudeme. Nakonec zkusíme \mathbf{v}_5 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Protože $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5)$ je lineárně nezávislá posloupnost a navíc je maximální lineárně nezávislá posloupnost tvořená vektory v množině $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_5\}$ (neboť přidáním \mathbf{v}_2 nebo \mathbf{v}_4 již vznikne lineárně závislá množina), tvoří tato posloupnost bázi \mathbf{V} .

Dokázaná tvrzení umožňují dokazovat a zobecňovat i další fakta, která jsou geometricky zřejmá pro \mathbb{R}^2 nebo \mathbb{R}^3 :

Pozorování 5.58. *V každém prostoru \mathbf{V} dimenze n platí:*

- (1) *Každá množina generátorů \mathbf{V} obsahuje alespoň n vektorů.*
- (2) *Každá n -prvková posloupnost generátorů je bází \mathbf{V} .*
- (3) *Každá lineárně nezávislá posloupnost ve \mathbf{V} obsahuje nejvýše n vektorů.*
- (4) *Každá n -prvková lineárně nezávislá posloupnost ve \mathbf{V} je bází \mathbf{V} .*

Důkaz. Z každé množiny generátorů lze vybrat bázi a všechny báze obsahují n vektorů. Z toho plynou první dva body.

Každou lineárně nezávislou množinu lze doplnit na n -prvkovou bázi. Z toho plynou zbylé dva body. \square

Příklad 5.59. V příkladu 5.30 jsme zdůvodnili, že posloupnost $(3i+5, 2, 3)^T, (5, 2+i, 1)^T, (4, 2, 12)^T, (\pi, e^\pi, 4)^T$ v prostoru \mathbb{C}^3 je lineárně závislá. Teď máme kratší zdůvodnění – podle třetího bodu v pozorování nemůže žádná lineárně nezávislá posloupnost v \mathbb{C}^3 obsahovat více než 3 vektory.

Podobně můžeme bez jakéhokoliv počítání rozhodnout, že množina $\{(1, 3, i + e^\pi, -10)^T, (i, 2i, 3 + 2i, -311)^T, (2, \pi, \pi, -4)^T\}$ negeneruje \mathbb{C}^4 podle prvního bodu.

Nakonec ukážeme, že podprostor má nejvýše takovou dimenzi jako původní prostor.

Tvrzení 5.60. *Je-li \mathbf{W} podprostor konečně generovaného prostoru \mathbf{V} , pak \mathbf{W} je konečně generovaný a platí $\dim(\mathbf{W}) \leq \dim(\mathbf{V})$, přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $W = V$.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že \mathbf{W} je konečně generovaný. (Pozor, zde se často dělá chyba. Toto „intuitivně zřejmé“ tvrzení je třeba dokázat.) Předpokládejme pro spor, že \mathbf{W} nemá konečnou množinu generátorů. Vezmeme libovolný nenulový vektor $\mathbf{w}_1 \in W$. Protože $\{\mathbf{w}_1\}$ negeneruje W , existuje vektor $\mathbf{w}_2 \in W$ takový, že $\mathbf{w}_2 \notin \langle \mathbf{w}_1 \rangle$, atd.: Indukcí najdeme pro libovolné i vektor $\mathbf{w}_i \in W$, který neleží v lineárním obalu předchozích vektorů $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$. Podle poznámky za tvrzením 5.27 (cvičení ??) je pro každé i posloupnost $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_i)$ lineárně nezávislá (ve \mathbf{W} , tedy i ve \mathbf{V}), což je spor s bodem (3) předchozího pozorování.

Již víme, že \mathbf{W} je konečně generovaný, takže má bázi B podle důsledku 5.49. Báze B prostoru \mathbf{W} je lineárně nezávislá množina ve \mathbf{V} , takže $\dim(\mathbf{W}) = |B| \leq \dim(\mathbf{V})$, opět podle bodu (3). Pokud se dimenze rovnají, pak B je bázi \mathbf{W} podle (4), z čehož vyplývá, že $V = W$. (Naopak z $V = W$ triviálně plyne $\dim(V) = \dim(W)$.) \square

Příklad 5.61. Podle tvrzení mají podprostory \mathbb{R}^3 dimenzi 0 (triviální podprostor $\{\mathbf{o}\}$), 1 (podprostory tvaru $\langle \mathbf{u} \rangle$, kde \mathbf{u} je nenulový vektor, tedy přímky procházející počátkem), 2 (podprostory tvaru $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, kde (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je lineárně nezávislá, tedy roviny procházející počátkem) nebo 3 (triviální podprostor \mathbb{R}^3). Nyní tedy máme precizní důkaz, že diskuze o podprostorech \mathbb{R}^3 v části 5.2.1 byla správná.

Obecněji z tvrzení vyplývá, že každý netriviální podprostor \mathbf{T}^n lze zapsat jako lineární obal 1 až $n - 1$ (lineárně nezávislých) vektorů.

5.4.3. *Báze jako souřadnicový systém.* Vraťme se teď k pozorování 5.39, které říká, že máme-li bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} , pak každý vektor \mathbf{v} ve \mathbf{V} lze jednoznačným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Koeficientům této lineární kombinace říkáme souřadnice \mathbf{v} vzhledem k B .

Definice 5.62. Nechť $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} a $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$. *Souřadnicemi* (též *vyjádřením*) vektoru \mathbf{w} vzhledem k B rozumíme (jednoznačně určený) aritmetický vektor $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbf{T}^n$ takový, že

$$\mathbf{w} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n .$$

Souřadnice \mathbf{w} vzhledem k B značíme $[\mathbf{w}]_B$, tj.

$$[\mathbf{w}]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

ZNOVU OBRAZEK

Souřadnice závisí na pořadí vektorů v bázi. Z tohoto důvodu jsme bázi definovali jako posloupnost vektorů, nikoliv množinu.

Zvolíme-li v prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} dimenze n bázi B , pak předchozí definice jednoznačně přiřazuje každému vektoru $\mathbf{v} \in V$ aritmetický vektor $[\mathbf{v}]_B \in \mathbf{T}^n$. Naopak, každý aritmetický vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{T}^n$ je roven $[\mathbf{v}]_B$ pro nějaký (jednoznačně určený) vektor $\mathbf{v} \in V$. Zobrazení přiřazující $[\mathbf{v}]_B$ vektoru \mathbf{v} je tedy bijekcí mezi V a \mathbf{T}^n .

Příklad 5.63. V příkladu 5.40 jsme si všimli, že pro kanonickou bázi $K = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathbf{T}^n a libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{T}^n$ platí

$$[\mathbf{v}]_K = \mathbf{v} .$$

Jednou z bází prostoru $\mathbf{V} = \langle (1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T \rangle \leq \mathbb{R}^3$ je posloupnost $B = ((1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T)$ (viz příklad 5.43. Vektor $(9, 12, 15)^T$ leží v prostoru \mathbf{V} , protože

$(9, 12, 15)^T = (1, 2, 3)^T + 2 \cdot (4, 5, 6)^T$. Jeho vyjádření v bázi B je podle tohoto vztahu

$$[(9, 12, 15)]_B = (1, 2)^T .$$

Posloupnost $B = (x, x^2, 1)$ je bázi prostoru reálných polynomů stupně nejvýše dva. Souřadnice vektoru $a + bx + cx^2$ vzhledem k této bázi je

$$[a + bx + cx^2]_B = (b, c, a)^T .$$

Příklad 5.64. Uvažujme posloupnost

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

v prostoru \mathbb{Z}_5^3 . Ověříme, že B je bázi a najdeme souřadnice vektoru $\mathbf{w} = (4, 0, 1)^T$ vzhledem k B .

Obojí uděláme najednou, pokusíme se \mathbf{w} vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů v B . Z mnohokrát použitého pohledu na násobení jako na lineární kombinování nahlédneme, že souřadnice $[\mathbf{w}]_B$ jsou řešením soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$, kde $A = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3)$ (tj. vektory z báze napíšeme do sloupců). Soustavu vyřešíme.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right) .$$

Vidíme, že A je regulární (odstupňovaný tvar je horní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále), takže B je báze podle poznámky za příkladem 5.42. Řešením soustavy je

$$\mathbf{x} = [\mathbf{w}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Pro kontrolu můžeme ověřit, že skutečně platí $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$.

Korespondence mezi vektory a souřadnicemi ve zvolené bázi je ještě těsnější, zachovává totiž operace vektorového prostoru. Konkrétně, souřadnice součtu vektorů ve \mathbf{V} (vzhledem k B) jsou rovny součtu jejich souřadnic (vzhledem k B) v prostoru \mathbf{T}^n . Podobně pro násobení skalárem.

Tvrzení 5.65. *Nechť $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} , nechť $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ a $t \in \mathbf{T}$. Pak platí*

- (1) $[\mathbf{u} + \mathbf{w}]_B = [\mathbf{u}]_B + [\mathbf{w}]_B$ a
- (2) $[t\mathbf{u}]_B = t[\mathbf{u}]_B$

Na levých stranách vystupují operace v prostoru \mathbf{V} , na pravých stranách jsou operace v \mathbf{T}^n .

Důkaz. Je-li $[\mathbf{u}]_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ a $[\mathbf{w}]_B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, pak podle definice souřadnic platí

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n, \quad \mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n .$$

Sečtením a úpravou získáme

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (a_n + b_n)\mathbf{v}_n ,$$

což podle definice znamená $[\mathbf{u} + \mathbf{w}]_B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)^T = [\mathbf{u}]_B + [\mathbf{w}]_B$.

Druhá část tvrzení je rovněž snadné cvičení. \square

Příklad 5.66. V prostoru $\mathbf{V} = \langle (1, 2, 3), (4, 5, 6) \rangle \leq \mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $B = ((1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T)$ a vektory \mathbf{u}, \mathbf{w} se souřadnicemi $(1, 2)^T, (3, -1)^T$ vzhledem k B :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}, [\mathbf{u}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, [\mathbf{w}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Součtem \mathbf{u} a \mathbf{w} je vektor $(8, 13, 18)^T$, jeho souřadnice vzhledem k B jsou $(1, 2)^T + (3, -1)^T = (4, 1)^T$. Skutečně, $4 \cdot (1, 2, 3)^T + 1 \cdot (4, 5, 6)^T = (8, 13, 18)^T$.

Teď již vidíme přesný význam hesla „všechny konečně generované vektorové prostory jsou v podstatě \mathbf{T}^n “. Zvolíme-li v prostoru bázi B , můžeme místo původních vektorů počítat s jejich souřadnicemi vzhledem k B a tím se vše převádí do \mathbf{T}^n . Otázku, jak se souřadnice mění při přechodu od báze B k jiné bázi, vyřešíme za okamžik.

Do \mathbf{T}^n můžeme převádět celé podmnožiny, tj. pro $X \subseteq V$ definujeme

$$[X]_B = \{[\mathbf{v}]_B : \mathbf{v} \in X\} \subseteq \mathbf{T}^n .$$

Tento přechod také zachovává důležité vlastnosti, jako lineární nezávislost, generování, báze, apod. Důkaz tohoto pozorování přenecháme jako cvičení.

Pozorování 5.67. *Nechť B je báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} dimenze n . Pak platí*

- (1) *posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá ve \mathbf{V} právě tehdy, když je posloupnost $([\mathbf{v}_1]_B, [\mathbf{v}_2]_B, \dots, [\mathbf{v}_k]_B)$ lineárně nezávislá v \mathbf{T}^n ;*
- (2) *množina X generuje \mathbf{V} právě tehdy, když $[X]_B$ generuje \mathbf{T}^n ;*
- (3) *posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je báze \mathbf{V} právě tehdy, když je posloupnost $([\mathbf{v}_1]_B, [\mathbf{v}_2]_B, \dots, [\mathbf{v}_k]_B)$ báze \mathbf{T}^n .*

5.4.4. *Přechod mezi bázemi.* Často je potřeba umět rychle přecházet mezi bázemi, tj. počítat vyjádření vektoru vzhledem k jedné bázi, známe-li vyjádření vzhledem k jiné bázi.

Tento přechod je možné popsat maticí. Rozmyslíme si nejprve jednoduchý případ aritmetického vektorového prostoru \mathbf{T}^3 s bází $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Najdeme vzoreček jak najít vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, známe-li jeho vyjádření $[\mathbf{x}]_B = (y_1, y_2, y_3)^T$ vzhledem k bázi B . Podle definice je

$$\mathbf{x} = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + y_3 \mathbf{v}_3 ,$$

což můžeme maticově zapsat

$$\mathbf{x} = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3) [\mathbf{x}]_B .$$

Vektor \mathbf{x} je roven svému vyjádření vzhledem ke kanonické bázi $K = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Matice $(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3)$ se nazývá matice přechodu od B ke K a značí se $[\text{id}]_K^B$. Umožňuje nám „přecházet“ od báze B k bázi K pomocí vzorce

$$[\mathbf{x}]_K = [\text{id}]_K^B [\mathbf{x}]_B .$$

Podobnou formalku můžeme nalézt pro přechod mezi libovolnými dvěma bázemi libovolného konečně generovaného vektorového prostoru.

Definice 5.68. *Nechť $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ a C jsou báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} . Maticí přechodu od báze B k bázi C rozumíme matici*

$$[\text{id}]_C^B = ([\mathbf{v}_1]_C | [\mathbf{v}_2]_C | \dots | [\mathbf{v}_n]_C) .$$

Slovy, matice přechodu od B k C má ve sloupcích vyjádření vektorů báze B vzhledem k bázi C .

Tvrzení 5.69. *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} dimenze n a B, C jsou báze \mathbf{V} . Pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí*

$$[\mathbf{x}]_C = [\text{id}]_C^B [\mathbf{x}]_B .$$

Navíc je matice $[\text{id}]_C^B$ tímto vztahem určena jednoznačně.

Důkaz. Označme $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Vezmeme libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ a označme $[\mathbf{x}]_B = (a_1, \dots, a_n)$, tj. podle definice $\mathbf{x} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n$. Podle tvrzení 5.65 platí

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_C &= [a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n]_C = [a_1 \mathbf{v}_1]_C + \dots + [a_n \mathbf{v}_n]_C \\ &= a_1 [\mathbf{v}_1]_C + \dots + a_n [\mathbf{v}_n]_C = ([\mathbf{v}_1]_C | \dots | [\mathbf{v}_n]_C) (a_1, \dots, a_n)^T \\ &= [\text{id}]_C^B [\mathbf{x}]_B . \end{aligned}$$

K důkazu jednoznačnosti uvažujme matici A , která splňuje pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ vztah

$$[\mathbf{x}]_C = A [\mathbf{x}]_B .$$

Dosažením $\mathbf{x} = \mathbf{v}_i$ dostaneme

$$[\mathbf{v}_i]_C = A [\mathbf{v}_i]_B = A \mathbf{e}_i ,$$

takže i -tý sloupec matice A je roven $[\mathbf{v}_i]_C$ a tím pádem $A = [\text{id}]_C^B$. \square

Příklad 5.70. Matice přechodu od báze $B = ((1, 2)^T, (5, 6)^T)$ ke kanonické bázi K prostoru \mathbb{R}^2 je

$$[\text{id}]_K^B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} .$$

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_K = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} [\mathbf{x}]_B .$$

Pokud chceme naopak vyjadřovat vzhledem k bázi B , známe-li vyjádření vzhledem ke kanonické bázi, upravíme tento vztah na

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{x} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} .$$

(Využili jsme toho, že $[\text{id}]_K^B$ je regulární matice. Obecně, každá matice přechodu je regulární a platí $[\text{id}]_B^C = ([\text{id}]_C^B)^{-1}$. Dokažte!)

Příklad 5.71. Najdeme matici přechodu od báze B k bázi C prostoru $\mathbf{V} \leq \mathbb{R}^3$, kde

$$\mathbf{V} = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle, B = \left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right), C = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) .$$

(Ověřte, že B a C jsou skutečně báze prostoru \mathbf{V} !) Potřebujeme najít vyjádření vektorů báze B vzhledem k bázi C . To vede na dvě soustavy rovnic se stejnou

maticí, které vyřešíme současně.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Vychází $[(2, 4, 4)^T]_C = (-2, 4)^T$ a $[(1, -1, -1)^T]_C = (2, -1)^T$, takže matice přechodu od B k C je

$$[\text{id}]_C^B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} .$$

5.5. Dimenze podprostorů určených maticí, soustavy rovnic podruhé.

K matici A nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ máme přiřazeny řádkový a sloupcový prostor $\text{Im } A^T \leq \mathbf{T}^n$ a $\text{Im } A \leq T^m$. Ukážeme, že mají stejnou dimenzi. Dále dáme do souvislosti dimenzi prostoru $\text{Ker } A \leq \mathbf{T}^n$ a $\text{Im } A$, a podíváme se ještě jednou na řešení soustav lineárních rovnic v terminologii zavedené v této kapitole. V této části budou vystupovat pouze aritmetické vektorové prostory a jejich podprostory.

5.5.1. *Bázové sloupce matice.* Po převodu soustavy lineárních rovnic elementárními řádkovými úpravami do odstupňovaného tvaru jsme rozdělili proměnné na bázové a volné (parametry). Nyní ukážeme, že toto rozdělení nezávisí na konkrétních provedených úpravách, ale pouze na původní soustavě (viz tvrzení 5.76). Výsledek samozřejmě formulujeme v jazyku matic.

Definice 5.72. Nechť $A = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots)$ je matice nad \mathbf{T} . Říkáme, že i -tý sloupec matice A je *bázový*, pokud není lineární kombinací předchozích sloupců, tj. pokud platí

$$\mathbf{a}_i \notin \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1} \rangle .$$

Pojmenování ospravedlňuje skutečnost, že bázové sloupce tvoří bázi sloupcového prostoru matice. To si rozmyslete jako cvičení.

Pozorování 5.73. *Pro libovolnou matici A tvoří bázové sloupce bázi sloupcového prostoru. Speciálně, dimenze $\text{Im } A$ je rovna počtu bázových sloupců.*

Příklad 5.74. V matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

je bázový druhý a čtvrtý sloupec. První, třetí ani pátý sloupec není bázový. Je to vidět u prvního a třetího sloupce, pátý je součtem druhého a čtvrtého, takže také není bázový.

Za okamžik ukážeme, že řádkové úpravy neovlivňují skutečnost, zda je sloupec bázový nebo ne. Nejdříve ale ukážeme, že bázové sloupce matice v odstupňovaném tvaru jsou právě sloupce obsahující pivoty.

Tvrzení 5.75. *Bázové sloupce matice A nad \mathbf{T} typu $m \times n$ v odstupňovaném tvaru jsou právě sloupce k_1, k_2, \dots, k_r , kde r, k_1, \dots, k_r jsou parametry z definice 2.10 odstupňovaného tvaru.*

Důkaz. OBRAZEK

Označme $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$. Pro $j = 1, 2, \dots, n$ označme W_j lineární obal prvních j sloupců, tj. $W_j = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_j \rangle$. Dále nechť \mathbf{V}_j je následující podprostor \mathbf{T}^m :

$$V_j = \{(x_1, x_2, \dots, x_j, 0, 0, \dots, 0) : x_1, x_2, \dots, x_j \in T\}.$$

Pro libovolné i je W_{k_i-1} podprostorem prostoru \mathbf{V}_{i-1} . Sloupec \mathbf{a}_{k_i} do tohoto prostoru nepatří, takže je bázový.

Zbývá ukázat, že ostatní sloupce bázové nejsou. Za tím účelem si všimneme, že $W_{k_i} = V_i$ pro libovolné i . Je to proto, že za prvé $(\mathbf{a}_{k_1}, \mathbf{a}_{k_2}, \dots, \mathbf{a}_{k_i})$ je lineárně nezávislá posloupnost (žádný z vektorů v posloupnosti není lineární kombinací předchozích, takže posloupnost je lineárně nezávislá podle tvrzení 5.27), čili $\dim(W_{k_i}) \geq i$, a za druhé $\dim(V_i) = i$. Prostor \mathbf{W}_i dimenze alespoň i je podprostorem \mathbf{V}_i dimenze i , takže skutečně platí $W_{k_i} = V_i$ podle tvrzení 5.60.

Nyní již důkaz dokončíme snadno. Sloupce $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k_1-1}$ jsou celé nulové, takže nejsou bázové. Sloupce $\mathbf{a}_{k_1+1}, \mathbf{a}_{k_1+2}, \dots, \mathbf{a}_{k_2-1}$ nejsou bázové, protože patří do V_2 , tedy i do W_{k_1} , atd. \square

Tvrzení 5.76. *Nechť A je matice nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ a R je regulární matice řádu m . Pak pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí, že i -tý sloupec matice A je bázový právě tehdy, když je bázový i -tý sloupec matice RA .*

Důkaz. Tvrzení je důsledkem definice a pozorování, že matice A má stejné lineární závislosti mezi sloupci jako matice RA (toho jsme si všimli v poznámce za tvrzením 5.60). Obšrněji, i -tý sloupec matice A je bázový právě tehdy, když není lineární kombinací předchozích sloupců, tj. právě tehdy, když $A(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, 0, 0, \dots, 0)^T = \mathbf{o}$ pro nějaké prvky $a_1, \dots, a_{i-1} \in T$. To nastane právě tehdy, když $RA(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, 0, 0, \dots, 0)^T = \mathbf{o}$. (Připomeňme, že implikaci zprava doleva v této ekvivalenci lze dokázat například vynásobením zleva maticí R^{-1} .) \square

Příklad 5.77. Jako ilustraci provedeme v předchozím příkladu Gaussovu eliminaci a přesvědčíme se, že bázové sloupce jsou právě sloupce obsahující pivoty.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.5.2. *Hodnost.* Z dokázaného tvrzení je již jen krok k důkazu, že sloupcový a řádkový prostor matice mají stejnou dimenzi. Této dimenzi říkáme hodnost matice.

Věta 5.78. *Pro libovolnou matici A platí $\dim(\text{Im } A) = \dim(\text{Im } A^T)$.*

Důkaz. Myšlenka je taková, že pro matice v odstupňovaném tvaru tvrzení platí a ani jedna dimenze se řádkovými úpravami nemění, takže tvrzení platí pro jakoukoliv matici.

Detailněji. Každou matici A lze elementárními řádkovými úpravami převést do odstupňovaného tvaru. Jinými slovy, existuje regulární matice R taková, že RA je v odstupňovaném tvaru. Dimenze sloupcového prostoru matice A i RA je počet bázových sloupců (viz pozorování 5.73), tyto dimenze jsou stejné (viz tvrzení 5.76) a rovnají se počtu nenulových řádků matice RA (viz tvrzení 5.75).

Dimenze řádkového prostoru matice RA je také rovna počtu nenulových řádků, protože nenulové řádky tvoří lineárně nezávislou posloupnost (viz tvrzení 5.34), která zřejmě generuje řádkový prostor. Ale násobení regulární maticí zleva nemění

lineární obal řádků (viz tvrzení 5.23), speciálně, dimenze řádkového prostoru matice RA je stejná jako dimenze řádkového prostoru matice A . \square

Definice 5.79. *Hodností matice A rozumíme dimenzi řádkového (sloupcového) prostoru matice A . Značíme $\text{rank}(A)$.*

Shrneme některé důležité triviální důsledky do pozorování.

Pozorování 5.80. *Pro libovolnou matici A typu $m \times n$ platí $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) \leq m, n$. Hodnost se nemění elementárními řádkovými ani sloupcovými úpravami. Hodnost matice v řádkově odstupňovaném tvaru je rovna počtu nenulových řádků.*

Poslední věta pozorování také vysvětluje volbu písmena r pro počet nenulových řádků v odstupňovaném tvaru.

Příklad 5.81. V závislosti na $a, b \in \mathbb{Z}_3$ určíme dimenzi prostoru

$$\mathbf{V}_{a,b} = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{Z}_3^3,$$

přičemž nás nebude zajímat konkrétní báze.

Vektory si napíšeme do řádků nebo sloupců a určíme hodnost matice. Přitom můžeme využívat jak řádkové, tak sloupcové úpravy. Zvolíme například řádky.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & b+2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & b+2 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V první úpravě jsme přeuspořádali řádky a v druhé jsem prohodili sloupce. Bývá totiž výhodnější mít parametry co nejvíce vpravo dole, aby se do úprav dostaly co nejpozději. Následně jsme vyeliminovali první sloupec a nakonec ještě prohodili řádky.

Pokud $b \neq 1$ a $a \neq 2$, pak je matice v odstupňovaném tvaru se třemi nenulovými řádky a $\dim(\mathbf{V}_{a,b}) = 3$. Pokud $b \neq 1$ a $a = 2$, pak je matice rovněž v odstupňovaném tvaru tentokrát s dvěma nenulovými řádky a $\dim(\mathbf{V}_{a,b}) = 2$. Pokud $b = 1$, pak můžeme ještě upravit (pozor, v tomto případě je matice v odstupňovaném tvaru pouze když $a = 2$!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a dimenze je 2.

Shrnutí: Pokud $b \neq 1$ a $a \neq 2$ je $\dim(\mathbf{V}_{a,b}) = 3$, ve všech ostatních případech je $\dim(\mathbf{V}_{a,b}) = 2$.

Hodnost matice A je rovná dimenzi obrazu příslušného zobrazení f_A . Máme-li ještě matici B , aby byl definován součin AB , pak hodnost AB je rovná dimenzi obrazu zobrazení f_{AB} . Ale obraz zobrazení $f_{AB} = f_A \circ f_B$ je podprostorem obrazu zobrazení f_A , takže hodnost AB je menší nebo rovna hodnosti A . Tuto nerovnost a obdobnou nerovnost pro násobení zleva dokážeme algebraicky.

Tvrzení 5.82. *Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$ a B matice nad \mathbf{T} typu $n \times p$. Pak platí*

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A), \quad \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B) .$$

Důkaz. Opět použijeme tvrzení 4.14 o pohledu na násobení jako počítání lineárních kombinací. Dostáváme $\text{Im}(AB) \leq \text{Im}(A)$, takže $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ (podle tvrzení 5.60 o dimenzi podprostoru). Podobně $\text{Im}(AB)^T \leq \text{Im} B^T$, takže $\text{rank}(AB)^T \leq \text{rank}(B^T)$, z toho plyne $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$. \square

Důsledek 5.83. *Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$ a R je regulární matice nad \mathbf{T} řádu m . Pak $\text{rank}(RA) = \text{rank}(A)$. Podobně pro násobení regulární maticí zprava.*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení platí $\text{rank}(RA) \leq \text{rank}(A)$, ale také $\text{rank}(A) = \text{rank}(R^{-1}(RA)) \leq \text{rank}(RA)$. \square

Pomocí hodnoty můžeme také doplnit charakterizaci regulárních matic dokázanou ve větě 4.30. Uvažujme čtvercovou matici A nad \mathbf{T} řádu n . Bod (2) ve větě říká, že f_A je zobrazení na, neboli $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení pro každou pravou stranu, neboli $\text{Im} A = \mathbf{T}^n$ (sloupce generují \mathbf{T}^n), což nastane podle tvrzení 5.60 právě tehdy, když $\dim(\text{Im} A) = \text{rank}(A) = n$. Bod (4) říká, že $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má jediné řešení, neboli sloupce A jsou lineárně nezávislé. Protože $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ můžeme podobné charakterizace formulovat i pro řádky. Dostáváme následující pozorování.

Pozorování 5.84. *Nechť A je čtvercová matice nad \mathbf{T} řádu n . Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) A je regulární.
- (2) $\text{rank}(A) = n$.
- (3) Sloupce (řádky) matice A jsou lineárně nezávislé.
- (4) Sloupce (řádky) matice A generují \mathbf{T}^n .
- (5) Sloupce (řádky) matice A tvoří bázi \mathbf{T}^n .

Všimněte si, že ekvivalence sloupcových (a řádkových) verzí také plyne z pozorování 5.58.

Příklad 5.85. Ukážeme řešení jedné kombinatorické úlohy pomocí hodnoty matice. Příklad byl převzat ze sbírky *Šestnáct miniatur* Jiřího Matouška, kde jsou popsány některé zajímavé aplikace lineární algebry v jiných oborech. Lze ji najít na domovské stránce autora.

Ve městě žije n občanů, kteří jsou sdruženi v m klubech. Podle vyhlášky městské rady má každý klub lichý počet členů, zatímco pro každé dva různé kluby musí být počet společných členů sudý. Dokážeme, že v této situaci je $m \leq n$, tedy klubů není více než občanů.

Občany označíme čísly $1, 2, \dots, n$ a kluby čísly $1, 2, \dots, m$. Utvoříme matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nad tělesem \mathbb{Z}_2 tak, že $a_{ij} = 1$, pokud občan j je v klubu i , a $a_{ij} = 0$, jinak. Každý řádek tedy popisuje členy jednoho klubu, má na j -té pozici jedničku právě tehdy, když občan j je jeho členem. Například

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

popisuje situaci, kdy ve městě je 5 občanů a 3 kluby. Členy klubu 1 jsou občané 1, 2, 3, členy klubu 2 jsou občané 2, 3, 4 a jediným členem klubu 3 je občan 5. Všimněte si, že tato situace je v souladu s vyhláškou městské rady.

Spočítáme součin matic $AA^T = (b_{kl})$. Prvek na místě kl je součtem n sčítanců $a_{k1}a_{l1} + a_{k2}a_{l2} + \dots + a_{kn}a_{ln}$. Sčítanec $a_{km}a_{lm}$ je roven jedné právě tehdy, když občan m je v obou klubech k, l , jinak je roven nule. Počítáme v \mathbb{Z}_2 , takže celý součet je roven jedné, pokud je počet společných členů klubů k a l lichý, jinak je roven nule. Vyhlášku nyní můžeme přeformulovat tak, že $a_{kk} = 1$ a $a_{kl} = 0$ pro libovolná $k \neq l$. Jinými slovy $AA^T = I_m$.

Hodnota matice A je nejvýš n , protože hodnota nemůže být vyšší než počet sloupců. Z tvrzení 5.82 o hodnotě součinu dostaneme

$$\text{rank}(A) \geq \text{rank}(AA^T) = \text{rank}(I_m) = m .$$

Celkově $n \geq \text{rank}(A) \geq m$ a jsme hotovi.

5.5.3. Skeletní rozklad, Gaussova-Jordanova eliminace. Uvažujme matici A typu $m \times n$ hodnosti r nad tělesem \mathbf{T} . Napíšeme nějakou bázi $\text{Im } A$ do sloupců matice B . Každý sloupec \mathbf{a}_i matice A je lineární kombinací sloupců matice B , takže platí $\mathbf{a}_i = B\mathbf{c}_i$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_i \in \mathbf{T}^r$. Označíme-li tedy $C = (\mathbf{c}_1 | \dots | \mathbf{c}_n)$, máme rozklad $A = BC$, kde B je typu $m \times r$ a C je typu $r \times n$. Takovému rozkladu říkáme *skeletní rozklad*.

Rozklad se hodí pro ukládání matic nízkých hodnotí a počítání s nimi. Je-li například A čtvercová matice řádu 1000 hodnosti 100, pak na uložení matice A potřebujeme 10^6 skalárů, kdežto na uložení matic B, C pouze $2 \cdot 10^5$ skalárů. Na výpočet součinu $A\mathbf{x}$ pro nějaký vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^{1000}$ přímočarým způsobem potřebujeme 10^6 násobení, na výpočet postupem $B(C(\mathbf{x}))$ opět pouze $2 \cdot 10^5$ násobení.

Za sloupce matice B můžeme vzít báze sloupce matice A . Ve tvrzení 5.87 ukážeme, že v tomto případě je matice C tzv. redukovaný odstupňovaný tvar matice A .

Definice 5.86. Matice je v *redukovaném (řádkově) odstupňovaném tvaru*, pokud je v řádkově odstupňovaném tvaru a každý báze sloupec má jedinou nenulovou složku rovnou 1.

Každou matici A lze převést do redukovaného odstupňovaného tvaru takto:

- (1) Matici Gaussovo eliminací převedeme do odstupňovaného tvaru.
- (2) Vynásobíme nenulové řádky tak, aby byl každý pivot roven 1.
- (3) Postupně vynulujeme zbylé prvky v každém báze sloupci.

Tomuto procesu se říká Gaussova-Jordanova eliminace. Vzniklé matici říkáme *redukovaný odstupňovaný tvar* matice A . (Jako cvičení dokažte, že tento tvar je dokonce maticí určen jednoznačně, tj. pro každou matici A existuje právě jedna matice J v redukovaném odstupňovaném tvaru taková, že J lze získat z A elementárními řádkovými úpravami.)

Přejdeme ke slíbenému tvrzení o skeletním rozkladu.

Tvrzení 5.87. *Libovolná matice A typu $m \times n$ nad \mathbf{T} s hodností r je rovná součinu $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ tvořená báze sloupci matice A (v pořadí v jakém se vyskytují v A) a C je matice typu $r \times n$ tvořená nenulovými řádky v redukovaném odstupňovaném tvaru D matice A .*

Důkaz. Označme k_1, \dots, k_r indexy bázových sloupců matice $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$. Matice $D = (\mathbf{d}_1 | \dots | \mathbf{d}_n)$ vznikla z A posloupností řádkových elementárních úprav, takže $D = RA$ pro nějakou regulární matici R řádu m . Matice C je v odstupňovaném tvaru, čísla k_1, \dots, k_r se shodují s definicí 2.10, $B = (\mathbf{a}_{k_1} | \dots | \mathbf{a}_{k_r})$ a navíc platí $\mathbf{d}_{k_i} = \mathbf{e}_i$ pro každé $1 \leq i \leq r$, tedy také $\mathbf{c}_{k_i} = \mathbf{e}_i$ (v tomto výrazu má \mathbf{e}_i jiný počet složek než v přechozím).

Dokážeme, že matice A a BC mají stejné sloupce s pořadovým číslem j . Triviálně to je splněné pro $j < k_1$ (na obou stranách jsou nulové sloupce). Jinak označme i největší takové číslo, že $j \geq k_i$. Sloupec j matice A je lineární kombinací bázových sloupců $\mathbf{a}_{k_1}, \dots, \mathbf{a}_{k_i}$, tedy pro nějaké prvky $t_1, \dots, t_i \in T$ platí

$$\mathbf{a}_j = t_1 \mathbf{a}_{k_1} + t_2 \mathbf{a}_{k_2} + \dots + t_i \mathbf{a}_{k_i} .$$

Vynásobením maticí R zleva a úpravou užitím $D = RA$ získáme

$$\mathbf{d}_j = R\mathbf{a}_j = t_1 R\mathbf{a}_{k_1} + \dots + t_i R\mathbf{a}_{k_i} = t_1 \mathbf{d}_{k_1} + \dots + t_i \mathbf{d}_{k_i} = t_1 \mathbf{e}_1 + \dots + t_i \mathbf{e}_i = (t_1, \dots, t_i, 0, \dots, 0)^T ,$$

tím pádem také

$$\mathbf{c}_j = (t_1, \dots, t_i, 0, \dots, 0)^T ,$$

kde vektor má tentokrát r složek. Sloupec j matice BC je proto

$$B\mathbf{c}_j = B(t_1, \dots, t_i, 0, \dots, 0) = t_1 \mathbf{a}_{k_1} + \dots + t_i \mathbf{a}_{k_i} = \mathbf{a}_j .$$

□

5.5.4. *Ještě jednou soustavy rovnic, dimenze jádra a obrazu.* Nyní si zopakujeme různé pohledy na řešení soustav lineárních rovnic a utřídíme již známé skutečnosti o existenci a tvaru řešení. Většina tvrzení již byla dokázána (hlavně ve větě 2.14), přesto některé důkazy stručně zopakujeme, aby vynikla elegance a užitečnost pojmů zavedených v této kapitole. (Navíc věta 2.14 byla formulována jen nad reálnými čísly, formálně jsme ji nedokazovali pro případ libovolného tělesa.)

Budeme předpokládat, že A je matice nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ a $\mathbf{b} \in T^m$. Na řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se můžeme dívat několika způsoby:

- (1) Hledání průniku m „nadrovin“ v prostoru T^n (každá rovnice, neboli řádek matice A , určuje jednu „nadrovinu“).
- (2) Hledání koeficientů lineárních kombinací sloupců matice A , jejímž výsledkem je \mathbf{b} .
- (3) Určování vzoru vektoru \mathbf{b} při zobrazení f_A .

Pomocí pojmu hodnost můžeme formulovat kritérium řešitelnosti.

Věta 5.88 (Frobeniova věta). *Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení právě tehdy, když $\text{rank}(A) = \text{rank}(A | \mathbf{b})$.*

Důkaz. Rovnost $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je pro nějaké $\mathbf{x} \in T^n$ splněna právě tehdy, když \mathbf{b} je lineární kombinací sloupců matice A , což platí právě tehdy, když $\text{Im } A = \text{Im}(A | \mathbf{b})$. Uvážíme-li, že $\text{Im } A \leq \text{Im}(A | \mathbf{b})$, vidíme, že podprostory jsou rovny právě tehdy, když se rovnají jejich dimenze (viz tvrzení 5.60). □

Prakticky, hodnosti vidíme z odstupňovaného matice soustavy, protože hodnost je rovna počtu nenulových řádků v odstupňovaném tvaru, takže kritérium ve Frobeniově větě se shoduje s předchozím kritériem na řešitelnost (neexistence řádku tvaru $(0, 0, \dots, 0, a)$, $a \neq 0$ v odstupňovaném tvaru).

Tvar řešení je určený řešením příslušné homogenní soustavy. Řešením je vždy posunutí podprostoru o nějaký vektor, tedy obecný rovný útvar.

Tvrzení 5.89. *Pokud je soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešitelná, pak množina všech jejích řešení je rovná množině*

$$\mathbf{u} + \text{Ker } A = \{ \mathbf{u} + \mathbf{w} : \mathbf{w} \in \text{Ker } A \} ,$$

kde \mathbf{u} je libovolné (partikulární) řešení soustavy.

Důkaz. Libovolný vektor tvaru $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in \text{Ker } A$ je řešením soustavy, protože $A(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{w} = \mathbf{b} + \mathbf{o} = \mathbf{b}$ (dokázali jsme vlastně (p3) z věty 2.14).

Naopak, pokud \mathbf{v} řeší soustavu $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, pak $\mathbf{v} \in \mathbf{u} + \text{Ker } A$, protože $\mathbf{v} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})$ a vektor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ leží v $\text{Ker } A$, jak ukazuje výpočet $A(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = A\mathbf{v} - A\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o}$ (zde znovu dokazujeme (p4) z věty 2.14). \square

Prostor $\text{Ker } A$ můžeme určit nalezením jeho báze. Označme $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-r}$ nebázové sloupce matice A (příslušným proměnné nazýváme volné). Každý prvek $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker } A$ (neboli každé řešení homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$) je jednoznačně určen vektorem $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-r}}) \in T^{n-r}$ (a naopak, libovolný vektor v T^{n-r} určuje jedno řešení). Toto jsme nahlédli v pozorování 2.13 použitím odstupňovaného tvaru, můžeme to ale dokázat přímo z definice báze (viz cvičení).

Bázi $\text{Ker } A$ můžeme získat volbou nějaké báze T^{n-r} (ve větě 2.14 jsme použili kanonickou bázi) a dopočítáním zbylých složek (prakticky provedeme z odstupňovaného tvaru; ve větě 2.14 jsme výsledné vektory značili \mathbf{v}_p). Dimenze $n - r$ prostoru $\text{Ker } A$ je rovná počtu nebázových sloupců, ta je rovná počet všech sloupců (to je n) minus počet báze (to je hodnota r matice A). Po úpravě dostáváme větu o dimenzi jádra a obrazu.

Věta 5.90 (Věta o dimenzi jádra a obrazu). *Pro libovolnou matici A nad \mathbf{T} typu $m \times n$ platí*

$$\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } A) = n \quad (= \dim(\text{Ker } A) + \text{rank}(A)) .$$

Příklad 5.91. Vrátime se k soustavě z části 2.3.4.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right) .$$

Převodem do odstupňovaného tvaru jsme získali

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

Vidíme, že $\dim(\text{Im } A) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 2$, takže soustava je řešitelná. Dimenze $\text{Ker } A$ je $6 - 2 = 4$. Partikulární řešení získáme dopočítáním z libovolné volby volných proměnných. V 2.3.4 jsme zvolili nulový vektor a dostali jsme vektor $(-1, 0, -3, 0, 0)^T$. Bázi $\text{Ker } A$ získáme dopočítáním z nějaké báze T^3 . V 2.3.4 jsme volili kanonickou bázi T^3 a získali jsme následující bázi $\text{Ker } A$: $((-2, 1, 0, 0, 0)^T, (-3, 0, 0, 1, 0)^T, (-2, 0, -2, 0, 1)^T)$. Celkově můžeme řešení psát ve tvaru

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Podívejme se ještě na geometrickou interpretaci věty o dimenzi jádra a obrazu. Matice A určuje zobrazení $f_A : T^n \rightarrow T^m$. Dimenze jádra určuje dimenzi prostoru vektorů, které se zobrazí na nulový vektor. To si můžeme představovat jako počet dimenzí, které zobrazení f_A „zkolabuje“ do bodu. Větu lze nyní interpretovat tak, že dimenze obrazu je rovná dimenzi prostoru, který zobrazujeme (n) minus počet zkolabovaných dimenzí. Například pokud $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je projekce na nějakou rovinu, pak $\dim(\text{Ker } A) = 1$ a $\text{rank}(A) = \dim(\text{Im } A) = 2$. Pro zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (viz obrázek ??), které „věrně“ zobrazuje rovinu do nějaké roviny v \mathbb{R}^3 , je $\dim(\text{Ker } A) = 0$ a $\text{rank}(A) = 2$.

5.6. Průnik a součet podprostorů.

Průnik dvou i více podprostorů nějakého vektorového prostoru je vždy podprostor.

Tvrzení 5.92. *Jsou-li $V_i, i \in I$ podprostory vektorového prostoru \mathbf{V} , pak $\bigcap_{i \in I} V_i$ je podprostorem \mathbf{V} .*

Důkaz. Stačí ověřit, že průnik je neprázdný a je uzavřený na sčítání a násobení skalárem (viz tvrzení 5.6). Průnik je neprázdný, protože obsahuje nulový vektor. Jsou-li \mathbf{u}, \mathbf{w} dva vektory z průniku, pak pro každé $i \in I$ platí $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V_i$. Protože V_i jsou podprostory, platí $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in V_i$ pro každé $i \in I$. To ale znamená, že $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ leží v průniku podprostorů V_i . Uzavřenost na násobení skalárem se dokáže podobně. \square

Sjednocení dvou podprostorů je zřídka podprostorem. Například sjednocení dvou různých přímek v \mathbb{R}^2 zřejmě není podprostorem, protože není uzavřený na sčítání. Nejmenší podprostor obsahující dané podprostory nazýváme jejich součet.

Definice 5.93. Nechť $V_i, i \in I$ jsou podprostory vektorového prostoru \mathbf{V} . *Součtem* (též *spojením*) podprostorů $V_i, i \in I$ rozumíme lineární obal jejich sjednocení, značíme jej $\sum_{i \in I} V_i$, tj.

$$\sum_{i \in I} V_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} V_i \right\rangle .$$

Součet podprostorů V_1, V_2, \dots, V_k také značíme $V_1 + V_2 + \dots + V_k$.

Jako cvičení dokažte, že součet je asociativní.

Při tvorbě lineárního obalu stačí sjednocení $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ uzavřít na součty vektorů z různých podprostorů, tj. platí

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{v_1 + v_2 + \dots + v_k : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_k \in V_k\} .$$

Důkaz přenecháme jako cvičení. Rovněž si všimněme, že sjednocením množiny generátorů prostoru \mathbf{U} a množiny generátorů prostoru \mathbf{V} je množina generátorů prostoru $\mathbf{U} + \mathbf{V}$.

Pro dimenze dvou podprostorů a jejich součtu a průniku platí podobný vztah jako pro počty prvků ve dvou množinách a jejich sjednocení a průniku.

Věta 5.94 (Věta o dimenzi součtu a průniku). *Pro libovolné dva konečně generované podprostory \mathbf{U}, \mathbf{V} vektorového prostoru \mathbf{W} platí*

$$\dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) + \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) .$$

Důkaz. Prostor $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ je podprostorem konečně generovaného prostoru \mathbf{U} , proto je konečně generovaný (viz tvrzení 5.60). Vezmeme libovolnou bázi $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ (báze existuje v libovolném konečně generovaném prostoru podle

důsledku 5.49). Množina B je lineárně nezávislá v prostoru \mathbf{U} , takže ji můžeme doplnit na bázi $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l)$ prostoru \mathbf{U} (viz důsledek 5.55). Podobně doplníme B na bázi $D = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ prostoru \mathbf{V} .

Ukážeme, že $E = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ je báze $\mathbf{U} + \mathbf{V}$. Posloupnost E generuje $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ podle poznámky nad větou (cvičení ??). Zbývá ukázat, že E je lineárně nezávislá. Předpokládejme, že

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^l b_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{o} .$$

Chceme dokázat, že všechny koeficienty jsou nutně nulové. Vztah drobně upravíme.

$$\sum_{i=1}^l b_i \mathbf{u}_i = - \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{w}_i$$

Vektor $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^l b_i \mathbf{u}_i$ leží v prostoru \mathbf{U} a také leží, podle odvozeného vztahu, v lineárním obalu vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$, čili v prostoru \mathbf{V} . Vektor \mathbf{u} tedy leží v průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ a proto jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ báze B .

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k d_i \mathbf{w}_i$$

Z toho získáme následující vyjádření \mathbf{o} jako lineární kombinaci prvků C :

$$\mathbf{o} = \sum_{i=1}^k d_i \mathbf{w}_i - \sum_{i=1}^l b_i \mathbf{u}_i ,$$

takže $b_1 = b_2 = \dots = b_l = d_1 = d_2 = \dots = d_k = 0$, protože C je lineárně nezávislá. .

Podobně bychom dokázali, že koeficienty c_1, c_2, \dots, c_m jsou rovněž všechny nulové. Nyní ale $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, protože B je lineárně nezávislá. \square

Věta se geometricky dobře představí, když si ze vztahu vyjádříme dimenzi součtu podprostorů jako součet dimenzí jednotlivých prostorů minus dimenze společné části (průniku). Věta se může hodit třeba při určování dimenze průniku, protože dimenze prostorů a jejich součtu nebývá problém spočítat.

Příklad 5.95. Určíme dimenzi průniku podprostorů $\mathbf{U}, \mathbf{V} \leq \mathbb{Z}_5^4$.

$$U = \left\langle \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right) \right\rangle, \quad V = \left\langle \left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle$$

Dimenzi U a V zjistíme tím, že si vektory napíšeme do řádků a řádkovými úpravami převedeme do odstupňovaného tvaru (víme, že hodnota se nemění ani sloupcovými úpravami, my ale později využijeme toho, že řádkové úpravy nemění lineární obal řádků).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = B$$

Vidíme, že $\dim(\mathbf{U}) = 2$ a $\dim(\mathbf{V}) = 2$. Nenulové řádky matice A generují \mathbf{U} a řádky matice B generují \mathbf{V} (protože elementární řádkové úpravy nemění lineární obal), takže dohromady máme množinu generátorů $\mathbf{U} + \mathbf{V}$, která už je částečně upravená. Dokončíme Gaussovu eliminaci.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vidíme, že $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 3$. Z věty o dimenzi součtu a průniku dostáváme

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 2 + 2 - 3 = 1 .$$

Příklad 5.96. Dokážeme, že průnikem dvou různých podprostorů \mathbf{U}, \mathbf{V} dimenze 2 (rovin) v prostoru \mathbf{W} dimenze 3 (např. \mathbb{R}^3) je podprostor dimenze 1 (přímka).

Protože podprostory \mathbf{U} a \mathbf{V} jsou různé, \mathbf{U} je vlastním podprostorem $\mathbf{U} + \mathbf{V}$. Podle tvrzení 5.60 o dimenzi podprostorů máme $2 = \dim \mathbf{U} < \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) \leq \dim(\mathbf{W}) = 3$, takže dimenze součtu je 3 (součet je podle stejného tvrzení celý prostor \mathbf{W}). Z věty o dimenzi součtu a průniku teď můžeme spočítat

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 2 + 2 - 3 = 1 .$$

Na rozdíl od sjednocení a průniku, pro součet a průnik **neplatí distributivní zákony**. Z toho důvodu také neplatí „přímocaré zobecnění“ věty o dimenzi součtu a průniku na případ tří podprostorů, viz cvičení.

Jak jsme si již všimli, každý vektor v součtu $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_k$ lze psát jakou součet $v_1 + v_2 + \dots + v_k$. Pokud je tento zápis jednoznačný hovoříme o direktním součtu. Tento pojem je obdobou pojmu báze pro podprostory.

Definice 5.97. Říkáme, že \mathbf{V} je *direktním součtem* podprostorů $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k$, pokud jsou splněny dvě podmínky.

- (1) $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_k$
- (2) $\mathbf{V}_i \cap (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_{i-1} + \mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+2} + \dots + \mathbf{V}_k) = \{\mathbf{o}\}$ pro libovolné $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Skutečnost, že \mathbf{V} je direktním součtem $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k$ zapisujeme

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_k .$$

Pro dva podprostory $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ se podmínky zjednoduší na $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$ a $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{o}\}$

Tvrzení 5.98. *Nechť $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k$ jsou podprostory vektorového prostoru \mathbf{V} . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_k$.
- (2) Každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ lze zapsat právě jedním způsobem ve tvaru $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k$, kde $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_k$. Pak \mathbf{V} je součtem podprostorů $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k$, takže každý vektor $\mathbf{v} \in V$ lze zapsat ve tvaru $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$, kde $v_i \in V_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. K důkazu jednoznačnosti uvažujme dvě taková vyjádření

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 + \cdots + \mathbf{v}'_k .$$

Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ leží vektor $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i$ v prostoru \mathbf{V}_i , ale také v součtu zbylých podprostorů, jak je vidět z vyjádření

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2) + \cdots + (\mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}'_{i-1}) + (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}'_{i+1}) + \cdots + (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}'_k) .$$

Podle podmínky (2) z definice direktního součtu platí $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i$, čili $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$.

Předpokládejme naopak, že platí podmínka (2). Pak $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_k$. Pro spor předpokládejme, že pro nějaké i existuje nenulový vektor \mathbf{u} v průniku \mathbf{V}_i a $\sum_{j \neq i} \mathbf{V}_j$. Pak existují $a_1, a_2, \dots \in T$ taková, že

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + a_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + 0 \mathbf{v}_i + a_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \cdots + a_k \mathbf{v}_k \\ &= 0 \mathbf{v}_1 + 0 \mathbf{v}_2 + \cdots + 0 \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{u} + 0 \mathbf{v}_{i+1} + \cdots + 0 \mathbf{v}_k . \end{aligned}$$

Dostali jsme dvě různá vyjádření vektoru \mathbf{u} jako součet vektorů z V_1, V_2, \dots, V_k , spor. \square

Direktní součet lze chápat jako rozklad podprostoru na vzájemně nezávislé části. Všimněte si, že \mathbf{V} je direktním součtem jednodimenzionálních podprostorů $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \langle \mathbf{v}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{v}_k \rangle$ právě tehdy, když $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je báze.

5.7. Prostory nekonečné dimenze.

Pro zjednodušení jsme pojmy lineární nezávislosti a báze definovali pro konečně posloupnosti vektorů, a tím pádem jsme mohli dokazovat některá tvrzení jen pro konečně generované prostory. V této části stručně probereme obecný případ. Příklady prostorů, které nejsou konečně generované, zahrnují prostor reálných funkcí reálné proměnné, nebo reálná čísla chápaná jako vektorový prostor nad \mathbb{Q} .

Lineární (ne)závislost a bázi definujeme jako indexovaný soubor vektorů:

Definice (Zobecnění definic 5.25 a 5.38). Soubor $(\mathbf{v}_i : i \in I)$ vektorů ve \mathbf{V} nazýváme *lineárně závislý*, pokud některý z vektorů \mathbf{v}_i je lineární kombinací ostatních vektorů $\mathbf{v}_j, j \neq i$. V opačném případě říkáme, že je soubor *lineárně nezávislý*.

Bázi rozumíme lineárně nezávislý soubor generátorů.

Tato definice skutečně rozšiřuje stávající definici, protože posloupnost n vektorů můžeme chápat jako soubor indexovaný množinou $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Připomeňme, že v lineární kombinaci může mít nenulový koeficient pouze konečně mnoho vektorů, součet nekonečně mnoha vektorů nemáme definován. Tedy například v prostoru \mathbb{R}^ω všech nekonečných posloupností reálných čísel soubor $(\mathbf{e}_i : i \in \mathbb{N})$, kde $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ s jedničkou na i -tém místě, negeneruje \mathbb{R}^ω . Tento soubor generuje podprostor $\mathbb{R}^{(\omega)}$ všech posloupností s konečným počtem nenulových členů a je jeho bázi.

Mnoho dokázaných tvrzení lze zobecnit, konkrétně platí obdoby následujících tvrzení. Důkazy dělat nebudeme.

- Tvrzení 5.27 charakterizující lineární nezávislost.
- Pozorování 5.39, které říká, že každý vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze. To umožňuje zavést souřadnice vektoru vzhledem k bázi. Roli aritmetických vektorových prostorů hrají prostory $\mathbf{T}^{(I)}$: Vektory jsou

„skoro všude nulové“ I -tice prvků tělesa I , formálněji, soubory $(a_i : i \in I)$, takové, že všechna $a_i \in T$ až na konečný počet jsou nulové. Operace jsou definovány po složkách. Obdoba tvrzení 5.65 o souřadnicích a operacích i obdoba pozorování 5.67 o zachovávání důležitých vlastností jako lineární nezávislost platí.

- Minimální soubor generátorů je vždy báze (obdoba tvrzení 5.47). Obdoba důsledku 5.48, tj. že z každé množiny generátorů lze vybrat bázi platí, ale není to zřejmé, protože není apriori jasné, že minimální generující podmnožina existuje. Speciálně, každý konečně generovaný vektorový prostor má bázi (obdoba důsledku 5.49). Poznamenejme, že důkaz vyžaduje axiom výběru.
- Všechny báze mají stejnou mohutnost (obdoba důsledku 5.52), takže má smysl zavést dimenzi jako mohutnost libovolné báze. Rovněž platí obdoba důsledku 5.55, že libovolný lineárně nezávislý soubor lze doplnit do báze vektory z libovolné množiny generátorů. Z toho plyne obdoba důsledku 5.56, že maximální lineárně nezávislý soubor je báze.
- Obdoba tvrzení 5.60 platí jen částečně. Je pravda, že podprostor má vždy dimenzi menší nebo rovnou dimenzi původního prostoru. Není ale pravda, že rovnost nastane pouze tehdy, když se prostory rovnají. Například dimenze prostoru $\mathbb{R}^{(\omega)}$ skoro všude nulových posloupností je stejná jako dimenze jeho vlastního podprostoru tvořeného posloupnostmi, které začínají nulou.

5.8. Samoopravné kódy. Představíme základní pojmy teorie samoopravných kódů a ukážeme si, jak se v ní uplatňuje lineární algebra.

5.8.1. Kódy neformálně. V roce 1947 byl v Bellových laboratořích v provozu jeden z prvních reléových počítačů. Relé byla uspořádána do pětic. Jednotlivé cifry $0, 1, \dots, 9$ byly reprezentovány tak, že vždy dvojice z pěti relé byla sepnuta a zbylá tři nikoliv. Protože existuje deset možných výběrů dvojice prvků z pěti, každá z dvojic reprezentovala právě jednu cifru.

Pokud během výpočtu došlo k nějaké chybě, projevila se tak, že v nějaké pětici relé byl počet sepnutých relé různý od dvou. Počítač to zaregistroval a zastavil se. V té chvíli nastoupila obsluha, nějakým způsobem zjistila, jaká dvojice relé má být správně sepnuta, ručně to zařídila, a spustila pokračování výpočtu.

V režimu bez obsluhy (mimo pracovní dobu) počítač výpočet ukončil a ze zásobníku programů vzal ten následující. Toto ukončování výpočtu bez náhrady motivovalo Richarda W. Hamminga (1915-1998) k návrhu prvních *samoopravných kódů*.

Bellův počítač pracoval s desetiprvkovou abecedou $0, 1, \dots, 9$. Každou z těchto cifer reprezentoval pomocí posloupnosti pěti nul a jednotek: 00110, 01010, atd. *Binární* vyjádření prvků nějaké abecedy jako posloupnosti nul a jednotek je v současnosti tak běžné, že je považujeme za samozřejmé. Tak například odpovědi v testu s výběrem ze čtyř možností a, b, c, d můžeme přeložit do binárního vyjádření třeba následovně:

$$a = 00, b = 01, c = 10, d = 11.$$

Vyplněný test s 90 otázkami a nabídkou čtyř možných odpovědí je pak totéž, co posloupnost 180 nul a jednotek. Analogicky můžeme zapsat celý genetický kód člověka, použijeme-li překlad

$$G = 00, C = 01, T = 10, H = 11.$$

Zápis bude jenom o něco delší.

Morseova abeceda je příklad jiného kódování. Používá sice také jenom dva symboly - tečka, čárka - ale mezi symboly do abecedy je třeba také zařadit mezeru. To je cena, kterou je nutné zaplatit za to, že posloupnosti teček a čárek reprezentující různá písmena abecedy mohou mít různou délku a Morseova volba byla taková, že vyjádření jednoho písmene může být počátečním úsekem jiného písmene. Např. $e = \cdot$, $a = \cdot -$.

My se budeme v dalším zabývat pouze kódováním, které každému symbolu původní abecedy přiřazuje posloupnost n nul a jedniček pro nějaké pevné n .

Definice 5.99. *Binární blokový kód* délky n je libovolná podmnožina C aritmetického vektorového prostoru \mathbb{Z}_2^n . Prvkům C říkáme *slova* nebo také *bloky* kódu C . *Zprávou* v kódu C potom rozumíme posloupnost slov kódu C .

Tak například, je-li $C = \{000, 001, 010, 001, 110, 111\}$ kód délky 3, pak posloupnost

000 111 110 010 001

je zpráva v tomto kódu. Mezery mezi jednotlivými slovy kódu děláme pro pohodlí. Také vynecháváme závorky při zápisu vektorů a čárky mezi jejich složkami, jak je v teorii kódování běžné. Stejná délka jednotlivých bloků v binárním kódu umožňuje jednoznačně interpretovat tutéž zprávu zapsanou bez mezer

000111110010001.

Zprávu zapsanou v jakémkoliv abecedě s konečným počtem symbolů můžeme jednoznačně zakódovat pomocí bloků binárního kódu vhodné délky n . Stačí pouze, aby bylo číslo 2^n aspoň tak velké jako počet znaků v původní abecedě.

V této "digitalizované" podobě můžeme zprávu přenést nějakým *komunikačním kanálem*. Pokud je kanál bez jakéhokoliv šumu, není žádné nebezpečí, že přijímající strana přijme zprávu v jiné podobě, než v jaké byla vyslána. Takové kanály ale v reálném světě neexistují, vždy je nenulová pravděpodobnost, že některá z cifer 0 nebo 1 se během přenosu změní na opačnou. Pro kanály se šumem nejsou blokové kódy typu $C = \mathbb{Z}_2^n$ vhodné. Skutečnost, že každý blok z n cifer 0 nebo 1 je kódovým slovem, znamená že přijímající strana nemá možnost poznat, že během přenosu zprávy byl nějaký blok pozměněn. Každý přijatý blok mohl být také vyslán.

Řešením je nepoužívat jako kódová slova všechny bloky dané délky n , ale pouze některé. Pokud jsou kódová slova dobře vybrána, může přijímající strana poznat, že během přenosu bloku zprávy došlo k nějaké chybě díky tomu, že přijme posloupnost délky n , která není kódovým slovem. Takový blok vysílající strana nemohla vyslat. Daní, kterou je nutné za to zaplatit, je snížení *rychlosti přenosu informace*, množství informace, kterou kanálem přeneseme za jednotku času. Do kódu vnášíme *nadbytečnost*, cizím slovem *redundanci* - pro přenášení informace používáme více symbolů, než kolik je potřeba. nadbytečnost ale umožňuje odhalovat a opravovat chyby při přenosu dat.

Nejjednodušší způsob jak bojovat se šumem, je vyslat každý blok dvakrát po sobě. Příkladem takového *opakovacího kódu* je následující kód délky 4:

$$C = \{0000, 0101, 1010, 1111\}.$$

Každé slovo má dvě části. První dva symboly jsou *informační symboly*, zbylé dva jsou *kontrolní symboly*. Kontrolní symboly nenesou žádnou informaci, pouze opakují předchozí dva symboly. Z každých čtyř symbolů vyslaného slova pouze první dva

nesou informaci. Rychlost přenosu informace pomocí takového kódu je poloviční oproti rychlosti přenosu informace kódem $D = \{00, 01, 10, 11\}$.

Narozdíl od kódu D ale kód C umožňuje přijímající straně poznat, pokud během přenosu slova došlo k jedné chybě. První a druhá polovina přijatého čtyřprvkového bloku se v takovém případě liší. Říkáme, že kód C *odhalí jednu chybu*.

V opakovacím kódu můžeme počáteční informační část opakovat vícekrát. Kód

$$\{000, 111\} \subseteq \mathbb{Z}_2^3$$

obsahuje pouze dva bloky, v každém z nich se první symbol opakuje třikrát. Je to příklad *3-opakovacího kódu*. Jiným příkladem 3-opakovacího kódu je

$$\{000000, 010101, 101010, 111111\} \subseteq \mathbb{Z}_2^6,$$

ve kterém opakujeme třikrát vždy první dva informační symboly. Rychlost přenosu informace kterýmkoliv z těchto dvou kódů je $1/3$. V každém bloku je pouze jedna třetina symbolů informačních, zbylé dvě třetiny jsou kontrolní.

Každý 3-opakovací kód odhalí jednu chybu – změněme-li v libovolném bloku jeden symbol, dostaneme slovo, které do kódu nepatří. Oproti prostému opakovacímu kódu ale dokáže navíc *lokalizovat (opravit) jednu chybu*. Ukážeme si to na příkladu, kdy vyslaný blok 010101 přijme přijímající strana jako 010001. Graficky to znázorníme takto:

$$010101 \longrightarrow 010001.$$

Rozdělíme-li libovolné slovo 3-opakovacího kódu na tři stejně dlouhé úseky, jsou tyto úseky stejné. Tak jsou kódová slova definována. Pokud tomu tak u přijatého slova není, došlo během přenosu informace k nějaké chybě. Pokud došlo k jedné chybě, dva z těchto úseků zůstanou stejné, třetí (ten, ve kterém se chyba vyskytla) se od nich liší. Předpokládáme, že vysláno bylo to kódové slovo, ve kterém se všechny tři úseky rovnají těm dvěma stejným přijatým. Je to jediná možnost, jak z přijatého slova dostat kódové slovo změnou jediného symbolu. V našem případě změněme čtvrtý přijatý symbol z 0 na 1 a dostaneme kódové slovo. Jakékoliv jiné kódové slovo dostaneme z přijatého pomocí změny aspoň dvou symbolů. Například tak, že obě přijaté 1 změněme na 0.

Pokud předpokládáme, že pravděpodobnost změny symbolu vlivem šumu je $p < 1/2$, a tedy pravděpodobnost, že symbol byl přijatý správně (tj. tak jak byl vyslán) je $1 - p > 1/2 > p$, pak v případě přijetí nekódového slova je nejpravděpodobnější, že bylo vysláno to slovo, které se od přijatého liší v co nejméně symbolech.

5.8.2. *Hammingova vzdálenost*. Pro teorii samoopravných kódů je následující definice klíčová.

Definice 5.100. Jsou-li $\mathbf{a} = a_1a_2 \cdots a_n$ a $\mathbf{b} = b_1b_2 \cdots b_n$ libovolné dva prvky \mathbb{Z}_2^n , pak jejich *Hammingova vzdálenost* $h(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ se rovná počtu indexů $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro které platí $a_i \neq b_i$. *Hammingova váha* slova $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n$ je definována jako Hammingova vzdálenost $h(\mathbf{a}, \mathbf{o})$ slova \mathbf{a} od nulového slova \mathbf{o} .

Hammingova vzdálenost je tak definována pro posloupnosti téže délky a rovná se počtu míst (indexů), na kterých se obě posloupnosti liší. Hammingova váha slova \mathbf{a} se pak rovná počtu cifer 1 ve slově \mathbf{a} . Pro Hammingovu vzdálenost zřejmě platí $h(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ a $h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = h(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ pro libovolná dvě slova $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^n$. Platí také trojúhelníková nerovnost

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + h(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

pro libovolná tři slova $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_2^n$. Snadno si to ověříte sami. Pokud totiž pro nějaký index $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $a_i \neq c_i$, platí také $a_i \neq b_i$ nebo $b_i \neq c_i$. Jestliže index i přispívá ke vzdálenosti $h(\mathbf{a}, \mathbf{c})$, přispívá také k aspoň jedné ze vzdáleností $h(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ nebo $h(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Hammingovu vzdálenost si můžeme také představit pomocí délky (počtu hran) cest v nějakém neorientovaném grafu. Jeho vrcholy jsou prvky \mathbb{Z}_2^n a dva vrcholy \mathbf{a}, \mathbf{b} jsou spojené hranou pokud se liší v právě jednom symbolu, tj. pokud je jejich Hammingova vzdálenost rovná 1. Pro $n = 2$ se tento graf rovná čtverci, pro $n = 3$ je jím třídimenzionální krychle. Hammingova vzdálenost libovolných dvou vrcholů $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^n$ se pak rovná délce (tj. počtu hran) v nejkratší cestě z \mathbf{a} do \mathbf{b} . Proto se také někdy tomuto grafu říká *Hammingova krychle* i v případě libovolného n .

Pro schopnost kódu odhalovat a lokalizovat chyby je důležitý pojem minimální vzdálenost kódu.

Definice 5.101. Je-li $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ binární blokový kód délky n , pak definujeme *minimální vzdálenost* kódu C jako číslo

$$h(C) = \min\{h(\mathbf{a}, \mathbf{b}); \mathbf{a}, \mathbf{b} \in C, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}\}.$$

Příklad 5.102.

- Minimální vzdálenost 3-opakovacího kódu $\{000, 111\}$ se rovná 3.
- Minimální vzdálenost opakovacího kódu $\{0000, 0101, 1010, 1111\}$ se rovná 2.
- Minimální vzdálenost kódu používaného v roce 1947 v reléovém počítači v Bellových laboratořích se rovná 2.
- Minimální vzdálenost kódu $C = \mathbb{Z}_2^n$ se rovná 1.

Nyní můžeme přesně formulovat, co myslíme tím, že nějaký kód $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ odhalí jednu chybu. Pokud při přenosu slova $\mathbf{a} \in C$ dojde k jedné chybě, přijímající strana to pozná, přijme-li v takovém případě slovo, které není prvkem C . Znamená to, že žádné slovo $\mathbf{b} \in C$, jehož Hammingova vzdálenost od \mathbf{a} se rovná 1, není blokem kódu C . Jinak řečeno, Hammingova vzdálenost libovolných dvou různých kódových slov $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ je aspoň 2, a to znamená, že minimální vzdálenost kódu C je aspoň 2.

Každý kód C , jehož minimální vzdálenost je $d > 1$, odhalí až $d - 1$ chyb. Pokud při přenosu slova $\mathbf{a} \in C$ dojde k nejvýše $d - 1$ chybám, přijímající strana přijme slovo \mathbf{c} , jehož Hammingova vzdálenost od vyslaného slova \mathbf{a} je nejvýše $d - 1$. Slovo \mathbf{c} tak nepatří do kódu C , a přijímající strana proto odhalí, že při přenosu došlo k nějakým chybám. Počet chyb ale jednoznačně nezjistí stejně jako kde k nim došlo.

Předpokládejme nyní, že minimální vzdálenost nějakého kódu $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ se rovná 3. Pokud při přenosu slova \mathbf{a} dojde k jedné chybě, přijímající strana přijme slovo \mathbf{c} , které má od slova \mathbf{a} Hammingovu vzdálenost $h(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 1$. Vzdálenost přijatého slova \mathbf{c} od jakéhokoliv jiného slova $\mathbf{b} \in C$ je v důsledku trojúhelníkové nerovnosti

$$h(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \geq h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - h(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \geq 3 - 1 = 2,$$

použili jsme navíc skutečnost, že minimální vzdálenost kódu C je 3, a tedy $h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 3$ pro jakékoliv dva různé bloky $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$.

Vyslané slovo \mathbf{a} je tedy ze všech možných vyslaných slov $\mathbf{b} \in C$ nejbližší (vzhledem k Hammingově vzdálenosti) k přijatému slovu \mathbf{c} . Předpokládáme, že pravděpodobnost poškození přenášeného symbolu šumem v kanálu je $p < 1/2$ a tedy menší než pravděpodobnost $1 - p$ že k poškození symbolu nedošlo. V případě přijetí slova

\mathbf{c} je nejpravděpodobnější, že bylo vysláno slovo $\mathbf{a} \in C$, které je ze všech slov kódu C nejbližší k přijatému slovu \mathbf{c} . V tomto smyslu tedy kód s minimální vzdáleností 3 dokáže opravit (lokalizovat) jednu chybu.

Zcela analogicky lze odvodit, že kód s minimální vzdáleností $2d + 1$ dokáže opravit d chyb. Schopnost kódu odhalovat a opravovat daný počet chyb je tak dána jeho minimální vzdáleností.

5.8.3. *Paritní kód, lineární kódy.* Nejjednodušší příklad kódu, který je schopen odhalit jednu chybu, je *paritní kód*.

Definice 5.103. *Paritní kód* délky n je podmnožina $S \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ tvořená všemi slovy, které obsahují sudý počet jednotek.

Minimální vzdálenost paritního kódu S je 2, paritní kód tedy dokáže odhalit jednu chybu. Známe-li $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, existuje právě jedno $a_n \in \{0, 1\}$ takové, že slovo $\mathbf{a} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \in S$. Prvních $n - 1$ symbolů ve slově \mathbf{a} tak můžeme považovat za informační symboly, zatímco poslední symbol a_n je kontrolní. Nenesou žádnou dodatečnou informaci, lze je doplnit na základě znalosti $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$. Proto se kontrolnímu bitu říká také *paritní bit* nebo *paritní kontrola*. Samozřejmě můžeme za kontrolní bit považovat kterýkoliv symbol ve slově \mathbf{a} a zbylé symboly za informační. Obvyklé ale bývá seřadit symboly v kódovém slově tak, že informační symboly jsou na začátku a kontrolní symboly následují po nich. Rychlost přenosu informace paritním kódem je tak $n - 1/n$.

Kódy, které dokážou nejen odhalit, ale i opravit chyby se konstruují kombinací více paritních kontrol.

Paritní kód S délky n má jednu důležitou vlastnost. Tvoří nejenom podmnožinu \mathbb{Z}_2^n , ale dokonce podprostor. Obsahuje totiž nulové slovo \mathbf{o} , je proto uzavřený na násobení skaláry ze \mathbb{Z}_2 a zřejmě také na sčítání. Takové kódy jsou důležité a zaslouží si zvláštní pojmenování.

Definice 5.104. Binární blokový kód $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ délky n se nazývá *lineární kód*, je-li C podprostor \mathbb{Z}_2^n . Je-li dimenze C rovna r , říkáme také, že jde o *lineární (n, r) -kód*.

Minimální vzdálenost lineárních kódů lze zjistit snáze než u obecných kódů.

Tvrzení 5.105. *Minimální vzdálenost lineárního kódu C se rovná*

$$\min\{h(\mathbf{a}, \mathbf{o}); \mathbf{a} \in C, \mathbf{a} \neq \mathbf{o}\},$$

tj. rovná se minimální Hammingově váze nenulových prvků C .

Důkaz. Připomeňme si, že minimální vzdálenost kódu C označujeme $h(C)$. Je-li C lineární kód, platí $\mathbf{o} \in C$ a $h(\mathbf{a}, \mathbf{o}) \geq h(C)$ pro libovolné nenulové slovo $\mathbf{a} \in C$. Dále platí pro libovolná dvě slova $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$, že

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = h(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{o}).$$

Je-li tedy $h(C) = h(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, platí, že $h(C)$ se rovná Hammingově váze vektoru $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. □

Je-li C lineární (n, r) -kód, má prostor C dimenzi r . Zvolíme-li v něm nějakou bázi $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$, je každý prvek \mathbf{b} kódu (podprostoru) C jednoznačně určen r -ticí jeho souřadnic vzhledem ke zvolené bázi. K jeho jednoznačnému určení nám tedy stačí posloupnost koeficientů lineární kombinace, která vyjadřuje \mathbf{b} pomocí prvků zvolené báze. Naopak, každá posloupnost r nul a jednotek určuje jednoznačně nějaký prvek

kódu C . To jenom jinak vyjadřujeme skutečnost, že C je izomorfní aritmetickému prostoru \mathbb{Z}_2^r . K předání informace o bloku \mathbf{b} nám tedy stačí předat r koeficientů vyjadřujících \mathbf{b} jako lineární kombinaci báze $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$. Kód C ale předává celý vektor \mathbf{b} délky n . Intuitivně tak můžeme říct, že rychlost přenosu informace lineárním (n, r) -kódem je r/n .

5.8.4. *Hammingovy kódy.* Hamming předložil tři konstrukce kódů, které opravují jednu chybu. Všechny tři jsou založené na kombinaci několika paritních testů. Všechny tři návrhy jsou lineární kódy. Jejich konstrukci si ukážeme na příkladu, který má čtyři informační symboly. Protože kódy mají opravovat jednu chybu, musí být jejich minimální vzdálenost 3.

Příklad 5.106. V první konstrukci si čtyři informační symboly a, b, c, d napíšeme do prvních dvou řádků a prvních dvou sloupců čtvercové matice řádu 3.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & ? \\ c & d & ? \\ \hline ? & ? & ? \end{array} \right)$$

Místo otazníků doplníme další prvky tak, aby v každém řádku a každém sloupci byl sudý počet jednotek. Doplněná matice je

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & r_1 \\ c & d & r_2 \\ \hline s_1 & s_2 & t \end{array} \right),$$

kde

$$r_1 = a + b, \quad r_2 = c + d, \quad s_1 = a + c, \quad s_2 = b + d, \quad t = s_1 + s_2 = a + b + c + d = r_1 + r_2.$$

Celé kódové slovo je potom $abr_1cdr_2s_1s_2t$. Informační symboly jsou na prvním, druhém, čtvrtém a pátém místě, zbylé symboly jsou kontrolní.

Kód C je tvořen všemi slovy $\mathbf{a} = a_1a_2 \cdots a_9 \in \mathbb{Z}_2^9$, pro která platí

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + a_2 \\ a_6 &= a_4 + a_5, \\ a_7 &= a_1 + a_4, \\ a_8 &= a_2 + a_5, \\ a_9 &= a_1 + a_2 + a_4 + a_5. \end{aligned}$$

Prvky a_1, a_2, a_4, a_5 můžeme zvolit libovolně a právě uvedené rovnosti ukazují, že matice

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline a_7 & a_8 & a_9 \end{array} \right)$$

splňuje všechny požadované paritní testy, tj. každý řádek a každý sloupec obsahuje sudý počet jednotek.

Z konstrukce kódu také snadno nahlédneme, že kód C opravuje jednu chybu. Pokud totiž při přenosu slova $\mathbf{a} = a_1a_2 \cdots a_9 \in C$ dojde k jedné chybě, přijaté slovo nebude splňovat dva paritní testy, jeden pro řádek a druhý pro sloupec, ve kterých leží chybně přijatý symbol. Tyto dva neplatné paritní testy tak přesně určují polohu poškozeného symbolu.

Kód C je lineární, protože jeho prvky jsou právě všechna řešení $x_1x_2 \cdots x_9$ homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Třetí sloupec spolu s posledními čtyřmi sloupci jsou lineárně nezávislé, hodnost matice A je tedy aspoň 5, řádky matice A jsou tedy lineárně nezávislé, $\text{rank}(A) = 5$, dimenze $\text{Ker}(A)$ je tudíž podle věty o dimenzi jádra a obrazu rovna $9 - 5 = 4$ a počet prvků kódu C je 16.

Přijímající strana tak snadno ověří, patří-li přijaté slovo $\mathbf{c} = c_1c_2 \cdots c_9$ do kódu C . Stačí ověřit rovnost $A\mathbf{c}^T = \mathbf{0}^T$.

Poslední pozorování vede k následující důležité definici.

Definice 5.107. Je-li C lineární (n, r) -kód a pro matici A typu $(n - r) \times n$ platí, že $C = \text{Ker } A$, pak matici A nazýváme *kontrolní matice* kódu C .

Z definice kontrolní matice a z věty o dimenzi jádra a obrazu matice plyne, že $\text{rank}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = n - r$, tj. že posloupnost řádků matice A je lineárně nezávislá. Později si ukážeme obecné tvrzení, ze kterého plyne existence kontrolní matice pro jakýkoliv lineární kód. Ve skutečnosti jsou lineární kódy zadávány tak, že napíšeme jejich kontrolní matici.

Pomocí kontrolní matice můžeme snadno zjistit, jaká je minimální vzdálenost lineárního kódu.

Tvrzení 5.108. *Nechť C je (n, r) -lineární kód a A jeho kontrolní matice. Minimální vzdálenost kódu C se rovná d právě když libovolná $(d - 1)$ -prvková podposloupnost sloupců matice A je lineárně nezávislá a existuje d -prvková podposloupnost sloupců A , která je lineárně závislá.*

Důkaz. Kontrolní matice $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ kódu C je typu $(n - r) \times n$. Nechť $\mathbf{x} = x_1x_2 \cdots x_n$ je nenulový prvek kódu C . Pak platí $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$, neboli

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}^T.$$

Je-li l Hammingova váha prvku \mathbf{x} a $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$ jsou všechny nenulové složky vektoru \mathbf{x} , pak platí rovněž

$$x_{j_1}\mathbf{a}_{j_1} + x_{j_2}\mathbf{a}_{j_2} + \cdots + x_{j_l}\mathbf{a}_{j_l} = \mathbf{0}^T,$$

l -prvková podposloupnost sloupcových vektorů $\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_l}$ je tedy lineárně závislá.

Jestliže naopak existuje lineárně závislá podposloupnost $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_m}$ sloupcových vektorů matice A , existují prvky $x_{i_j} \in \mathbb{Z}_2$, ne všechny nulové, takové, že

$$x_{i_1}\mathbf{a}_{i_1} + x_{i_2}\mathbf{a}_{i_2} + \cdots + x_{i_m}\mathbf{a}_{i_m} = \mathbf{0}^T.$$

Doplňme tuto lineární kombinaci zbývajících sloupcovými vektory matice A s koeficienty $x_i = 0$. Vektor $\mathbf{x} = x_1 \cdots x_n$ pak splňuje $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$, je tedy blokem kódu C a jeho Hammingova váha je nejvýše m .

Je-li tedy minimální vzdálenost kódu C rovna d , je podle Tvrzení 5.105 minimální Hammingova váha nenulových vektorů v C rovna d . Každá podposloupnost $d - 1$

sloupcových vektorů matice A je tedy lineárně nezávislá a existuje podposloupnost d sloupcových vektorů matice A , která je lineárně závislá.

Jestliže naopak je každá podposloupnost $d - 1$ sloupcových vektorů matice A lineárně nezávislá, neobsahuje C nenulový vektor, který by měl Hammingovu váhu menší nebo rovnou $d - 1$. Pokud je navíc nějaká d -prvková podposloupnost sloupcových vektorů A lineárně závislá, existuje v $C = \text{Ker } A$ nenulový vektor, jehož Hammingova váha je nejvýše d . Minimální Hammingova váha nenulových vektorů v C je tedy rovna d . \square

Příklad 5.109. Kontrolní matice A kódu C z Příkladu 5.106 neobsahuje nulový sloupcový vektor, každá jednoprvková podposloupnost sloupcových vektorů matice A je tedy lineárně nezávislá. Libovolné dva sloupcové vektory matice A jsou různé, lineárně nezávislá je proto rovněž každá dvouprvková podposloupnost sloupcových vektorů v A . Platí dokonce, že žádný ze sloupcových vektorů se nerovná součtu jiných dvou sloupcových vektorů, a tak každá tříprvková podposloupnost sloupců matice A je lineárně nezávislá. Naproti tomu první sloupcový vektor se rovná součtu jiných tří sloupcových vektorů, existuje tedy čtyřprvková lineárně závislá podposloupnost sloupcových vektorů matice A . Minimální vzdálenost kódu C je tedy 4.

Kód C tak opraví jednu chybu a odhalí až tři chyby. Rychlost přenosu informace tímto kódem je $4/9$, což je zlepšení oproti 3-opakovacímu kódu, který také dokáže opravit jednu chybu.

Příklad 5.110. Druhý kód, který Hamming navrhnul, se od toho prvního liší v tom, že nepoužívá paritní kontrolu třetího řádku a třetího sloupce, tj. nepotřebuje prvek t . Matici

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & ? \\ c & d & ? \\ ? & ? & ? \end{array} \right)$$

doplní na matici

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & r_1 \\ c & d & r_2 \\ s_1 & s_2 & \end{array} \right),$$

kde

$$r_1 = a + b, \quad r_2 = c + d, \quad s_1 = a + c, \quad s_2 = b + d.$$

Jde opět o lineární kód, označme jej D . Kontrolní matici tohoto kódu dostaneme tak, že z kontrolní matice původního kódu vynecháme poslední řádek a poslední sloupec. Dostaneme tak matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Libovolná dvouprvková podposloupnost sloupců matice B je lineárně nezávislá ze stejného důvodu, jako v případě prvního Hammingova návrhu. Existují lineárně závislé tříprvkové podposloupnosti sloupců v B . Minimální vzdálenost kódu D je tak rovna 3, kód dokáže opravit jednu chybu a odhalit až dvě chyby. Rychlost přenosu informace kódem D je $1/2$, což je další vylepšení.

Může kód se čtyřmi informačními symboly opravovat jednu chybu a současně přenášet informaci rychlostí větší než $1/2$? Ukážeme si tvrzení, které ukazuje, že by to mohlo jít ještě o něco rychleji.

Tvrzení 5.111. *Předpokládejme, že kód délky n má r informačních symbolů a $n-r$ kontrolních symbolů. Pokud opravuje jednu chybu, musí platit*

$$\frac{2^n}{n+1} \geq 2^r.$$

Důkaz. Kód C délky n , který má r informačních symbolů, musí obsahovat aspoň 2^r různých slov. Každá volba informačních symbolů musí vést k nějakému kódovému slovu, různé volby k různým slovům. Jinak by dekódování nebylo jednoznačné.

Využijeme geometrické představy kódu jako podmnožiny vrcholů Hammingovy krychle. Pro každý vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n$ nazveme 1-okolí slova \mathbf{a} množinu

$$V_1(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n; h(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leq 1\}.$$

Snadno nahlédneme, že 1-okolí každého vektoru \mathbf{a} obsahuje přesně $n+1$ prvků.

Má-li kód C opravovat jednu chybu, musí být jeho minimální vzdálenost aspoň 3. To znamená, že pro libovolná dvě různá kódová slova $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ musí být jejich 1-okolí disjunktní. V opačném případě by totiž v důsledku trojúhelníkové nerovnosti pro Hammingovu vzdálenost platilo $h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq 2$, což je spor s tím, že minimální vzdálenost kódu je aspoň 3.

Sjednotíme-li všechna 1-okolí všech slov $\mathbf{a} \in C$, bude mít toto sjednocení aspoň $2^r(n+1)$ prvků. Tento počet musí být menší nebo rovný počtu všech prvků (vrcholů Hammingovy krychle) \mathbb{Z}_2^n , tj. 2^n . Odtud po snadné úpravě vyplývá dokazovaná nerovnost. \square

Analogickou nerovnost můžeme dokázat pro kódy, které opravují d chyb, podrobnosti ve cvičeních.

Pro $r = 4$ a $n = 6$ platí $2^4 \cdot 7 > 2^6$, kód délky 6 se čtyřmi informačními symboly, který by opravoval jednu chybu proto neexistuje.

V případě $n = 7$ platí rovnost $2^4 \cdot 8 = 2^7$, existence kódu délky 7 se čtyřmi informačními symboly, který opravuje jednu chybu, tak vyloučena není. Všimněme si, že pokud by takový kód $C \subseteq \mathbb{Z}_2^7$ existoval, platila by rovnost

$$\mathbb{Z}_2^7 = \bigcup_{\mathbf{a} \in C} V_1(\mathbf{a}).$$

To znamená, že pro takový kód by každý vrchol Hammingovy krychle \mathbb{Z}_2^7 měl vzdálenost 1 od nějakého (jednoznačně určeného) kódového slova \mathbf{a} . Všechny vrcholy Hammingovy krychle \mathbb{Z}_2^7 by tak byly pokryté 1-okolími kódových slov. Takový kód by byl optimální v tom smyslu, že množina \mathbb{Z}_2^7 by neobsahovala žádná "zbytečná" slova, každé ze slov délky 7 by se vyskytovalo ve vzdálenosti nejvýše 1 od nějakého kódového slova.

Definice 5.112. Kód délky n , který má r informačních symbolů a opravuje jednu chybu, se nazývá *perfektní kód*, pokud platí rovnost

$$2^r(n+1) = 2^n.$$

Jako poslední příklad kódu si ukážeme perfektní lineární $(7, 4)$ -kód, který opravuje jednu chybu.

Příklad 5.113. Kód H_3 definujeme pomocí kontrolní matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prvky C jsou prvky jádra $\text{Ker}(A)$ matice A . Tato matice je v řádkově odstupňovaném tvaru, její hodnost se tedy rovná 3, a dimenze kódu $H_3 = \text{Ker}(A)$ je tedy rovna 4. Platí-li $A\mathbf{x}^T = \mathbf{o}^T$ pro $\mathbf{x} = x_1x_2 \cdots x_7$, jsou neznámé x_4, x_5, x_6, x_7 volné, můžeme je zvolit libovolně a považujeme je za informační symboly. Neznámé x_1, x_2, x_3 jsou volbou x_4, x_5, x_6, x_7 určené jednoznačně:

$$x_1 = x_4 + x_5 + x_7, \quad x_2 = x_4 + x_6 + x_7, \quad x_3 = x_5 + x_6 + x_7.$$

Neznámé x_1, x_2, x_3 jsou tedy kontrolní (paritní) bity. I tento kód H_3 je založen na kombinaci tří paritních kontrol.

Sloupce matice A tvoří všechny nenulové vektory z prostoru \mathbb{Z}_2^3 . Každá dvouprvková podposloupnost sloupců matice A je tedy lineárně nezávislá a minimální vzdálenost kódu C je tak aspoň 3, (ve skutečnosti je právě 3), a kód H_3 tak opravuje jednu chybu.

Jak najdeme kódové slovo $x_1x_2 \cdots x_7$, jsou-li dány informační symboly x_4, x_5, x_6, x_7 , jsme si už řekli. Pokud přijímající strana přijme slovo $\mathbf{y} = y_1y_2 \cdots y_7$, spočítá součin $A\mathbf{y}^T$. Platí-li $A\mathbf{y}^T = \mathbf{o}^T$, je \mathbf{y} kódové slovo a bylo tedy přeneseno bez chyby.

Je-li $A\mathbf{y}^T \neq \mathbf{o}^T$, došlo během přenosu k chybě a zbývá určit, který symbol v přijatém slově $\mathbf{y} = y_1y_2 \cdots y_7$ je ten poškozený. Označme $A\mathbf{y}^T = (s_1s_2s_3)^T$.

Protože matice A obsahuje všechny nenulové vektory \mathbb{Z}_2^3 jako sloupce, existuje jednoznačně určený sloupec $\mathbf{a}_j = (s_1s_2s_3)^T$. Platí $\mathbf{a}_j = A\mathbf{e}_j^T$ pro j -tý vektor \mathbf{e}_j standardní báze v \mathbb{Z}_2^7 . Slovo $\mathbf{y} + \mathbf{e}_j$ se od \mathbf{y} liší pouze v j -tém symbolu. Platí navíc

$$A(\mathbf{y}^T + \mathbf{e}_j^T) = A\mathbf{y}^T + A\mathbf{e}_j^T = (s_1s_2s_3)^T + \mathbf{a}_j = (s_1s_2s_3)^T + (s_1s_2s_3)^T = \mathbf{o}^T.$$

Slovo $\mathbf{y} + \mathbf{e}_j$ tak patří do kódu H_3 a má Hammingovu vzdálenost 1 od přijatého slova \mathbf{y} . Je to tedy to slovo, které bylo vysláno a při přenosu byl poškozen j -tý symbol.

Příklad 5.114. Při použití Hammingova kódu H_3 bylo přijato slovo 1010101. Došlo během přenosu k chybě a pokud ano, jaké slovo bylo vysláno?

Vynásobíme kontrolní matici A vektorem $(1010101)^T$. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektor $(0, 1, 1)^T$ je šestý sloupcový vektor matice A_3 , poškozen byl tedy šestý symbol ve slově 1010101, vysláno bylo slovo 1010111.

Definice 5.115. *Hammingův kód H_r* je binární blokový kód délky $n = 2^r - 1$ určený kontrolní maticí typu $r \times n$, jejíž sloupce tvoří všechny nenulové aritmetické vektory dimenze r nad \mathbb{Z}_2 .

Detaily důkazu následujícího tvrzení přenecháme do cvičení.

Tvrzení 5.116. *Hammíngův kód H_r je perfektní lineární kód délky $2^r - 1$ a dimenze $2^r - r - 1$, jehož minimální vzdálenost je 3.*

Cvičení

1. Vysvětlíte, proč množina všech polynomů stupně právě 173 s reálnými koeficienty s běžnými operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem není vektorovým prostorem.

2. Pro libovolné těleso \mathbf{T} a libovolnou množinu X definujeme vektorový prostor $\mathbf{T}^{(X)}$ jako množinu těch zobrazení f z X do T , pro který je množina $\{x : f(x) \neq 0\}$ je konečná. Sčítání a násobení definujeme po souřadnicích, tj. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ a $(af)(x) = af(x)$. Dokažte, že $\mathbf{T}^{(X)}$ je vektorový prostor.

Tímto způsobem bychom zobecnili definici 5.2 na případ nekonečné dimenze – prostor $\mathbf{T}^{(X)}$ může být nazýván aritmetickým vektorovým prostorem nad \mathbf{T} dimenze $|X|$.

3. U všech příkladů vektorových prostorů za definicí ověřte, že se skutečně jedná o vektorové prostory.

4. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ DOKONCIT

5. Množina všech podmnožin množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ (nebo jiné dané množiny X) spolu s operací symetrické diference, tj. $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, je vektorový prostor nad \mathbb{Z}_2 . (Násobení skalárem je jednoznačně dané axiomy.) Dokažte a vysvětlíte, proč je tento prostor „v podstatě“ \mathbb{Z}_2^2 .

6. Dokažte tvrzení 5.4 a formulujte a dokažte obdoby vlastností (8) a (9) z tvrzení 3.3.

7. Dokažte, že \mathbf{T} jako vektorový prostor nad \mathbf{T} má pouze triviální podprostory.

8. Dokažte, že jedinými netriviálními podprostory prostoru \mathbf{T}^2 jsou množinu tvaru $\{t\mathbf{x} : t \in T\}$, kde $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbf{T}^2$.

9. Nechť A je matice nad \mathbf{T} typu $m \times n$ a $\mathbf{b} \in T^m$. Dokažte, že množina $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ je podprostorem \mathbf{T}^n právě tehdy, když $\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

10. Zjistěte lineární obal množiny X z příkladu 5.18 a dokažte, že množina Y tvoří podprostor.

11. Dokažte, že posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ve vektorovém prostoru \mathbf{V} nad \mathbf{T} je lineárně nezávislá právě tehdy, když žádný z vektorů není v lineárním obalu předchozích (tj. pro každé i platí $\mathbf{v}_i \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle$).

12. Dokažte, že sloupce matice v řádkově odstupňovaném tvaru jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když příslušná homogenní soustava nemá žádné volné proměnné.

13. Dokončete příklad 5.45 o Fibonacciho posloupnostech.

14. Dokažte, že sloupce (řádky) čtvercové matice A nad \mathbf{T} řádu n tvoří bázi \mathbf{T}^n právě tehdy, když A je regulární.

15. Dokažte:

- Dimenze prostoru všech matic nad \mathbf{T} typu $m \times n$ je mn .
- Dimenze prostoru reálných polynomů stupně nejvýše n je n .
- Dimenze prostoru \mathbb{C} jako vektorového prostoru nad \mathbb{R} je 2.

16. Najděte bázi podprostoru \mathbb{R}^ω tvořeného posloupnostmi (a_1, a_2, \dots) , pro které platí $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ (pro každé $n \geq 3$). Pomocí nalezené báze najdete vzorec pro výpočet a_n , když $a_1 = 3$, $a_2 = 7$.

17. Dokažte, že z každé množiny generátorů konečně generovaného prostoru lze vybrat bázi.

18. Dokažte, že důsledek 5.55 platí bez předpokladu konečnosti G . Předpoklad tedy změníme na „ G je množina generátorů konečně generovaného prostoru \mathbf{V} “.

19. Spočítejte počet všech různých bází \mathbf{V} vybraných z vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ z příkladu 5.57.

20. Dokažte druhou část tvrzení 5.65.

21. Dokažte, že báze sloupců tvoří bázi sloupcového prostoru matice.

22. Přímo z definice báze sloupců dokažte, že řešení $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in T^n$ soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je jednoznačně určeno vektorem $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \in T^k$, kde i_1, i_2, \dots, i_k je seznam nebázových sloupců matice A , a naopak, že každý vektor $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \in T^k$ vzniká z nějakého řešení (x_1, x_2, \dots, x_n) .

23. Jednoznačnost redukovaného tvaru

24. Dokažte, že pro libovolné tři podprostory $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ prostoru \mathbf{V} platí

$$(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3) .$$

25. Dokažte, že

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{v_1 + v_2 + \dots + v_k : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \dots, v_k \in V_k\} .$$

26. Nechť $\mathbf{V}_i, i \in I$ jsou podprostory vektorového prostoru \mathbf{W} a G_i je množina generátorů prostoru \mathbf{V}_i pro každé $i \in I$. Dokažte, že $\bigcup_{i \in I} G_i$ generuje $\bigvee_{i \in I} \mathbf{V}_i$.

27. Najděte podprostory $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ prostoru \mathbb{R}^3 takové, že $\mathbf{U} \cap (\mathbf{V} + \mathbf{W}) \neq (\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) + (\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$, $\mathbf{U} + (\mathbf{V} \cap \mathbf{W}) \neq (\mathbf{U} + \mathbf{V}) \cap (\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

28. Jedna inkluze v obou (neplatných) distributivních zákonech vždy platí. Zjistěte které a dokažte.

29. Dokažte, že rovnosti v distributivních zákonech platí za předpokladu $\mathbf{U} \leq \mathbf{W}$ nebo $\mathbf{W} \leq \mathbf{U}$.

30. Rozhodněte, zda pro podprostory $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ vektorového prostoru \mathbf{Z} platí

$$\dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) + \dim(\mathbf{W}) = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) + \dim(\mathbf{V} \cap \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V} \cap \mathbf{W})$$

31. Jakou dimenzi může mít průnik podprostoru dimenze 3 a podprostoru dimenze 4 v \mathbb{Z}_{37}^6 ? Pro každou z možností uveďte příklad.

32. Při komunikaci byl použit Hammingův kód H_3 . Přijímající strana přijala slova

$$0101011, 0011111, 1011100, 1111110, 011111, 0001110, 1100101.$$

Rozhodněte, která z nich byla během přenosu poškozena a u každého z poškozených slov rozhodněte, který ze symbolů byl přenesen nesprávně a jaké slovo bylo vysláno.

33. Dokažte Tvrzení 5.116.

34. Definujeme d -okolí slova $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_2^n$ jako množinu

$$V_d(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n; h(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq d\}.$$

Dokažte, že počet prvků $V_d(\mathbf{a})$ se rovná

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{d} = \sum_{i=1}^d \binom{n}{i}.$$

35. Dokažte, že je-li C kód dimenze n s r informačními symboly, který opravuje d chyb, pak platí nerovnost

$$2^r \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{d} \right) \leq 2^n.$$

36. Hamming svůj lineární $(7, 4)$ -kód D definoval pomocí kontrolní matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud bylo přijaté slovo \mathbf{y} a $B\mathbf{y}^T = (s_1s_2s_3)^T \neq \mathbf{o}^T$, dokažte že $s_3s_2s_1$ je binární vyjádření indexu poškozeného symbolu.

37. Dokažte, že existuje permutace π na množině $\{1, 2, \dots, 7\}$ taková, že platí $a_1a_2 \cdots a_7 \in H_3$ právě když $a_{\pi(1)}a_{\pi(2)} \cdots a_{\pi(7)} \in D$, kde D je kód z předchozího cvičení. Jak souvisí permutace π s permutací sloupců, pomocí které dostaneme z kontrolní matice A kód H_3 kontrolní matici B kódu D .

6. DETERMINANT

Cíl. *Budeme se věnovat pojmu determinantu matice. Motivací je porozumění, jak zobrazení určené maticí mění obsah (v \mathbb{R}^2) a objem (v \mathbb{R}^3). K definici budeme potřebovat permutace, naučíme se je různými způsoby zapisovat a určovat znaménko.*

6.1. Motivace. Čtvercová matice A řádu n nad \mathbb{R} určuje zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tato zobrazení mají tu vlastnost, že násobí n -dimenzionální objemy (obsahy v případě $n = 2$, objemy v případě $n = 3$) konstantním číslem. Toto číslo je rovno absolutní hodnotě tzv. determinantu, který zavedeme v této kapitole. Znaménko determinantu určuje, zda zobrazení mění „orientaci prostoru“. Například pokud je determinant matice A řádu 2 roven $1,3$, příslušné zobrazení násobí obsah každého útvaru číslem $1,3$ a nemění orientaci. To, že se orientace nemění si lze představit tak, že obraz lze dostat spojitou deformací roviny z původního útvaru. Pokud je determinant A roven $-1,3$, pak zobrazení násobí obsah každého útvaru číslem $1,3$ a orientaci mění.

F

$$A = I_2$$

F

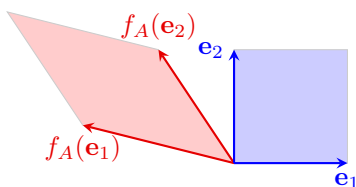
$$\det A = 1,3$$

F

$$\det A = -1,3$$

Odvodíme si vzorec na výpočet determinantu v případě reálných čtvercových matic řádu $n = 2$ a $n = 3$. V obecné definici pro větší n a nad jinými tělesy vizuální představa chybí, ale determinant můžeme definovat stejně a bude mít podobné vlastnosti.

6.1.1. Determinant v \mathbb{R}^2 . Budeme se snažit odvodit vzorec pro determinant čtvercových matic A řádu 2. Matici se sloupci \mathbf{u} , \mathbf{v} budeme značit $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$ a její determinant $\det(\mathbf{u}|\mathbf{v})$. Číslo $\det(A)$, kde $A = (\mathbf{u}|\mathbf{v})$, má vyjadřovat změnu obsahu a orientace při zobrazení f_A . Protože zobrazení f_A zobrazuje vektor $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ na vektor $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}$ a vektor $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ na vektor $A\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}$, f_A zobrazuje jednotkový čtverec se stranami $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ na rovnoběžník se stranami \mathbf{u}, \mathbf{v} .



Obsah tohoto rovnoběžníku můžeme vyjádřit vhodným doplněním na obdélník a znaménko určit diskuzí možné vzájemné polohy vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} podle obrázku (viz cvičení).

OBRAZEK

Podíváme se na jiný postup, který se nám rovněž bude hodit v obecnější situaci.

Když vynásobíme jeden z vektorů číslem $t \in \mathbb{R}$, pak se obsah výsledného rovnoběžníku zvětší (nebo zmenší) $|t|$ -krát. Přitom orientace se pro kladné t nezmění a pro záporná t změní. Dostáváme vztahy

$$\det(t\mathbf{u}|\mathbf{v}) = t \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}|t\mathbf{v}) .$$

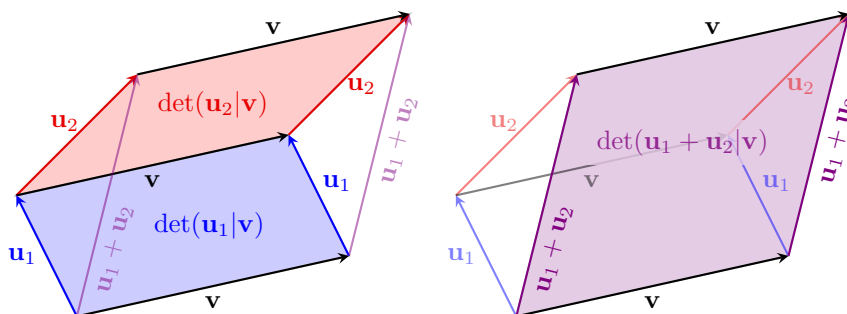
OBRAZEK (zvětšení rovnoběžníku)

Z následujícího obrázku můžeme nahlédnout (stačí přesunout trojúhelník ...), že platí

$$\det(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|\mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}) + \det(\mathbf{u}_2|\mathbf{v})$$

a podobný vztah platí, když součet je v druhém sloupci.

$$\det(\mathbf{u}|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}_1) + \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}_2)$$



Ještě si uvědomíme, že

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1, \quad \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -1, \quad \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$$

protože první matice odpovídá identickému zobrazení, které nemění obsah ani orientaci, druhá matice odpovídá překlopení kolem osy prvního kvadrantu, která nemění obsah a mění orientaci, třetí a čtvrtá matice odpovídá zobrazení, která čtverci přiřadí „zdegenerovaný rovnoběžník“ – úsečku.

Z odvozených vztahů již jde spočítat determinant obecné matice

$$A = (\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \det(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2|a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ &= \det(a_{11}\mathbf{e}_1|a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) + \det(a_{21}\mathbf{e}_2|a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) = \\ &= \det(a_{11}\mathbf{e}_1|a_{12}\mathbf{e}_1) + \det(a_{11}\mathbf{e}_1|a_{22}\mathbf{e}_2) + \\ &\quad + \det(a_{21}\mathbf{e}_2|a_{12}\mathbf{e}_1) + \det(a_{21}\mathbf{e}_2|a_{22}\mathbf{e}_2) = \\ &= a_{11}a_{12} \det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1) + a_{11}a_{22} \det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) + \\ &\quad + a_{21}a_{12} \det(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1) + a_{21}a_{22} \det(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_2) = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Determinant jsme odvodili použitím jednotkového čtverce. Obecně obsah a orientace obrazu libovolného útvaru (u něž lze měřit obsah) se změní tak, jak udává determinant. Tento fakt nebudeme odvozovat.

6.1.2. *Determinant v \mathbb{R}^3 .* Pro matice řádu 3 udává determinant změnu objemu a orientace. Pro zobrazení f_A určené maticí $A = (\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w})$ je obrazem jednotkové krychle se stranami $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ rovnoběžnostěn se stranami $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Z geometrického náhledu dostáváme podobné vztahy jako v případě \mathbb{R}^2 .

$$\det(t\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}|t\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}|t\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w})$$

$$\det(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3|\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}_1|\mathbf{v}|\mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}_2|\mathbf{v}|\mathbf{w}) + \det(\mathbf{u}_3|\mathbf{v}|\mathbf{w})$$

Podobný vztah platí, když součet je ve druhém nebo třetím sloupci.

K výpočtu ještě potřebujeme determinanty matic, jejichž sloupce jsou vektory v kanonické bázi. Pokud jsou dva ze sloupců stejné, pak příslušné zobrazení degeneruje krychli na čtverec, nebo dokonce úsečku, takže determinant je 0. Dále

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) ,$$

protože příslušná zobrazení jsou rotace, které orientaci nemění. Zbývají tři matice, jejichž determinant je -1 , protože příslušná zobrazení jsou zrcadlení a ta orientaci mění.

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) ,$$

Determinant teď můžeme spočítat jako v případě $n = 2$, výrazy ale budou poněkud delší.

$$A = (\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \\ &= \det(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3 | a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3 | a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{k1}a_{l2}a_{m3} \det(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_{11}a_{32}a_{23} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + \\ &\quad + a_{21}a_{12}a_{33} \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + a_{21}a_{32}a_{13} \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + \\ &\quad + a_{31}a_{12}a_{23} \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_{31}a_{22}a_{13} \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

Každý sčítanec je součinem třech prvků matice $a_{k1}a_{l2}a_{m3}$, kde k, l, m jsou navzájem různé, se znaménkem odpovídajícím orientaci trojice $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m$. Jeden sčítanec tedy odpovídá výběru jednoho prvku s prvního sloupce, jednoho prvku z druhého sloupce a jednoho prvku z třetího sloupce, kde prvky vybíráme s navzájem různých řádků (ostatní členy budou nulové).

6.2. **Permutace.** Výpočet vzorce pro „vícerozměrný objem“ by probíhal podobně. Museli bychom zjistit, která pořadí vektorů kanonické báze odpovídají kladné orientaci a která záporné. To lze pomocí pojmu znaménka permutace, které definujeme v této části. Děláme tím malý výlet z lineární algebry do algebry obecné.

Permutaci definujeme jako bijekci množiny na sebe samu.

Definice 6.1. *Permutací množiny X rozumíme bijekci $X \rightarrow X$. Množinu všech permutací na množině X značíme S_X . Pro množinu permutací na množině $X = \{1, 2, \dots, n\}$, kde n je přirozené číslo, také používáme značení S_n .*

Nejčastěji budeme používat permutace na konečné množině, konkrétně množině $\{1, 2, \dots, n\}$. Pro konečnou množinu X je každé prosté zobrazení $X \rightarrow X$ již bijekcí, a také každé zobrazení $X \rightarrow X$ na je bijekcí. (Připomeňme, že ani jedna z těchto implikací není pravdivá pro nekonečné množiny.)

Význačnou permutací na X je identické zobrazení $\text{id}_X : X \rightarrow X$, pro něž $\text{id}_X(x) = x$ pro každé $x \in X$. Protože inverzní zobrazení k bijekci je bijekce, je inverzní zobrazení π^{-1} k permutaci π na X opět permutace na X . Složením permutací je rovněž permutace. Složení permutací ρ a σ značíme $\sigma \circ \rho$ nebo $\sigma\rho$, tj. $\sigma\rho(x) = \sigma(\rho(x))$. Množina S_X spolu s těmito operacemi opět splňuje vlastnosti podobné sčítání v tělese, nebo sčítání ve vektorovém prostoru, s **výjimkou komutativity**:

- (1) Pro libovolné $\pi, \rho, \sigma \in S_X$ platí $\pi(\rho\sigma) = (\pi\rho)\sigma$.
- (2) Pro libovolné $\pi \in S_X$ platí $\text{id}_X \pi = \pi \text{id}_X = \pi$.
- (3) Pro libovolné $\pi \in S_X$ platí $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = \text{id}_X$.

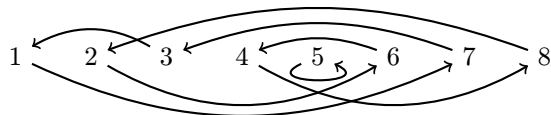
Tím pádem nemusíme při skládání psát závorky a také můžeme řešit jednoduché rovnice typu $\alpha\rho\beta = \gamma$, kde α, β, γ jsou dané permutace, podobným způsobem jako pro čísla, akorát musíme dát pozor na nekomutativitu.

6.2.1. *Zápis permutace.* Permutaci π na konečné množině X můžeme zapsat tabulkou, kdy do horního řádku napíšeme v nějakém pořadí prvky množiny X a pod každý prvek $x \in X$ napíšeme jeho obraz $\pi(x)$. Například permutaci $\pi \in S_8$ danou vztahy $\pi(1) = 7, \pi(2) = 6, \pi(3) = 1, \pi(4) = 8, \pi(5) = 5, \pi(6) = 4, \pi(7) = 3, \pi(8) = 2$ můžeme zapsat

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 1 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 2 & 8 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tabulkou můžeme zapsat libovolné zobrazení z X do X (nebo i do jiné množiny). To, že π je permutace, se v tabulce projeví tak, že v druhém řádku bude každý prvek množiny X právě jednou.

Další možností je si permutaci nakreslit. Prvky X si nakreslíme jako body (tzv. vrcholy) a pro každé $x \in X$ si nakreslíme šipku (tzv. hranu) z x do $\pi(x)$. Takovému obrázku říkáme *graf* permutace π . Protože π je zobrazení, vede z každého bodu právě jedna šipka, a protože je to bijekce, vede do každého bodu právě jedna šipka.

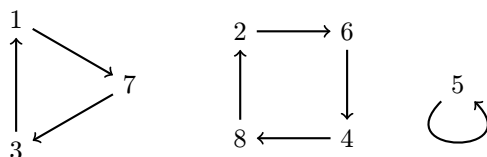


OBRÁZEK 6. Obrázek permutace

Když graf trochu překreslíme, vidíme, že permutace je sjednocením nezávislých cyklů.

To není náhoda, každá permutace je složením nezávislých cyklů.

Definice 6.2. *Cyklus délky k* je permutace na X splňující $\pi(x_1) = x_2, \pi(x_2) = x_3, \dots, \pi(x_{k-1}) = x_k, \pi(x_k) = x_1$ a $\pi(y) = y$ pro každé $y \in X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, kde x_1, x_2, \dots, x_k jsou po dvou různé prvky X . Zapisujeme $\pi = (x_1 x_2 \dots x_k)$.



OBRÁZEK 7. Lepší obrázek permutace

Cykly nazýváme *nezávislé*, pokud jsou množiny prvků vyskytující se v cyklech disjunktní.

Transpozice je cyklus délky 2, tj. permutace tvaru $\pi = (x y)$.

Všimněte si, že pořadí prvků v cyklu můžeme cyklicky otočit a dostaneme stejnou permutaci:

$$(x_1 x_2 \dots x_k) = (x_2 \dots x_k x_1) = \dots = (x_k x_1 x_2 \dots x_{k-1})$$

Jak najít pro danou permutaci π rozklad na nezávislé cykly aniž bychom kreslili obrázek? Zvolíme libovolný výchozí prvek x_1 a podíváme se na jeho obraz $x_2 = \pi(x_1)$, pak se podíváme na jeho obraz $x_3 = \pi(x_2)$, atd. Když poprvé narazíme na prvek, který se již vyskytl, tj. $x_{k+1} = x_i$ pro nějaké $i \leq k$, pak nutně $i = 1$, jinak by π zobrazovala dva různé prvky x_{i-1} a x_k na stejný prvek x_i . Takže máme $\pi(x_k) = x_1$ a můžeme cyklus uzavřít. Pokud jsou v množině X ještě jiné prvky, vybereme kterýkoliv z nich a nalezneme další cykly. Tyto cykly musí být nezávislé, jinak bychom opět měli dva prvky, které se zobrazí do stejného prvku, a zobrazení π by nebylo prosté. Naznačili jsme důkaz, že rozklad na nezávislé cykly je možný. Pořadí skládání nezávislých cyklů můžeme libovolně měnit (na rozdíl od obecných cyklů) a až na tuto skutečnost je rozklad jednoznačný. Detaily si rozmyslete jako cvičení.

Tvrzení 6.3. Každou permutaci na konečné množině X lze zapsat jako složení nezávislých cyklů. Tento zápis je jednoznačný až na pořadí cyklů (a cykly délky 1).

Příklad 6.4. Podle návodu rozložíme naši permutaci π na nezávislé cykly. Začneme například s prvkem 1. Jeho obraz je $\pi(1) = 7$, obraz 7 je $\pi(7) = 3$ a obraz 3 je $\pi(3) = 1$. Nalezli jsme první cyklus $(1 7 3)$. Nyní vezmeme nějaký prvek, který se doposud neobjevil, třeba 2. Spočítáme $\pi(2) = 6$, $\pi(6) = 4$, $\pi(4) = 8$, $\pi(8) = 2$ a našli jsme další cyklus $(2 6 4 8)$. Zbývá prvek 5, který je *pevným bodem*, tj. $\pi(5) = 5$, což můžeme zapsat cyklem (5) délky 1 (to je identická permutace), chceme-li tento fakt zdůraznit. Celkově tedy máme

$$\pi = (1 7 3)(2 6 4 8) .$$

Pořadí skládání můžeme díky nezávislosti prohodit a rovněž můžeme v tomto zápisu cyklicky otáčet prvky v závorkách, protože tím vznikají pouze různé zápisy stejné permutace. Takže například také

$$\pi = (6 4 8 2)(3 1 7) .$$

Cyklickým zápisem rozumíme zápis pomocí nezávislých cyklů s vyznačenými pevnými body, například

$$\pi = (1 7 3)(2 6 4 8)(5) .$$

Pokud pevné body neuvádíme, hovoříme o *redukovaném cyklickém zápisu*.

Cyklický (nebo redukovaný cyklický) zápis je většinou daleko výhodnější než zápis tabulkou, protože lépe vidíme, co permutace „dělá“. Zápis tabulkou budeme dále používat jen zřídka.

Na příkladu si rozmyslíme, jak permutace invertovat a skládat v cyklickém zápisu.

Příklad 6.5. Inverzní permutace přiřadí každému prvku jeho vzor. Pro permutaci $\pi = (1\ 7\ 3)(2\ 6\ 4\ 8)$ je například $\pi^{-1}(3) = 7$, protože $\pi(7) = 3$. Stačí tedy převrátit pořadí prvků v cyklu. Na obrázku bychom otočili směr šipek.

$$\pi^{-1} = (1\ 3\ 7)(2\ 8\ 4\ 6)$$

Na tomto místě si rovněž uvědomme, že inverzní permutace k transpozici je tatáž transpozice.

$$(i\ j)^{-1} = (i\ j) \quad (= (j\ i))$$

Vypočítáme složení permutace π a permutace $\rho = (1\ 7\ 4\ 6)(2\ 8)(3\ 5)$:

$$\rho\pi = (1\ 7\ 4\ 6)(2\ 8)(3\ 5)(1\ 7\ 3)(2\ 6\ 4\ 8) = (1\ 4\ 2)(3\ 7\ 5)$$

Cyklový zápis tvoříme jako pro samotnou permutaci: vyjdeme z libovolného prvku, podíváme se, kam ho složená permutace zobrazí a takto pokračujeme. Vyšli jsme z prvku 1, permutace π ho zobrazí na 3 a permutace ρ prvek 3 zobrazí na 5, takže složená permutace $\rho\pi$ zobrazí prvek 1 na prvek 5, tj. za 1 napíšeme číslo 5. Číslo 5 permutace π zobrazí na 5 a permutace ρ zobrazí číslo 5 na 3, takže píšeme 3, atd.

Ještě jednou připomeňme, že skládání komutativní není (ale třeba nezávislé cykly spolu komutují). Složením ρ a π vyjde permutace

$$\pi\rho = (1\ 3\ 5)(6\ 7\ 8) ,$$

což je jiná permutace než $\pi\rho$. Má ale stejnou strukturu – má stejně jako $\rho\pi$ jeden dva cykly délky 3. To není náhoda, viz cvičení.

Každý cyklus lze zapsat jako složení transpozic, například

$$(x_1\ x_2\ \dots\ x_k) = (x_1\ x_2)(x_2\ x_3)\dots(x_{k-1}\ x_k)$$

nebo

$$(x_1\ x_2\ \dots\ x_k) = (x_1\ x_k)\dots(x_1\ x_3)(x_1\ x_2) .$$

Ověřte obě rovnosti! Protože každá permutace je složením cyklů (dokonce nezávislých), můžeme každou permutaci napsat jako složení transpozic. Dokázali jsme

Tvrzení 6.6. *Každá permutace na konečné množině je složením transpozic.*

Tvrzení vlastně říká, že jakkoliv promícháme prvky množiny, lze původní uspořádání dostat postupným prohazováním dvojic. Zápis permutace jako složení transpozic není samozřejmě jednoznačný, například

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)(1\ 2) = (1\ 2)(1\ 3)(2\ 3)(1\ 2) = \dots$$

6.2.2. Znaménko. I když každou permutaci můžeme zapsat jako složení transpozic mnoha způsoby, parita počtu transpozic (tj. zda je počet sudý nebo lichý) se nemění. K důkazu tohoto tvrzení si nejdřív všimneme jak se mění počet cyklů v cyklovém zápisu při složení s transpozicí. V následujícím tvrzení počítáme i cykly délky jedna.

Tvrzení 6.7. *Nechť X je konečná množina, $\pi \in S_X$ a $(x\ y) \in S_X$. Pak počet cyklů v permutaci $(x\ y)\pi$ a π se liší o 1 a počet sudých cyklů v permutaci $(x\ y)\pi$ a π se rovněž liší o 1.*

Důkaz. Rozebereme dva případy. Nejprve předpokládejme, že x a y leží ve stejném cyklu $(x = x_1 x_2 \dots x_k y = y_1 y_2 \dots y_l)$ permutace π . Pak

$$(x y)\pi = (x y) \dots (x x_2 \dots x_k y y_2 \dots y_l) \dots = \dots (x x_2 \dots x_k)(y y_2 \dots y_l) \dots,$$

kde ostatní cykly permutace π zůstanou beze změny. Počet cyklů se v tomto případě zvýší o 1. Rozborem případů dostaneme druhou část tvrzení (například pokud k i l je sudé, pak se počet sudých cyklů zvětší o jedna, pokud k je sudé a l je liché, pak se počet sudých cyklů také zvětší o jedna, atd.).

Pokud jsou prvky x a y v různých cyklech $(x = x_1 x_2 \dots x_k)$, $(y = y_1 y_2 \dots y_l)$, pak

$$(x y)\pi = (x y) \dots (x x_2 \dots x_k)(y y_2 \dots y_l) \dots = \dots (x x_2 \dots x_k y y_2 \dots y_l) \dots,$$

takže se počet cyklů sníží o 1. Druhou část získáme opět rozborem případů. \square

Důsledkem je, že parita počtu transpozic je stejná v libovolném zápisu permutace jako složení transpozic. Tuto paritu navíc poznáme podle počtu cyklů sudé délky v cyklickém zápisu permutace.

Důsledek 6.8. *Pro libovolnou permutaci π na konečné množině X nastane jedna z následujících možností:*

- (1) *Každý zápis π jako složení transpozic obsahuje sudý počet transpozic. To nastane právě tehdy, když počet cyklů sudé délky v (redukováném) cyklickém zápisu permutace π je sudý.*
- (2) *Každý zápis π jako složení transpozic obsahuje lichý počet transpozic. To nastane právě tehdy, když počet cyklů sudé délky v (redukováném) cyklickém zápisu permutace π je lichý.*

Důkaz. Je-li π složením transpozic $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_k$, pak několikanásobnou aplikací předchozího tvrzení dostaneme, že parita počtu cyklů sudé délky v permutaci π je rovná paritě k : Počet cyklů sudé délky v permutaci ρ_k je lichý (jeden cyklus délky 2), v permutaci $\rho_{k-1} \rho_k$ je sudý, atd. \square

Tento důsledek nám umožňuje zavést znaménko permutace.

Definice 6.9. Permutace π na konečné množině X se nazývá *sudá*, pokud nastane možnost (1) v důsledku 6.8. Rovněž říkáme, že *znaménko π je 1* a píšeme $\text{sgn}(\pi) = 1$.

V opačném případě je π *lichá*, má znaménko -1 a definujeme $\text{sgn}(\pi) = -1$.

Znaménko snadno vypočteme z (redukováného) cyklického zápisu. Stačí spočítat počet cyklů sudé délky. Znaménko lze také určit podle počtu všech cyklů v cyklickém zápisu, viz cvičení.

Příklad 6.10.

$$\text{sgn}((1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9)(10\ 11)) = -1$$

protože má permutace v cyklickém zápisu 3 cykly sudé délky.

Znaménko inverzní permutace a složené permutace je určené znaménkem původních permutací.

Tvrzení 6.11. *Nechť X je konečná množina a $\pi, \rho \in S_X$. Pak platí*

- (1) $\text{sgn}(\text{id}_X) = 1$,
- (2) $\text{sgn}(\pi^{-1}) = \text{sgn}(\pi)$ a
- (3) $\text{sgn}(\pi\rho) = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\rho)$.

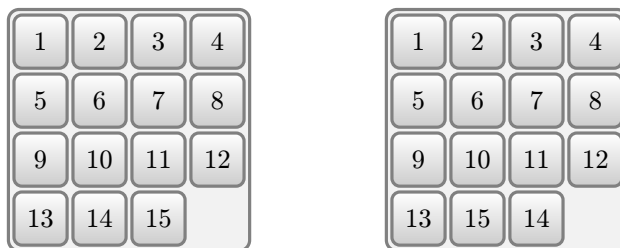
Důkaz.

- (1) Identická permutace má 0 cyklů sudé délky.
- (2) Inverzní permutace má stejný počet cyklů sudé délky.
- (3) Pokud π lze zapsat jako složení k transpozic, tj. $\text{sgn}(\pi) = (-1)^k$, a ρ lze zapsat jako složení l transpozic, tj. $\text{sgn}(\rho) = (-1)^l$, pak $\pi\rho$ lze zapsat jako složení $k + l$ transpozic, tj. $\text{sgn}(\pi\rho) = (-1)^{k+l} = (-1)^k(-1)^l = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\rho)$.

□

Slovy, identická permutace je sudá, inverzní permutace k sudé (resp. liché) je sudá (resp. lichá), složením dvou sudých nebo dvou lichých permutací je sudá permutace a složením liché a sudé permutace v libovolném pořadí je lichá permutace.

Příklad 6.12. Ve hře „15“ máme čtvercovou krabičku se 4×4 políčky, v níž jsou kostičky číslovány 1 až 15 a jedno prázdné políčko, pomocí něhož jdou kostičky vodorovně nebo svisle přesouvat. Ukážeme, že základní pozici na obrázku vlevo nelze získat z pozice na obrázku vpravo.



OBRÁZEK 8. Hra 15

Místa v krabičce si očísľujeme podle základní pozice. Místo vpravo dole očísľujeme 16. Libovolnou pozici zapíšeme pomocí permutace $\pi \in S_{16}$ tak, že definujeme $\pi(i) = j$, pokud se na místě i nalézá kostička s číslem j . Jeden tah je vlastně prohozením umístění prázdného políčka a nějaké kostičky $i \in \{1, 2, \dots, 15\}$. Nová pozice tedy odpovídá permutaci $(16 \ i)\pi$.

Budeme si všimnout parity permutace π a parity pozice prázdného políčka. Na začátku vyjdeme z pozice odpovídající liché permutaci $(14 \ 15)$ a prázdné políčko je na sudém místě 16. Po provedení jednoho tahu permutace π změní paritu a rovněž se změní parita pozice prázdného políčka, protože sudá místa sousedí pouze s lichými a naopak. Z toho plyne, že

- po provedení sudého počtu tahů bude π lichá a prázdné políčko bude na sudém místě;
- po provedení lichého počtu tahů bude π sudá a prázdné políčko bude na lichém místě.

Ani v jednom z obou případů nemůžeme získat základní pozici, pro kterou je permutace π sudá (je to identická permutace) a prázdné políčko je na sudém místě (16).

6.2.3. *Počet permutací.* Jak již asi víte, počet permutací na n -prvkové množině $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je $n!$. Máme totiž n možností, kam zobrazit x_1 , pak $n - 1$ možností, kam zobrazit x_2 , atd. Dohromady $n(n - 1) \dots 1 = n!$.

Počet lichých permutací spočítáme z následujícího pozorování, které také použijeme pro důkazy tvrzení o determinantech.

Tvrzení 6.13. *Nechť X je konečná množina a $\pi \in S_X$. Pak platí:*

- (1) *Soubor $(\rho^{-1} : \rho \in S_X)$, soubor $(\pi\rho : \rho \in S_X)$ i soubor $(\rho\pi : \rho \in S_X)$ obsahuje každou permutaci v S_X právě jednou.*
- (2) *Pokud π je lichá, pak soubor $(\pi\rho : \rho \in S_X, \text{sgn}(\rho) = 1)$ i soubor $(\rho\pi : \rho \in S_X, \text{sgn}(\rho) = 1)$ obsahuje pouze liché permutace v S_X , každou právě jednou.*

Důkaz. Rovnice $\sigma = \rho^{-1}$ má pro dané σ právě jedno řešení $\rho = \sigma^{-1}$. (Rozmyslete si podrobně toto i další tvrzení použitá v tomto důkazu. Zdůvodnění je podobné jako v tvrzení 3.3 o vlastnostech těles.) To znamená, že každou permutaci σ lze zapsat ve tvaru ρ^{-1} právě jedním způsobem, tj. soubor $(\rho^{-1} : \rho \in S_X)$ obsahuje každou permutaci v S_X právě jednou.

Rovnice $\sigma = \pi\rho$ má pro dané σ a π právě jedno řešení $\rho = \pi^{-1}\sigma$. Z toho plyne, že v souboru $(\pi\rho : \rho \in S_X)$ je každá permutace právě jednou. Podobně pro třetí soubor v části (1). Pokud jsou permutace σ a π liché, pak $\rho = \pi^{-1}\sigma$ je sudá, protože $\text{sgn}(\pi^{-1}\sigma) = \text{sgn}(\pi^{-1})\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\sigma) = (-1)(-1) = 1$ (viz tvrzení 6.11). Každou lichou permutaci lze tedy zapsat ve tvaru $\pi\rho$, kde ρ je sudá, právě jedním způsobem. Navíc $\pi\rho$ je lichá, pokud π je lichá a ρ je sudá. Z toho plyne první část bodu (2). Druhá část se dokáže podobně. \square

Tvrzení můžeme formulovat v jazyku zobrazení. Například druhá část tvrzení v bodě (1) říká, že zobrazení $f : S_X \rightarrow S_X$ definované $f(\rho) = \pi\rho$ je bijekce. První část bodu (2) říká, že je-li π lichá, pak zobrazení f definované stejným předpisem je bijekcí z množiny všech sudých permutací v S_X na množinu všech lichých permutací v S_X .

Důsledkem je, že počet lichých permutací na n -prvkové množině X je stejný jako počet sudých permutací na X , kdykoliv na X nějaká lichá permutace existuje, tj. v případě $n > 1$. Pro $n > 1$ je tedy počet lichých i sudých permutací $n!/2$.

6.3. Definice determinantu a základní vlastnosti. Připomeňme, že determinant reálné čtvercové matice $A = (\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w})$ řádu 3 určuje, jak zobrazení f_A mění objem a orientaci. Jeho absolutní hodnota je rovna objemu rovnoběžnostěnu o stranách $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Odvodili jsme vzorec

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} .$$

Každý člen součtu je součin třech prvků $a_{k1}a_{l2}a_{m3}$, kde k, l, m jsou navzájem různé, a znaménko udává orientaci trojice vektorů $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m)$. Každý člen lze tedy zapsat jako $a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}a_{\pi(3)3}$, kde $\pi \in S_3$ je permutace $\pi(1) = k, \pi(2) = l, \pi(3) = m$ a všimněte si, že znaménko členu je rovno znaménku permutace π . To geometricky odpovídá tomu, že prohodíme-li dva vektory kanonické báze, orientace se změní.

6.3.1. *Definice.* Podobně definujeme determinant libovolné **čtvercové** matice nad libovolným tělesem.

Definice 6.14. Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice nad tělesem \mathbf{T} řádu n , pak definujeme *determinant* matice A předpisem

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n} .$$

Determinant tedy přiřadí čtvercové matici nad \mathbf{T} prvek tělesa \mathbf{T} . Součet má $n!$ členů, jeden pro každou permutaci $\pi \in S_n$. Sčítanec odpovídající permutaci π je součinem n prvků matice, z každého sloupce i obsahuje součin prvek $a_{\pi(i),i}$, znaménko sčítance je rovné znaménku permutace π . (Pro přehlednost oddělujeme indexy prvků matice čárkou.)

Pro determinant matice A se také užívá značení $|A|$.

Příklad 6.15. V případě $n = 2$ máme dvě permutace v S_2 – identickou permutaci a transpozici $(1\ 2)$. Identická permutace je sudá a odpovídající sčítanec je $a_{11}a_{22}$, transpozice je lichá a odpovídající sčítanec je $-a_{21}a_{12}$. Dostáváme stejný vzorec jako dříve:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

OBRÁZEK (diagonaly)

Například

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 ,$$

což není překvapivé, protože rotace o α nemění ani obsah ani orientaci.

(Při zápisu determinantu pomocí svislých čar vynecháváme kulaté závorky.)

Příklad 6.16. V případě $n = 3$ máme šest permutací v S_3 – identické permutace a trojcykly jsou sudé, transpozice jsou liché. Odpovídající sčítanci jsou:

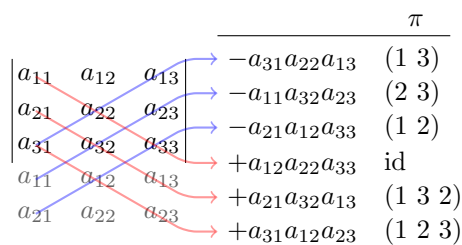
π	
id	$a_{11}a_{22}a_{33}$
(1 2 3)	$a_{21}a_{32}a_{13}$
(1 3 2)	$a_{31}a_{12}a_{23}$
(2 3)	$-a_{11}a_{32}a_{23}$
(1 3)	$-a_{31}a_{22}a_{13}$
(1 2)	$-a_{21}a_{12}a_{33}$

a opět dostáváme vzorec odvozený výše. Mnemotechnickou pomůckou je tzv. *Sarrusovo pravidlo* na obrázku.

Počítat matice z definice není vhodné už pro matice řádu 3, je lepší využít jiné metody. Sarrusovo pravidlo tedy nebudeme používat. V případě $n = 4$ má již výraz 24 členů (vypište je jako cvičení) a definice je pro výpočet již zcela nevhodná. Všimněte si, že **pravidlo podobné Sarrusovu pro matice řádu $n > 3$ neplatí**.

6.3.2. *Základní vlastnosti.* Pro horní trojúhelníkové matice vypočítáme determinant jako součin prvků na diagonále.

Tvrzení 6.17. Je-li A horní trojúhelníková matice, pak $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.



OBRÁZEK 9. Sarrusovo pravidlo

Důkaz. Podívejme se na jeden sčítanec $\text{sgn}(\pi)a_{\pi(1),1}a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n}$ v definici determinantu. Pokud je jeden z činitelů v tomto součinu nulový, celý sčítanec je roven nule a můžeme jej ignorovat. První sloupec matice A je celý nulový, až na hodnotu a_{11} , která může být nenulová. Pokud tedy $\pi(1) > 1$, pak $a_{\pi(1),1} = 0$ a sčítanec je nulový. Předpokládejme proto $\pi(1) = 1$. Podobně, pokud $\pi(2) > 2$ můžeme na sčítanec zapomenout, protože $a_{\pi(2),2} = 0$. Takže můžeme předpokládat $\pi(2) \leq 2$. Ale $\pi(2)$ nemůže být 1, protože máme $\pi(1) = 1$ a π je prosté zobrazení, čili $\pi(2) = 2$. Postupně dostáváme $\pi(3) = 3, \pi(4) = 4, \dots, \pi(n) = n$.

Jediný možná nenulový sčítanec tedy odpovídá identické permutaci, ta je sudá, takže $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. □

Pro matice 2×2 nad \mathbb{R} je geometrické vysvětlení na obrázku ???. Rovnoběžník o stranách $(a_{11}, 0)^T, (a_{21}, a_{22})^T$ má stejný obsah jako obdélník o stranách $(a_{11}, 0)^T$ a $(0, a_{22})^T$, protože oba rovnoběžníky mají stejnou výšku. Také mají stejnou orientaci.

OBRÁZEK

Podobně bychom mohli dokázat, že determinant dolní trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále. Dělat to ale nebudeme, dokážem obecněji, že determinant se nezmění transponováním.

Tvrzení 6.18. *Pro libovolnou čtvercovou matici A platí $\det(A) = \det(A^T)$.*

Důkaz. Sčítanec v definici $\det(A^T)$ odpovídající permutaci π je

$$\text{sgn}(\pi)a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)} \cdot$$

Součin lze přeuspořádat na

$$\text{sgn}(\pi)a_{\pi^{-1}(1),1}a_{\pi^{-1}(2),2} \dots a_{\pi^{-1}(n),n} \cdot$$

protože $\pi^{-1}(i)$ -tý činitel v původním součinu je roven $a_{\pi^{-1}(i)\pi(\pi^{-1}(i))} = a_{\pi^{-1}(i),i}$. Tento činitel jsme přesunuli na i -té místo. Máme

$$\begin{aligned}
\det(A^T) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi^{-1}(1),1} a_{\pi^{-1}(2),2} \cdots a_{\pi^{-1}(n),n} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) a_{\pi^{-1}(1),1} a_{\pi^{-1}(2),2} \cdots a_{\pi^{-1}(n),n} \\
&= \sum_{\pi \in S_n, \rho = \pi^{-1}} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1),1} a_{\rho(2),2} \cdots a_{\rho(n),n} \\
&= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1),1} a_{\rho(2),2} \cdots a_{\rho(n),n} = \det(A) .
\end{aligned}$$

Ve třetí úpravě jsme použili vztah $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$ (viz tvrzení 6.11) a v páté úpravě jsme začali počítat přes inverzy permutací, což výsledek nezmění, protože soubor $(\pi^{-1} : \pi \in S_n)$ obsahuje všechny permutace v S_n právě jednou (viz tvrzení 6.13). \square

Dokázané tvrzení jinými slovy říká, že

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} ,$$

což je trochu tradičnější verze definice.

Tvrzení se hodí se k tomu, že věty, které dokážeme pro řádky, budeme moci použít i pro sloupce.

Teď dokážeme vlastnosti determinantu použité při odvození vzorců v dimenzi 2 a 3 nad \mathbb{R} , jsou to body (1) a (2) v následujícím tvrzení. Zároveň spočítáme, jak se mění determinant při elementárních sloupcových úpravách, to jsou body (2), (3) a (4).

Tvrzení 6.19. *Nechť \mathbf{T} je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in T^n$, $t \in T$ a $\rho \in S_n$. Pak platí.*

- (1) $\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i + \mathbf{u} | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n)$
 $= \det(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) + \det(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{u} | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n)$
- (2) $\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | t\mathbf{v}_i | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) = t \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$
- (3) $\det(\mathbf{v}_{\rho(1)} | \mathbf{v}_{\rho(2)} | \dots | \mathbf{v}_{\rho(n)}) = \operatorname{sgn}(\rho) \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$
- (4) $\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i + t\mathbf{v}_j | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$

Důkaz. Označíme $A = (a_{ij}) = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$, čili a_{ij} je i -tá složka vektoru \mathbf{v}_j .

(1) Označíme-li $\mathbf{u} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, platí

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i + \mathbf{u} | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(i-1),i-1} (a_{\pi(i),i} + b_{\pi(i)}) a_{\pi(i+1),i+1} \dots a_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} + \\ & \quad + \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(i-1),i-1} b_{\pi(i)} a_{\pi(i+1),i+1} \dots a_{\pi(n),n}) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} \\ & \quad + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(i-1),i-1} b_{\pi(i)} a_{\pi(i+1),i+1} \dots a_{\pi(n),n} \\ &= \det(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) + \det(\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{u} | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) . \end{aligned}$$

V úpravách jsme roznásobili závorku a rozdělili sumu na dvě části.

(2) K důkazu tohoto bodu stačí vytknout t před sumu:

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_{i-1} | t\mathbf{v}_i | \mathbf{v}_{i+1} | \dots | \mathbf{v}_n) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(i-1),i-1} (t a_{\pi(i),i}) a_{\pi(i+1),i+1} \dots a_{\pi(n),n} \\ &= t \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} \\ &= t \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n) . \end{aligned}$$

(3) Uvědomíme si, že prvek na místě (i, j) v matici $(\mathbf{v}_{\rho(1)} | \mathbf{v}_{\rho(2)} | \dots | \mathbf{v}_{\rho(n)})$ je $a_{i, \rho(j)}$. K rozepsání determinantu použijeme alternativní definici.

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{v}_{\rho(1)} | \mathbf{v}_{\rho(2)} | \dots | \mathbf{v}_{\rho(n)}) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1, \rho(\pi(1))} a_{2, \rho(\pi(2))} \dots a_{n, \rho(\pi(n))} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\rho\pi) a_{1, \rho\pi(1)} a_{2, \rho\pi(2)} \dots a_{n, \rho\pi(n)} \\ &= \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho\pi) a_{1, \rho\pi(1)} a_{2, \rho\pi(2)} \dots a_{n, \rho\pi(n)} \\ &= \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\pi \in S_n, \sigma = \rho\pi} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1, \sigma(1)} a_{2, \sigma(2)} \dots a_{n, \sigma(n)} \\ &= \operatorname{sgn}(\rho) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1, \sigma(1)} a_{2, \sigma(2)} \dots a_{n, \sigma(n)} \\ &= \operatorname{sgn}(\rho) \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

V předposlední úpravě jsme začali sčítat přes permutace $\sigma = \rho\pi$ místo π , což výsledek nezmění, protože soubor $(\rho\pi : \pi \in S_n)$ obsahuje všechny permutace v S_n právě jednou (viz tvrzení 6.13).

(4) Nejprve dokážeme pomocné tvrzení: Determinant matice $B = (b_{kl})$ řádu n , která má dva sloupce i, j ($i \neq j$) stejné, je nula.

Pro většinu těles bychom mohli použít předchozí bod: Protože (i, j) je lichá permutace a prohozením sloupců i a j se matice nezmění, platí

$\det(B) = -\det(B)$. Bohužel z toho plyne $\det(B) = 0$ pouze pro tělesa charakteristiky různé od 2. Proto obecně musíme postupovat jinak. V sumě

$$\det(B) = \sum_{\pi \in S_n} b_{1,\pi(1)} b_{2,\pi(2)} \cdots b_{n,\pi(n)}$$

k sobě seskupíme pro každou sudou permutaci π sčítanec odpovídající π a sčítanec odpovídající permutaci $(i\ j)\pi$. Toto seskupení můžeme provést a vyčerpáme jím všechny sčítance, protože soubor $\{(i\ j)\pi : \pi \in S_n, \operatorname{sgn}(\pi) = 1\}$ obsahuje všechny liché permutace v S_n právě jednou (viz tvrzení 6.13). Dostaneme

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\pi \in S_n, \operatorname{sgn}(\pi)=1} (\operatorname{sgn}(\pi) b_{1,\pi(1)} b_{2,\pi(2)} \cdots b_{n,\pi(n)} + \\ &\quad + \operatorname{sgn}((i\ j)\pi) b_{1,(i\ j)\pi(1)} b_{2,(i\ j)\pi(2)} \cdots b_{n,(i\ j)\pi(n)}) \\ &= \sum_{\pi \in S_n, \operatorname{sgn}(\pi)=1} (\operatorname{sgn}(\pi) b_{1,\pi(1)} b_{2,\pi(2)} \cdots b_{n,\pi(n)} - \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\pi) b_{1,\pi(1)} b_{2,\pi(2)} \cdots b_{n,\pi(n)}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

kde jsme použili $\operatorname{sgn}((i\ j)\pi) = -\operatorname{sgn}(\pi)$ a fakt, že B má shodný i -tý a j -tý sloupec.

Tím jsem dokázali pomocné tvrzení a důkaz čtvrtého bodu snadno dokončíme užitím předchozích.

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_i + t\mathbf{v}_j | \mathbf{v}_{i+1} | \cdots | \mathbf{v}_n) \\ &= \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_n) + \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_{i-1} | t\mathbf{v}_j | \mathbf{v}_{i+1} | \cdots | \mathbf{v}_n) \\ &= \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_n) + t \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_{i-1} | \mathbf{v}_j | \mathbf{v}_{i+1} | \cdots | \mathbf{v}_n) \\ &= \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

□

Protože determinant matice se shoduje s determinanem transponované matice (tvrzení 6.18), podobné tvrzení můžeme formulovat pro řádky. Bod (2) říká, že vynásobíme-li některý sloupec (nebo řádek) prvkem $t \in T$, determinant se zvětší t -krát. Další bod ukazuje, že prohodíme-li sloupce (řádky) podle nějaké permutace π , pak determinant nanejvýš změní znaménko, a to v případě, že π je lichá. Speciálně, pokud prohodíme dva sloupce (řádky), determinant změní znaménko. Poslední bod můžeme formulovat tak, že přičteme-li t -násobek některého sloupce (resp. řádku) k jinému sloupci (resp. řádku), determinant se nezmění.

Protože víme, jak spočítat determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice (tvrzení 6.17), můžeme k výpočtu determinantu obecné matice použít Gaussovu eliminaci. Přitom si můžeme pomoci také sloupcovými úpravami.

Geometricky jsme si již zdůvodnili vlastnosti (1) a (2) v případě $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ a $n = 2, 3$. Prohození dvou sloupců odpovídá zrcadlení podle přímky nebo roviny, takže determinant změní znaménko. To odůvodňuje (3). Následující obrázek vysvětluje čtvrtou vlastnost pro $n = 2$. Přičteme-li k jednomu z vektorů násobek druhého, příslušný rovnoběžníky budou mít stejnou jednu ze stran a stejnou výšku na tuto stranu jako původní rovnoběžník.

OBRAZEK

Příklad 6.20. Spočítáme determinant reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

V prvních dvou úpravách vynásobíme pro pohodlí poslední sloupec číslem $1/2$ a prohodíme první a třetí sloupec, abychom dostali na pozici $(1, 1)$ prvek 1. Dále budeme používat už jen řádkové úpravy. V jedné z nich vynásobíme druhý řádek číslem $1/3$. Musíme dát pozor na to, že prohazování a násobení determinant mění. Na násobení se můžeme v tomto kontextu dívat jako na vytýkání inverzního skaláru před determinant.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ & = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & 12 & 11 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 12 & 11 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} \\ & = -6 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 15 = 270 \end{aligned}$$

Výpočet budeme umět provést šikovněji pomocí elementárních úprav kombinovaných s rozvojem.

Příklad 6.21. Prohozením sloupců spočítáme determinant reálné matice.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & 8 & 0 & -2 \\ 7 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \text{sgn}((1 \ 4 \ 2 \ 3)) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ & = \text{sgn}((1 \ 4 \ 2 \ 3)) \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot 4 = 120 \end{aligned}$$

Provedli jsme prohození sloupců odpovídající permutaci $\rho = (1 \ 4 \ 2 \ 3)$ – sloupec 1 jsme přesunuli na místo 4, sloupec 4 na místo 2, atd. Tato permutace je lichá. Alternativně bychom postupně mohli prohazovat sloupce po dvou.

6.3.3. Další kritérium regularity. Z tvrzení 6.19 můžeme odvodit další kritérium pro regulárnost matice: matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant. Geometricky to pro reálné matice řádu 3 můžeme odůvodnit tak, že f_A nuluje objemy právě tehdy, když obraz $f_A(\mathbb{R}^3)$ je obsažen v nějaké rovině (tj. zobrazení zkolabuje prostor do roviny nebo dokonce přímky či bodu).

Tvrzení 6.22. Čtvercová matice je regulární právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$.

Důkaz. Elementární řádkové úpravy sice determinant mění, ale nemění „nulovost“ determinantu: prohozením řádků determinant změní znaménko, vynásobením nenulovým číslem t se determinant zvětší t -krát a přičtení násobku nějakého řádku k jinému determinant nezmění. Takže označíme-li B odstupňovaný tvar matice A , pak $\det(A) = 0$ právě tehdy, když $\det(B) = 0$. Matice B je v horním trojúhelníkovém tvaru, takže $\det(B)$ je součinem prvků na diagonále (tvrzení 6.17). Tento součin je nulový právě tehdy, když má B nulový řádek, což se stane právě tehdy, když A je singulární podle bodu (5) věty 4.30 charakterizující regulární matice. \square

Implikace zprava doleva zobecňuje fakt dokázaný v důkazu bodu (4), že determinant matice, která má dva sloupce stejné, je nulový.

Obecněji lze hodnotu libovolné matice určit podle determinantů čtvercových podmatic.

Definice 6.23. *Minorem řádu k matice A rozumíme determinant matice vzniklé z A výběrem k řádků a k sloupců.*

Příklad 6.24. Jedním ze minorů řádu 2 matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

je

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Matice B vznikne z A výběrem řádků 2 a 3 a výběrem sloupců 2 a 4.

Tvrzení 6.25. *Hodnota libovolné matice A je rovna největšímu číslu r takovému, že existuje nenulový minor matice A řádu r .*

Důkaz. Pro odstupňovaný tvar se tvrzení nahlédne snadno a číslo r se řádkovými úpravami nemění. Detaily si rozmyslete jako cvičení. \square

Například hodnota matice A je rovna 2 právě tehdy, když každý subdeterminant řádu 3 je nulový a existuje nenulový subdeterminant řádu 2.

6.3.4. *Determinant součinu.* Další aplikací tvrzení 6.19 je věta o determinantu součinu matic. K tomu si nejprve všimneme, jaké jsou determinanty elementárních matic:

- Matice odpovídající prohození dvou řádků má determinant -1 , protože vznikne z jednotkové matice prohozením těchto řádků (můžeme použít například bod (3) z tvrzení na jednotkovou matici, nebo přímo definici).
- Matice odpovídající vynásobení nějakého řádku prvkem $t \in T$ má determinant t , například podle věty o determinantu horní trojúhelníkové matice, nebo podle bodu (2).
- Matice odpovídající přičtení t -násobku nějakého řádku k jinému má determinant 1, například opět podle věty o determinantu horní nebo dolní trojúhelníkové matice, nebo podle bodu (4).

Z bodů (2),(3),(4) nyní vyplývá, že pro libovolnou elementární matici E a libovolnou čtvercovou matici B stejného řádu platí $\det(EB) = \det(E)\det(B)$. Každá regulární matice R je součinem elementárních matic $R = E_1E_2 \dots E_k$ (podle tvrzení 4.39), takže dostáváme

$$\begin{aligned} \det(RB) &= \det(E_1E_2 \dots E_kB) = \det(E_1)\det(E_2 \dots E_kB) = \dots \\ &= \det(E_1)\det(E_2) \dots \det(E_k)\det(B) = \dots = \det(R)\det(B) \end{aligned}$$

Tento vztah platí i pro singulární matice R , tedy obecně platí, že determinant součinu je součin determinantů.

Věta 6.26 (věta o determinantu součinu). *Pro libovolné matice A, B řádu n nad stejným tělesem platí $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

Důkaz. Pro regulární matici A jsme větu dokázali. Pokud A je singulární, pak AB je rovněž singulární. To lze zdůvodnit například pomocí tvrzení 5.82 o hodnotě součinu: $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) < n$. Obě strany rovnosti jsou proto rovny nule. \square

Věta má opět názorný geometrický význam. Pro reálné matice řádu tři udávají determinanty matic A, B koeficienty změny objemu a orientace pro zobrazení f_A, f_B . Matice AB odpovídá složenému zobrazení $f_A \circ f_B$, jeho koeficient změny objemu a orientace je zřejmě součinem těchto koeficientů pro matice A, B . Například, je-li $\det(A) = 2$ a $\det(B) = 3$, zobrazení f_B jakýkoliv útvar zvětší třikrát a f_A pak ještě dvakrát, takže dohromady se útvar zvětší šestkrát.

Pro součet podobná věta neplatí, například proto, že součet dvou singulárních matic může být regulární. Pro determinant inverzní matice dostaneme vzorec z věty o determinantu součinu.

Důsledek 6.27. *Je-li A regulární matice, pak $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.*

Důkaz. Podle věty o determinantu součinu je

$$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) ,$$

z čehož dostaneme vzorec vydělením $\det(A)$. (Determinant matice A je nenulový podle tvrzení 6.22.) \square

6.3.5. *Cramerovo pravidlo.* Jako poslední aplikaci základních vlastností determinantu dokážeme *Cramerovo pravidlo* pro řešení soustav lineárních rovnic s regulární maticí.

Věta 6.28 (Cramerovo pravidlo). *Nechť $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ je regulární matice řádu n a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pak j -tá složka vektoru řešení $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} ,$$

kde A_j je matice, která vznikne z A nahrazením j -tého sloupce vektorem \mathbf{b} , tj.

$$A_j = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_{j-1} | \mathbf{b} | \mathbf{a}_{j+1} | \dots | \mathbf{a}_n) .$$

Důkaz. Vztah $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ můžeme zapsat jako

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b} .$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \det(A_j) &= \det(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_{j-1} | \mathbf{b} | \mathbf{a}_{j+1} | \dots | \mathbf{a}_n) \\ &= \det\left(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_{j-1} | \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{a}_k | \mathbf{a}_{j+1} | \dots | \mathbf{a}_n\right) \\ &= \det(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_{j-1} | x_j \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_{j+1} | \dots | \mathbf{a}_n) \\ &= x_j \det(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_{j-1} | \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_{j+1} | \dots | \mathbf{a}_n) = x_j \det(A) , \end{aligned}$$

kde ve třetí úpravě jsme využili toho, že přičtením lineárním kombinací sloupců různých od j k sloupci j se determinant nezmění (to plyne z bodu (4) v tvrzení 6.19) a ve čtvrté úpravě jsme použili (2).

Z toho ihned vidíme dokazovaný vztah. \square

Cramerovo pravidlo můžeme použít pouze pro regulární matice, tj. pro čtvercové matice s nenulovým determinanem (viz tvrzení 6.22). Spíše než pro praktické počítání se využívá ve výpočtech a úvahách, kdy se může hodit explicitní vzorec pro nějakou složku řešení.

Příklad 6.29. Vypočítáme třetí složku řešení soustavy $Ax = b$ nad \mathbb{Z}_5 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Spočítáme determinant matice A .

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Matice A je tedy regulární a můžeme použít Cramerovo pravidlo. Spočítáme ještě determinant matice A_3 .

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Třetí složka řešení je

$$x_3 = \frac{3}{2} = 4 .$$

6.4. Rozvoj, adjungovaná matice.

Vezmeme-li v definici všechny členy obsahující vybraný prvek a_{ij} a vytkneme jej, v závorce dostaneme tzv. *algebraický doplněk* prvku a_{ij} . Až na znaménko je roven determinantu matice, která vznikne vynecháním řádku a sloupce obsahující a_{ij} . To dokážeme ve větě o rozvoji podle sloupce. Nejprve potřebný pojem.

Definice 6.30. Necht $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n a $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. *Algebraickým doplňkem* (též *kofaktorem*) prvku a_{ij} matice A rozumíme skalár

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) ,$$

kde M_{ij} je matice řádu $n - 1$, která vznikne z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Definice má smysl pro matice řádu $n > 1$. Pro matici řádu 1 definujeme $A_{11} = 1$. Tento případ je potřeba v některých tvrzeních této kapitoly rozebrat zvlášť, ale explicitně na to upozorňovat nebudeme.

Příklad 6.31. Algebraickým doplňkem prvku a_{12} v reálné matici

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

je

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-9 - (-20)) = -11 .$$

Věta 6.32 (o rozvoji podle sloupce). *Je-li A čtvercová matice řádu n a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pak*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} .$$

Důkaz. Potřebujeme dokázat, že koeficient u a_{ij} , vytkneme-li tento prvek ze všech členů, které jej obsahují, je rovný A_{ij} . Pro pohodlnost zvolíme trochu jiný postup důkazu.

1. krok. Pokud $a_{nn} = 1$ a všechny ostatní prvky v n -tém sloupci jsou nulové, pak $\det(A) = A_{nn}$.

Platí

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n-1),n-1} = \\ &= (-1)^{n+n} \sum_{\pi \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \dots a_{\pi(n-1),n-1} = A_{nn} . \end{aligned}$$

V druhé úpravě jsme vynechali nulové sčítance, ve třetí jsme použili $a_{nn} = 1$, ve čtvrté jsme použili $(-1)^{(n-1)+(n-1)} = 1$ a skutečnost, že znaménko permutace $\pi \in S_n$, pro kterou $\pi(n) = n$, je stejné jako znaménko permutace π zúžené na množinu $\{1, 2, \dots, n-1\}$ (to platí, protože tyto dvě permutace mají stejný redukovaný cyklický zápis).

2. krok. Pro libovolné $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pokud $a_{ij} = 1$ a všechny ostatní prvky v j -tém sloupci jsou nulové, pak $\det(A) = A_{ij}$.

Posuneme-li v matici A řádek i na poslední místo a potom sloupec j na poslední místo, dostaneme matici B , jejíž determinant je B_{nn} podle 1. kroku. Posunutí i -tého řádku na n -té místo odpovídá permutaci řádků $\sigma = (n \ (n-1) \ \dots \ i)$ a posunutí j -tého sloupce na n -té místo odpovídá permutaci sloupců $\rho = (n \ (n-1) \ \dots \ j)$. Podle bodu (3) tvrzení 6.19 o změně determinantu při permutaci sloupců a analogického tvrzení pro řádky máme

$$\det(A) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\rho) \det(B) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\rho) B_{nn} = (-1)^{i+j} B_{nn} = A_{ij} ,$$

kde $\operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^{i+j}$ je vidět z toho, že parita délek cyklů σ, ρ je stejná právě tehdy, když parita i a j je stejná.

3. krok. Označme $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$. Pomocí 2.kroku a bodů (1) a (2) z tvrzení 6.19 nyní výpočet dokončíme.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_n) \\ &= \det\left(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_{j-1} | \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i | \mathbf{a}_{j+1} | \dots | \mathbf{a}_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \det(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_{j-1} | \mathbf{e}_i | \mathbf{a}_{j+1} | \dots | \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} . \end{aligned}$$

(Rovněž jsme využili triviální skutečnosti, že algebraický doplněk prvku a_{ij} se nemění, změníme-li j -tý sloupec.) \square

Díky tvrzení 6.18 o transponování můžeme provádět rozvoj podle řádku:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} .$$

Příklad 6.33. Provedeme rozvoj podle druhého řádku.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + \\ &+ (-4) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Všimněte si, že se znaménka v algebraickém doplňku střídají, stačí tedy určit první.

Rozvoj podle sloupce (řádku) vznikne pouhým přeskupením výrazu z definice determinantu. Kdybychom provedli rozvoj pro matici řádu n , na vzniklé matice provedli rozvoj, atd., po $n - 1$ krocích bychom dostali znovu výraz z definice determinantu. Pro praktické počítání se rozvoj hodí v situaci, že některý řádek nebo sloupec je skoro celý nulový, nejlépe, když obsahuje jen jeden nenulový prvek. Pak je totiž většina sčítanců v rozvoji nulová a nemusíme počítat menší determinanty. Efektivní postup je vylimitovat jeden řádek nebo sloupec, provést rozvoj a pokračovat s jedním menším determinatem.

Příklad 6.34. Spočítáme znovu determinant v příkladu 6.20.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 30 & 0 & 18 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 30 & 18 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} \\ &= -180 - 90 = -270 \end{aligned}$$

V první úpravě jsme 4-násobek druhého řádku přičetli k prvnímu, pak jsme provedli rozvoj podle 2. sloupce a zbylý determinant jsme spočítali z definice.

Příklad 6.35. Vypočítáme determinant větší matice.

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} -3 & -1 & -3 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -10 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -4 & -1 \\ 5 & 1 & 10 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & -4 & -1 \\ 5 & 1 & 10 & -4 & 5 \\ -10 & 0 & -26 & 8 & -12 \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -1 \\ -10 & -26 & 8 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 11 \\ 6 & -26 & 8 & -36 \end{vmatrix} \\
 & = - \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & 11 \\ 6 & -26 & -36 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 0 & 20 & 15 \\ 0 & -47 & -42 \end{vmatrix} \\
 & = -2 \cdot \begin{vmatrix} 20 & 15 \\ -47 & -42 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 47 & 42 \end{vmatrix} = 10(168 - 141) = 270.
 \end{aligned}$$

Nejprve jsme téměř vynulovali 2. sloupec eliminací, užitím 4. řádku. Potom jsme determinant rozvinuli podle 2. sloupce, máme jediný nenulový člen se znaménkem $(-1)^{2+4} = 1$. Dále jsme vyliminovali 2. řádek (pomocí 3. sloupce). Následoval rozvoj podle 2. řádku, nenulový člen má znaménko $(-1)^{3+2} = -1$, atd.

6.4.1. *Adjungovaná matice.* Rozvoj podle j -tého sloupce probíhá tak, že vezmeme první prvek v j -tém sloupci, vynásobíme znaménkem $(-1)^{j+1}$ a determinantem matice, která vznikne vynecháním prvního řádku a j -tého sloupce. Pak postupujeme obdobně s dalšími prvky v j -tém sloupci a všechny takové výrazy sečteme. Pokud „omylem“ vždy vynecháváme jiný sloupec k , dostaneme nulový prvek tělesa.

Věta 6.36 (o falešném rozvoji). *Je-li A čtvercová matice řádu n a $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \neq k$, pak*

$$0 = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \dots + a_{nj} A_{nk} .$$

Důkaz. Označme B matici, která vznikne nahrazením k -tého sloupce matice A jejím j -tým sloupcem. Protože B má dva sloupce stejné, je B singulární (má lineárně závislé sloupce, takže můžeme použít bod (3) pozorování 5.84), a proto $\det(B) = 0$ podle kritéria v tvrzení 6.22. Na B použijeme rozvoj podle k -tého sloupce a využijeme toho, že $B_{ik} = A_{ik}$, protože algebraický doplněk prvku b_{ik} na k -tém sloupci nezávisí.

$$0 = \det(B) = b_{1k} B_{1k} + b_{2k} B_{2k} + \dots + b_{nk} B_{nk} = a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \dots + a_{nj} A_{nk}$$

□

Z algebraických doplňků matice $A = (a_{ij})$ vytvoříme tzv. *adjungovanou matici* tak, že prvek na místě (i, j) bude algebraický doplněk prvku a_{ji} . **Pozor na změnu pořadí indexů.**

Definice 6.37. *Adjungovanou maticí* ke čtvercové matici A rozumíme matici $\text{adj}(A)$ stejného řádu, která má na místě (i, j) prvek A_{ji} .

Řádkovou i sloupcovou verzi vět o rozvoji a falešném rozvoji jde formulovat maticovým vztahem.

Věta 6.38. Pro libovolnou čtvercovou matici A platí

$$\text{adj}(A)A = A \text{adj}(A) = \det(A)I_n .$$

Speciálně, pokud A je regulární, pak

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} .$$

Důkaz. Prvek na místě (i, j) v součinu $\text{adj}(A)A$ je $A_{1i}a_{1j} + A_{2i}a_{2j} + \dots + A_{ni}a_{nj}$. Pokud $i = j$ je výsledkem $\det A$, protože výraz je roven rozvoji podle i -tého sloupce. Pokud $i \neq j$ je výsledkem 0 podle věty o falešném rozvoji. Dohromady dostáváme $\text{adj}(A)A = \det(A)I_n$. Rovnost $A \text{adj}(A) = \det(A)I_n$ dostaneme obdobně podle vět o rozvoji a falešném rozvoji podle řádku. \square

Věta nám také dává explicitní vyjádření inverzní matice. Inverzní matici pro řády 2 a 3 lze její pomocí počítat rychle bez eliminace.

Příklad 6.39. Pro regulární matici A řádu 2 dostáváme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Příklad 6.40. Spočítáme inverzní matici k reálné matici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

Nejdřív spočítáme adjungovanou matici.

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & -11 & 10 \\ -15 & -10 & -13 \\ 6 & 4 & -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Determinant matice A by teď bylo neefektivní počítat zvlášť. Stačí spočítat například prvek na místě $(3, 3)$ v součinu $A \text{adj}(A)$.

$$\det(A) = 0 \cdot 10 + 2 \cdot (-13) + 5 \cdot (-11) = -81.$$

Vidíme, že A je regulární a platí

$$A^{-1} = -\frac{1}{81} \begin{pmatrix} 24 & -11 & 10 \\ -15 & -10 & -13 \\ 6 & 4 & -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -24 & 11 & -10 \\ 15 & 10 & 13 \\ -6 & -4 & 11 \end{pmatrix} .$$

6.5. Vandermondův determinant.

Tzv. *Vandermondova matice* vzniká při interpolaci polynomem. Budeme hledat polynom f nad tělesem \mathbf{T} stupně nejvýše $n - 1$, tj.

$$f = k_0 + k_1x + \dots + k_{n-1}x_{n-1}, \quad k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \in T ,$$

který splňuje podmínky

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = a_n ,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou dané prvky tělesa \mathbf{T} , přičemž a_1, a_2, \dots, a_n jsou navzájem různé. Pro koeficienty dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matice této soustavy se nazývá *Vandermondova matice* a její determinant *Vandermondův determinant*. Indukcí podle n dokážeme, že je roven

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i .$$

Z toho mimo jiné vyplývá, že Vandermondova matice je regulární (za předpokladu, že a_1, a_2, \dots, a_n jsou po dvou různé) a tedy hledaný polynom f existuje a je jednoznačně určený; nazývá se Lagrangeův interpolační polynom.

Vzorec snadno ověříme pro $n = 2$ (pro $n = 1$ by vzorec platil, pokud bychom definovali prázdný součin jako 1). Předpokládejme $n > 2$ a že vzorec platí pro menší hodnoty n . Začneme tím, že vyliminujeme první sloupec, tj. (-1) -násobek prvního řádku přičteme ke všem ostatním, a pak provedeme rozvoj podle prvního sloupce.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & \dots & a_3^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

Vytkneme z prvního řádku výraz $a_2 - a_1$, z druhého výraz $a_3 - a_2$, atd., a využijeme vzorce

$$c^k - d^k = (c - d)(c^{k-1} + c^{k-2}d + c^{k-3}d^2 + \dots + cd^{k-2} + d^{k-1}) .$$

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & \dots & a_3^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2 & \dots & a_2^{n-2} + a_2^{n-3} a_1 + \dots + a_1^{n-2} \\ 1 & a_3 + a_1 & a_3^2 + a_3 a_1 + a_1^2 & \dots & a_3^{n-2} + a_3^{n-3} a_1 + \dots + a_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + a_1 & a_n^2 + a_n a_1 + a_1^2 & \dots & a_n^{n-2} + a_n^{n-3} a_1 + \dots + a_1^{n-2} \end{vmatrix}$$

Dále přičteme $(-a_1)$ -násobek předposledního sloupce k poslednímu, \dots , $(-a_1)$ -násobek druhého sloupce ke třetímu, a nakonec $(-a_1)$ -násobek prvního sloupce ke druhému.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2 & \dots & a_2^{n-2} + a_2^{n-3} a_1 + \dots + a_1^{n-2} \\ 1 & a_3 + a_1 & a_3^2 + a_3 a_1 + a_1^2 & \dots & a_3^{n-2} + a_3^{n-3} a_1 + \dots + a_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + a_1 & a_n^2 + a_n a_1 + a_1^2 & \dots & a_n^{n-2} + a_n^{n-3} a_1 + \dots + a_1^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 + a_1 & a_3^2 + a_3 a_1 + a_1^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + a_1 & a_n^2 + a_n a_1 + a_1^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 + a_1 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + a_1 & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = V(a_2, \dots, a_n)$$

Vznikne Vandermondův determinant pro a_2, a_3, \dots, a_n , takže výpočet můžeme dokončit užitím indukčního předpokladu.

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_n) &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) V(a_2, \dots, a_n) \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} a_j - a_i = \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i \end{aligned}$$

Odvozený vzorec platí i v případě, že a_1, \dots, a_n nejsou navzájem různé, protože pak má Vandermondova matice dva stejné řádky, takže její determinant je nulový, stejně jako výraz $\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j - a_i$.

Cvičení

1. Vypočítejte obsah rovnoběžníku určeného vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} podle obrázku ??.
2. Promyslete si detailně důkaz tvrzení 6.3.
3. Najděte všechna řešení rovnic $\alpha\pi = \beta$, $\pi\alpha = \beta$ a $\alpha\pi\gamma = \beta$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in S_{10}$.

$$\alpha = (1 \ 5 \ 3 \ 2 \ 7)(4 \ 6), \quad \beta = (2 \ 3 \ 9 \ 10 \ 4)(7 \ 8), \quad \gamma = (1 \ 7)(2 \ 6)(4 \ 5)$$

4. Dokažte, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ permutace na konečné množině X má permutace $\pi\rho\pi^{-1}$ v zápisu pomocí nezávislých cyklů stejný počet cyklů délky k jako permutace ρ . Odvoďte z toho, že stejné tvrzení platí pro permutace $\pi\rho$ a $\rho\pi$.
5. Označme k počet cyklů v cyklickém zápisu permutace $\pi \in S_n$ (počítáme i cykly délky 1!). Dokažte, že $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{n+k}$.

6. Vypište z definice výraz pro determinant matice řádu 4.
7. Najděte vzorec pro determinant čtvercových matic $A = (a_{ij})$ řádu n takových, že $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i > n + 1 - j$.
8. Nechť A je blokově horní trojúhelníková matice, tj. matice tvaru

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ \hline 0 & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{rr} \end{array} \right),$$

kde $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{rr}$ jsou čtvercové matice (ne nutně stejného řádu). Dokažte, že $\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}) \dots \det(A_{rr})$.

9. Z předchozího cvičení by se mohlo zdát, že determinanty můžeme počítat blokově. Není tomu tak. Nalezněte matici

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

se čtvercovými bloky takovou, že $\det(A) \neq \det(A_{11}) \det(A_{22}) - \det(A_{12}) \det(A_{21})$.

10. Dokažte, že pro regulární matici A řádu n platí $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$.
11. Dokažte tvrzení 6.25

7. SKALÁRNÍ SOUČIN

Cíl .

V abstraktním vektorovém prostoru nemáme metrické pojmy jako délka vektoru nebo úhel dvou vektorů. Tyto pojmy zavedeme přidáním skalárního součinu.

7.1. Standardní skalární součin v \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n .

7.1.1. \mathbb{R}^n . Podíváme se nejprve na standardní skalární součin \cdot v aritmetickém vektorovém prostoru \mathbb{R}^n . Pro dva vektory $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ v \mathbb{R}^n je definován vztahem

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n .$$

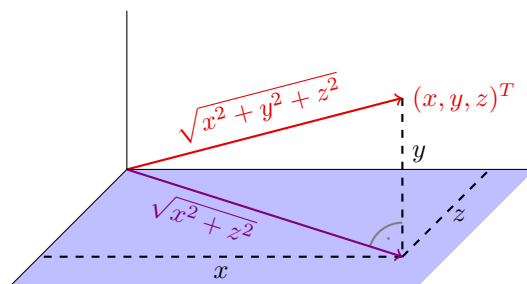
Pomocí standardního skalárního součinu můžeme vyjádřit eukleidovskou délku (též zvanou normu) vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} .$$

Délka vektoru $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je podle vzorce

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} ,$$

což pro $n = 2$ a $n = 3$ vidíme z Pythagorovy věty (a pro $n = 1$ máme $\|\mathbf{u}\| = |x_1|$, což rovněž souhlasí).



OBRÁZEK 10. Eukleidovská norma v \mathbb{R}^3

Ze standardního skalárního součinu můžeme rovněž určit úhel α mezi vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} . Platí totiž

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha .$$

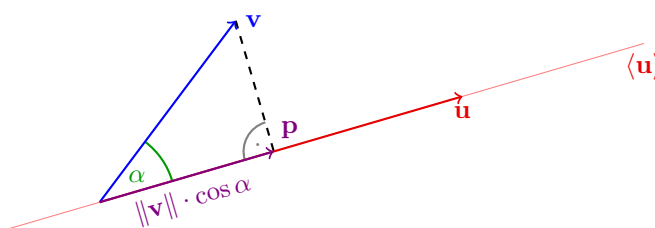
Přesvědčíme se o platnosti tohoto vztahu tak, že zapomeneme na chvíli na původní definici standardního skalárního součinu, místo toho budeme za definici považovat tento vztah a původní vzorec odvodíme. Při odvozování budeme používat geometrickou intuici, takže si budeme představovat situaci $n = 2$ nebo $n = 3$.

Nejprve si všimneme, že výraz je symetrický, tedy

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} ,$$

a že délka vektoru \mathbf{u} je rovná

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} .$$



OBRÁZEK 11. Geometrický význam standardního skalárního součinu

Výraz $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$ můžeme chápat jako součin délky vektoru \mathbf{u} a délky ortogonální (kolmé) projekce \mathbf{p} vektoru \mathbf{v} na přímku $\langle \mathbf{u} \rangle$:

(Symetricky se na výraz můžeme dívat jako na součin délky \mathbf{v} a délky ortogonální projekce vektoru \mathbf{u} na přímku $\langle \mathbf{v} \rangle$.)

Z toho můžeme nahlédnout, že skalární součin je lineární v první proměnné, tj. pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ a $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} .$$

OBRÁZEK

Ze symetrie nebo podobným odvozením získáme linearitu v druhé proměnné

$$\mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} .$$

Vektory kanonické báze jsou na sebe kolmé a mají délku 1, takže

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad (i \neq j), \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1 .$$

Z odvozených vztahů dostaneme původní vzorec pro skalární součin $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Pro přehlednost uvedeme nejprve odvození v případě $n = 2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) \\ &= (x_1 \mathbf{e}_1) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) + (x_2 \mathbf{e}_2) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) \\ &= (x_1 \mathbf{e}_1) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1) + (x_1 \mathbf{e}_1) \cdot (y_2 \mathbf{e}_2) + (x_2 \mathbf{e}_2) \cdot (y_1 \mathbf{e}_1) + (x_2 \mathbf{e}_2) \cdot (y_2 \mathbf{e}_2) \\ &= x_1 y_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + x_1 y_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + x_2 y_1 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + x_2 y_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

Obdobně v obecném případě:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i \mathbf{e}_i) \cdot (y_j \mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

Všimněte si, že odvození probíhalo podobně jako odvození vzorce pro determinant: Ukázali jsme linearitu ve všech proměnných a všimli jsme si, jak skalární součin (determinant) vypadá na kanonické bázi.

7.1.2. \mathbb{C}^n . Nad komplexními čísly je standardní skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ definován trochu jiným vzorcem:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \dots + \overline{x_n}y_n ,$$

kde \overline{x} značí číslo komplexně sdružené k x , tj. $\overline{a + bi} = a - bi$. Pro reálné vektory tato definice souhlasí s předchozí, protože komplexní sdružování s reálnými čísly nic nedělá.

Výhodou takové definice je třeba to, že skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ je vždy kladné reálné číslo (je součtem druhých mocnin absolutních hodnot složek), takže délka definovaná vztahem $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ je reálné číslo, které je nulové právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. (Pokud bychom definovali skalární součin bez komplexního sdružování, výraz $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ by nebyl vždy reálný a byl by roven nule i pro některé nenulové vektory.)

V reálném případě můžeme standardní skalární součin definovat maticovým součinem $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$. Abychom mohli maticově zapsat standardní skalární součin nad komplexními čísly, zavedeme pojem hermitovskey sdružené matice.

Definice 7.1. Hermitovskey sdružená matice k matici $A = (a_{ij})_{m \times n}$ je matice $A^* = (b_{ji})_{n \times m}$, kde $b_{ji} = \overline{a_{ij}}$ pro libovolné indexy $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Hermitovskey sdruženou matici k A tedy dostaneme transponováním a nahrazením všech prvků prvky komplexně sdruženými. Hermitovské sdružování se chová k ostatním operacím podobně jako transponování, viz cvičení.

Příklad 7.2.

$$\begin{pmatrix} 1+2i & 3 & i \\ 0 & 3-2i & 4i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 \\ 3 & 3+2i \\ -i & -4i \end{pmatrix}$$

S tímto značením můžeme psát

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^* \mathbf{v}$$

Standardní skalární součin nad komplexními čísly je stále lineární v druhé proměnné a platí $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, ale není lineární v první proměnné a není symetrický. Místo toho máme pro $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ a $t \in \mathbb{C}$ vztahy

$$(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \overline{t}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} .$$

7.2. Obecný skalární součin. Obecně definujeme skalární součin jako zobrazení přiřazující dvojici vektorů skalár, které má podobné vlastnosti jako standardní skalární součin. Skalární součin vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} budeme značit $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$, značení $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ budeme používat pouze pro standardní skalární součin v \mathbb{R}^n nebo \mathbb{C}^n . Skalární součin se definuje **pouze pro vektorové prostory nad tělesem \mathbb{R} nebo \mathbb{C}** .

Definice 7.3. Nechť V je vektorový prostor nad \mathbb{R} (resp. nad \mathbb{C}). Zobrazení $\langle | \rangle$ z $V \times V$ do \mathbb{R} (resp do \mathbb{C}), které dvojici \mathbf{u}, \mathbf{v} přiřadí skalár $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$, se nazývá *skalární součin*, pokud pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a $t \in \mathbb{R}$ (resp. $t \in \mathbb{C}$) platí

$$(SL1) \quad \langle t\mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \overline{t} \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle, \quad \langle \mathbf{u} | t\mathbf{v} \rangle = t \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle,$$

$$(SL2) \quad \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle, \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle,$$

$$(SCS) \quad \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle} \text{ a}$$

$$(SP) \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \text{ je nezáporné reálné číslo, které je nulové právě tehdy, když } \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Axiomy nejsou nezávislé, například druhé části axiomů linearity (SL1) a (SL2) vyplývají ze zbylých axiomů. Z axiomu (SL1) plyne, že $\langle \mathbf{u} | \mathbf{o} \rangle = \langle \mathbf{o} | \mathbf{u} \rangle = 0$. V případě reálných vektorových prostorů můžeme v axiomech (SL1) a (SCS) vynechat komplexní sdružení.

7.2.1. Příklady.

- Standardní skalární součin v \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n) je skalárním součinem v \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n). Všechny vlastnosti se ověří snadno z definice.
- Představme si \mathbb{R}^2 jako (nekonečný) list papíru a podívejme se na papír z jiné vzdálenosti a z jiného úhlu. Tím se nám změní vnímané délky vektorů a úhly mezi nimi. Uvažujme například situaci, kdy délka vektoru \mathbf{e}_1 zůstane 1, délka vektoru \mathbf{e}_2 bude 2 a vektory \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 budou svírat úhel $\pi/3$. Zavedeme skalární součin vztahem

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = (\text{„délka“ } \mathbf{u}) \cdot (\text{„délka“ } \mathbf{v}) \cdot \cos \alpha,$$

kde α je úhel, který svírají vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} . Z geometrického náhledu vidíme, že $\langle | \rangle$ splňuje všechny vlastnosti z definice, takže jde o skalární součin. Odvodíme si vzorec, jak jej spočítat. Máme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1 \rangle &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1 \\ \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2 \rangle &= 2 \cdot 2 \cdot \cos 0 = 4 \\ \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 \rangle &= 1 \cdot 2 \cdot \cos(\pi/3) = 1 = \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1 \rangle \end{aligned}$$

Podobným výpočtem jako v případě standardního skalárního součinu získáme vzorec

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= x_1 y_1 \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1 \rangle + x_1 y_2 \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 \rangle + x_2 y_1 \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1 \rangle + x_2 y_2 \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4x_2 y_2 . \end{aligned}$$

Tento vztah lze maticově zapsat

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

- Obecněji. Je-li A čtvercová matice nad \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}), pak zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$) definované vztahem

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{v}$$

vždy splňuje (SL1) a (SL2) (cvičení). Vlastnost (SCS) je splněna právě tehdy, když $A^* = A$ (cvičení). V reálném případě to znamená, že A je symetrická, v komplexním případě se maticím splňujícím $A^* = A$ říká *hermitovské*. Hermitovským maticím, pro které takto definované zobrazení splňuje i (SP) se říká pozitivně definitní.

Definice 7.4. Hermitovská matice A řádu n se nazývá *pozitivně definitní*, pokud $\mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{u}$ je pro libovolné $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ nezáporné reálné číslo, které je nulové právě když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Příkladem pozitivně definitních matic (viz cvičení) jsou matice typu $A = B^* B$, kde B je regulární matice řádu n nad \mathbb{R} (resp. nad \mathbb{C}). Později ukážeme, že platí i opak, tj. každá pozitivně definitní matice A je tvaru

$A = B^*B$, pro regulární matici B . Dokonce každý skalární součin na \mathbb{R}^n (a na \mathbb{C}^n) je tohoto tvaru.

Shrnutí: Je-li $A = B^*B$, pak zobrazení definované $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* A \mathbf{v}$ je skalární součin. Pro $A = I_n$ dostáváme standardní skalární součin. Jako ukázkou jiného konkrétního příkladu vezmeme

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 & 0 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix},$$

tedy

$$A = B^*B = B^T B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 & 1/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 & 0 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příslušný skalární součin v \mathbb{C}^2 je dán vztahem

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = (\overline{x_1}, \overline{x_2}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_1}y_2 + \overline{x_2}y_1 + 4\overline{x_2}y_2$$

kde $\mathbf{u} = (x_1, x_2)^T$ a $\mathbf{v} = (y_1, y_2)^T$. Stejný vztah (kde nemusíme komplexně sdružovat) definuje skalární součin v \mathbb{R}^2 , tentýž jako v předchozím příkladu.

- Na prostoru spojitých reálných (nebo komplexních) funkcí na intervalu $\langle 1, 10 \rangle$ je

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \int_1^{10} \overline{\mathbf{u}} \mathbf{v}$$

skalární součin. Obecněji například

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \int_1^{10} \overline{\mathbf{u}} \mathbf{v} \mathbf{w},$$

kde \mathbf{w} je nějaká kladná váhová funkce.

- Prostor ℓ_2 je tvořen posloupnostmi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ komplexních čísel splňujícími

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

(Je třeba si rozmyslet, že tato množina tvoří spolu s přirozenými operacemi sčítání a násobení skalárem vektorový prostor.) Na tomto prostoru je

$$\langle (a_n)_{n=1}^{\infty} | (b_n)_{n=1}^{\infty} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n.$$

skalární součin.

- Důležité příklady skalárního součinu pochází z pravděpodobnosti. Vektorový prostor tvoří náhodné veličiny na nějakém pevně zvoleném pravděpodobnostním prostoru. Tzv. kovariance, která, zhruba řečeno, měří míru závislosti jedné veličiny na druhé, splňuje všechny vlastnosti skalárního součinu až na implikaci zleva doprava v podmínce (SP) – $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle$ může být nula i pro nenulovou veličinu \mathbf{u} . (Tento drobný technický nedostatek lze odstranit ztotožněním veličin, jejichž rozdíl má nulový rozptyl.)

7.2.2. *Norma.* Normu vektoru v prostoru se skalárním součinem zavedeme stejným vztahem jakým jsme vyjádřili eukleidovskou normu (délku) pomocí standardního skalárního součinu.

Definice 7.5. Necht V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$. *Normou* vektoru $\mathbf{v} \in V$ rozumíme reálné číslo

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle} .$$

Vektor \mathbf{u} se nazývá *jednotkový*, pokud $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Definice dává smysl, protože výraz pod odmocninou je podle (SP) vždy nezáporné reálné číslo. Norma závisí na skalárním součinu, takže když používáme symbol normy, musí být z kontextu jasné, se kterým skalárním součinem pracujeme. Podobně i pro další pojmy jako úhel nebo kolmost, které budou zavedeny později.

Příklad 7.6.

- Norma vektoru $\mathbf{u} = (1, 1)^T$ v prostoru \mathbb{R}^2 se standardním skalárním součinem je $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} = \sqrt{2}$. Norma vektoru \mathbf{u} v prostoru \mathbb{R}^2 se skalárním součinem

$$\langle (x_1, x_2)^T | (y_1, y_2)^T \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

je ale $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{7}$.

- Norma vektoru $(1 + i, 2, 3 - 2i)^T$ v prostoru \mathbb{C}^3 se standardním skalárním součinem je

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \\ 3 - 2i \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 \\ 3 + 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \\ 3 - 2i \end{pmatrix}} = \sqrt{|1 + i|^2 + |2|^2 + |3 + 2i|^2} = \sqrt{19} .$$

Norma určená skalárním součinem má následující vlastnosti.

Tvrzení 7.7. *Necht V je vektorový prostor nad \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) se skalárním součinem $\langle | \rangle$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a $t \in \mathbb{R}$ (resp. $t \in \mathbb{C}$). Pak platí*

- (1) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, přičemž $\|\mathbf{u}\| = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.
- (2) $\|t\mathbf{u}\| = |t| \|\mathbf{u}\|$.
- (3) (Rovnoběžníkové pravidlo.) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.
- (4) (Polarizační identita.) $\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2)$, kde $\operatorname{Re}(x)$ značí reálnou část x .

Důkaz.

- (1) Snadný důsledek (SP).
- (2) Použitím (SL1) dostáváme

$$\|t\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle t\mathbf{u} | t\mathbf{u} \rangle} = \sqrt{t\bar{t} \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{|t|^2 \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle} = |t| \sqrt{\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle} = |t| \|\mathbf{u}\| .$$

- (3) Ve výpočtu stačí použít (SL2).

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \\ &= 2\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

(4) Ze (SL2) a (SCS) vypočteme

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle} .$$

Protože $x + \bar{x} = 2\operatorname{Re}(x)$, dostáváme

$$2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 .$$

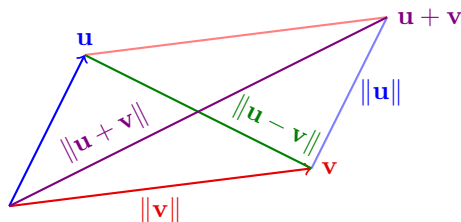
□

Důsledkem (1) a (2) je, že pro nenulový vektor \mathbf{u} je jeho násobek

$$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

jednotkový vektor. Říkáme, že $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ vznikl z \mathbf{u} *znormováním*.

Rovnoběžníkové pravidlo je ilustrováno na obrázku.



OBRÁZEK 12. Rovnoběžníkové pravidlo

Polarizační identita vyjadřuje reálnou část skalárního součinu pouze pomocí normy. Podobný vztah jde napsat i pro imaginární část (pokud pracujeme v prostoru nad \mathbb{C}), viz cvičení. Skalární součin je tedy určen normou. Různé další varianty polarizační identity jsou ve cvičeních.

7.2.3. *Cauchyho-Schwarzova nerovnost, úhel*. Pro vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsme nahlédli, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$. Z toho také vyplývá, že absolutní hodnota $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$ nemůže být větší než součin norm $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$, protože kosinus úhlu je vždy v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Vztah $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$ jde naopak použít pro zavedení úhlu mezi dvěma vektory v libovolném prostoru se skalárním součinem. Aby byl úhel dobře definován, musíme dokázat, že obecně platí $|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$. Tato nerovnost se nazývá Cauchyho-Schwarzova nerovnost (též Bunjakovského nerovnost, nebo Cauchyho-Schwarzova-Bunjakovského nerovnost, apod.) a je asi jednou z nejdůležitějších nerovností v matematice.

Věta 7.8 (Cauchyho-Schwarzova nerovnost). *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Pak platí*

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| ,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je lineárně závislá posloupnost.

Důkaz. Pokud je posloupnost (\mathbf{u}, \mathbf{v}) lineárně závislá, pak $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ nebo $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ pro nějaké $t \in \mathbb{C}$. V prvním případě je

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| = |\langle t\mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle| = |\bar{t} \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle| = |t| \|\mathbf{v}\|^2$$

a

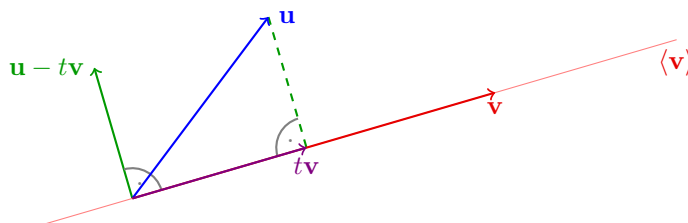
$$\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| = \|t\mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\| = |t| \|\mathbf{v}\|^2 .$$

V případě $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ se rovnost odvodí podobně.

Předpokládejme, že (\mathbf{u}, \mathbf{v}) je lineárně nezávislá posloupnost a odvoďme ostrou nerovnost. Díky lineární nezávislosti pro libovolné $t \in \mathbb{C}$ platí

$$0 < \|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 .$$

Zvolíme $t \in \mathbb{C}$ tak, aby platilo $\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = 0$. Geometrický význam v případě standardního skalárního součinu v \mathbb{R}^n je vyznačen na obrázku: vektor $t\mathbf{v}$ je ortogonální projekcí vektoru \mathbf{u} na $\langle \mathbf{v} \rangle$. Později dáme této intuici přesný význam pro obecný skalární součin.



OBRÁZEK 13. K důkazu Cauchy-Schwarzovy nerovnosti

Vztah $\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = 0$ je ekvivalentní $\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle - t \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = 0$, což je ekvivalentní

$$t = \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} .$$

(Nulou nedělíme, protože vektor \mathbf{v} je nenulový podle předpokladu o lineární nezávislosti (\mathbf{u}, \mathbf{v}) .)

Při této volbě t dostáváme

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle - \bar{t} \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - t \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{\overline{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle} \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \end{aligned}$$

Po vynásobení $\|\mathbf{v}\|^2$, drobné úpravě a odmocnění (oba výrazy, z nichž se počítá druhá mocnina jsou kladné) vyjde dokazovaná nerovnost:

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \\ 0 < \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|^2 \\ |\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|^2 < \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \\ |\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| < \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

□

Příklad 7.9. Pro standardní skalární součin v \mathbb{C}^n říká Cauchyho-Schwarzova nerovnost

$$|\overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \dots + \overline{x_n}y_n| \leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2} .$$

V případě skalárního součinu na \mathbb{C}^2 daného vzorcem

$$\langle (x_1, x_2)^T | (y_1, y_2)^T \rangle = 5\bar{x}_1 y_1 - 2\bar{x}_1 y_2 - 2\bar{x}_2 y_1 + \bar{x}_2 y_2$$

dostáváme

$$\begin{aligned} & |5\bar{x}_1 y_1 - 2\bar{x}_1 y_2 - 2\bar{x}_2 y_1 + \bar{x}_2 y_2| \\ & \leq \sqrt{5|x_1|^2 - 4\operatorname{Re}(\bar{x}_1 x_2) + |x_2|^2} \sqrt{5|y_1|^2 - 4\operatorname{Re}(\bar{y}_1 y_2) + |y_2|^2} . \end{aligned}$$

Pro prostor spojitých komplexních funkcí na intervalu $\langle 1, 10 \rangle$ se skalárním součinem $\langle f | g \rangle = \int_1^{10} \bar{f} g$ je nerovnost

$$\left| \int_1^{10} \bar{f} g \right| \leq \sqrt{\int_1^{10} |f|^2} \sqrt{\int_1^{10} |g|^2}$$

Důležitým důsledkem Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti je trojúhelníková nerovnost.

Důsledek 7.10 (Trojúhelníková nerovnost). *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Pak platí*

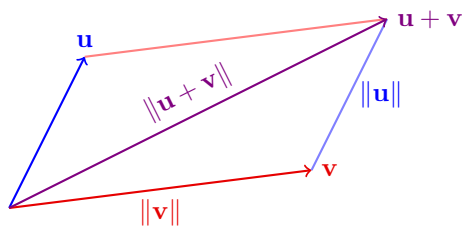
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| .$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle} + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

Cauchyho-Schwarzovu nerovnost jsme použili v předposlední úpravě. Výrazy pod druhými mocninami jsou kladné, takže nerovnost plyne odmocněním. \square

Geometrický význam je patrný z obrázku.



OBRÁZEK 14. Trojúhelníková nerovnost

Zobrazení, které vektoru přiřadí skalár, které splňuje podmínky (1) a (2) z tvrzení 7.7 a trojúhelníkovou nerovnost, se nazývá norma. Existuje mnoho norm, které nepochází ze skalárního součinu, například v \mathbb{R}^n máme normu $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, která měří vzdálenost, když se můžeme pohybovat pouze pravoúhlým směrem (proto se jí někdy říká manhattanská norma). Norma pochází ze skalárního součinu právě tehdy, když splňuje rovnoběžníkové pravidlo, viz cvičení.

Cauchyho-Schwarzova nerovnost nám umožňuje definovat úhel mezi vektory. Úhel definujeme v případě reálných vektorových prostorů.

Definice 7.11. Nechť V je vektorový prostor nad \mathbb{R} se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{o} \neq \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Úhlem mezi vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} rozumíme reálné číslo $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ splňující

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Úhel mezi vektory existuje a je určen jednoznačně, protože zlomek je v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ podle Cauchy-Schwarzovo nerovnosti a funkce \cos je bijekcí $\langle 0, \pi \rangle$ na interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Pro libovolný skalární součin nad reálnými čísly tedy máme vztah

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha .$$

Z tohoto vztahu snadno odvodíme kosinovou větu.

Tvrzení 7.12 (Kosinová věta). Nechť V je vektorový prostor nad \mathbb{R} se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{o} \neq \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Pak platí

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha ,$$

kde α je úhel mezi vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} .

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha \end{aligned}$$

□

Nad komplexními čísly se úhel definuje jako číslo z intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ splňující $\cos \alpha = \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$, ale tento pojem nebudeme používat.

7.3. Kolmost.

Ze vztahu $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$ vidíme, že (nenulové) vektory svírají úhel $\pi/2$ právě tehdy, když je jejich skalární součin nula. To vede k přirozené definici kolmosti vektorů.

Definice 7.13. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ nazýváme *kolmé* (nebo *ortogonální*) a píšeme $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, pokud $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$.

Množina, nebo posloupnost, M vektorů z V se nazývá *ortogonální*, pokud $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ pro libovolné dva různé prvky množiny (nebo posloupnosti) M .

Množina (posloupnost) M se nazývá *ortonormální*, pokud je ortogonální a každý vektor \mathbf{v} z M je jednotkový.

Z vlastnosti (SCS) plyne, že ortogonalita nezávisí na pořadí vektorů. Z vlastnosti (SL1) vidíme, že jsou-li dva vektory kolmé, pak jsou kolmé i jejich libovolné násobky. Máme-li ortogonální množinu nenulových vektorů $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$, můžeme z ní vytvořit ortonormální množinu znormováním, tj.

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} \right\}$$

je ortonormální.

Z geometrického náhledu v \mathbb{R}^3 vidíme, že ortogonální posloupnost nenulových vektorů je lineárně nezávislá. Obecně:

Tvrzení 7.14. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$. Ortogonální posloupnost nenulových vektorů z V je lineárně nezávislá.

Důkaz. Je-li $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ ortogonální posloupnost vektorů z V a platí

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o} ,$$

pak skalárním vynásobením obou stran zleva vektorem \mathbf{v}_i ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$) a využitím (SL1), (SL2) a kolmosti dostáváme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_i | a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k \rangle &= \langle \mathbf{o} | \mathbf{v} \rangle \\ a_1 \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_1 \rangle + a_2 \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_2 \rangle + \dots + a_k \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_k \rangle &= 0 \\ a_i \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i \rangle &= 0 . \end{aligned}$$

Protože vektor \mathbf{v}_i je nenulový, platí podle (SP) vztah $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 > 0$, takže z odvozeného vztahu vyplývá $a_i = 0$. Ukázali jsme, že jediná lineární kombinace, která dává nulový vektor, je triviální, takže posloupnost je lineárně nezávislá (viz bod (2) tvrzení 5.27). \square

Z tvrzení vyplývá, že ortogonální posloupnost n nenulových vektorů v prostoru dimenze n je ortogonální báze, protože je lineárně nezávislá a lineárně nezávislá posloupnost n vektorů je báze podle bodu (4) v pozorování 5.58

Příklad 7.15. V prostoru \mathbb{R}^n (nebo \mathbb{C}^n) se standardním skalárním součinem je kanonická báze ortonormální.

Posloupnost vektorů $((1, 2, 2)^T, (-2, -1, 2)^T)$ v \mathbb{R}^3 (nebo \mathbb{C}^3) je ortogonální, ale není ortonormální. Znormováním dostaneme ortonormální posloupnost

$$\left(\frac{1}{3}(1, 2, 2)^T, \frac{1}{3}(-2, -1, 2)^T \right) .$$

Tuto posloupnost lze doplnit na ortonormální bázi: posloupnost

$$\left(\frac{1}{3}(1, 2, 2)^T, \frac{1}{3}(-2, -1, 2)^T, \frac{1}{3}(2, -2, 1) \right)$$

je ortonormální, takže je to podle poznámky za tvrzením ortonormální báze. Později budeme pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu umět každou ortogonální (resp. ortonormální) posloupnost nenulových vektorů v konečně generovaném prostoru doplnit do ortogonální (resp. ortonormální) báze.

Příklad 7.16. V prostoru \mathbb{R}^2 se skalárním součinem daným

$$\langle (x_1, x_2)^T | (y_1, y_2) \rangle = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

(ověřte, že je to skutečně skalární součin) je posloupnost

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

ortogonální, protože

$$\langle (1, 0)^T | (-1, 2)^T \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 ,$$

tedy tvoří ortogonální bázi. Spočítáme normy vektorů a vytvoříme ortonormální bázi.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1,0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(2,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

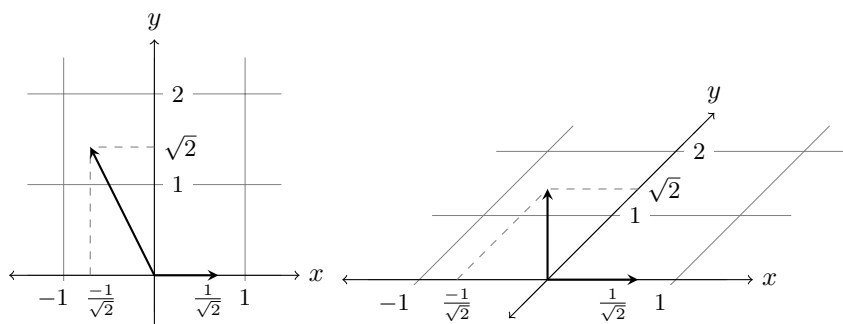
$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1,2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{(0,1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

Posloupnost

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

je tedy ortonormální báze.

Pokud si nakreslíme tyto dva vektory jako kolmé vektory jednotkové velikosti a ostatní vektory kreslíme v tomto souřadném systému, pak délky a úhly při daném skalárním součinu jsou běžné, eukleidovské délky a úhly na obrázku. Tento fakt dokážeme v tvrzení 7.21.



Příklad 7.17. V prostoru spojitých funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ se skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$$

je množina $\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots\}$ ortogonální. Toto je základní fakt v oboru Fourierových řad.

Jednoduchým důsledkem definice kolmosti je zobecnění Pythagorovy věty pro libovolný skalární součin:

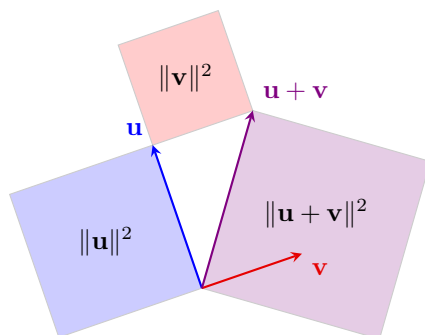
Tvrzení 7.18 (Pythagorova věta). *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$. Jsou-li vektory $u, v \in V$ kolmé, pak*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

Důkaz.

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v | u + v \rangle = \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \langle v | v \rangle$$

Díky kolmosti jsou prostřední dva členy nulové, takže výraz je roven $\|u\|^2 + \|v\|^2$. \square



Indukcí lze Pythagorovu větu zobecnit na libovolný konečný počet vektorů: Je-li $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ ortogonální množina, pak

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \dots + \|\mathbf{v}_k\|^2 .$$

Zobecnění této rovnosti na nekonečné množiny vektorů se někdy říká *Parsevalova identita*.

7.3.1. *Souřadnice vektoru vzhledem k ortonormální bázi.* Vzhledem k ortonormální bázi se souřadnice vektoru počítají velmi snadno:

Tvrzení 7.19. *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jeho ortonormální báze a $\mathbf{u} \in V$. Pak*

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_n ,$$

jinými slovy,

$$[\mathbf{u}]_B = (\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u} \rangle, \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u} \rangle, \dots, \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{u} \rangle)^T .$$

Důkaz. Označme $[\mathbf{u}]_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, neboli

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n .$$

Podobně jako v důkazu lineární nezávislosti ortogonální množiny nenulových vektorů skalárně vynásobíme obě strany zleva vektorem \mathbf{v}_i a dostaneme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{v}_i | a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_k \mathbf{v}_k \rangle \\ \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u} \rangle &= a_1 \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_1 \rangle + a_2 \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_2 \rangle + \dots + a_k \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_k \rangle \\ \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u} \rangle &= a_i \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i \rangle = a_i , \end{aligned}$$

takže $a_i = \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u} \rangle$. □

Souřadnicím vzhledem k ortonormální bázi se někdy říká *Fourierovy koeficienty* vzhledem k této bázi. Obecněji z důkazu vidíme, že pro ortogonální B platí

$$[\mathbf{u}]_B = \left(\frac{\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}, \frac{\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}, \dots, \frac{\langle \mathbf{v}_n | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \right)^T$$

Příklad 7.20. Určíme souřadnice vektoru $\mathbf{u} = (3 + i, 2, i)^T \in \mathbb{C}^3$ vzhledem k ortonormální bázi

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2i \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

prostoru \mathbb{C}^3 se standardním skalárním součinem.

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_B &= (\mathbf{v}_1^* \mathbf{u}, \mathbf{v}_2^* \mathbf{u}, \mathbf{v}_3^* \mathbf{u})^T \\ &= \left(\frac{1}{3}(-i, -2i, -2i) \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{3}(-2, -1, 2) \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3}(2, -2, 1) \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \right)^T \\ &= \left(\frac{1}{3}(3-7i), -\frac{8}{3}, \frac{1}{3}(2+3i) \right)^T. \end{aligned}$$

Skutečně

$$\begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(3-7i) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2i \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(2+3i) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k ortonormální bázi přechází skalární součin na standardní. Přesněji, skalární součin dvou vektorů je roven standardnímu skalárnímu součinu souřadnic těchto vektorů vzhledem k ortonormální bázi.

Tvrzení 7.21. *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ jeho ortonormální báze a $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$. Pak*

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B.$$

Důkaz. Označme $[\mathbf{u}]_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $[\mathbf{w}]_B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, tedy

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{w} = b_1 \mathbf{v}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + \dots + b_n \mathbf{v}_n.$$

Pomocí (SL2), (SL1) a ortonormality postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i \left| \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{v}_j \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_i \mathbf{v}_i | b_j \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^* b_j \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B \end{aligned}$$

□

Tvrzení ospravedlňuje poznámku z příkladu 7.16: Pokud si nakreslíme vektory ortonormální báze jako jednotkové navzájem kolmé vektory a ostatní vektory kreslíme v tomto souřadném systému, pak délky a úhly při daném skalárním součíně jsou běžné, eukleidovské délky a úhly na obrázku.

Příklad 7.22. V prostoru \mathbb{R}^2 se skalárním součinem

$$\langle (x_1, x_2)^T | (y_1, y_2) \rangle^T = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

je posloupnost

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

ortonormální báze (viz příklad 7.16. Uvažujme vektory $\mathbf{u} = (2, 3)^T$ a $\mathbf{v} = (1, 1)^T$. Z tvrzení 7.19 spočteme jejich souřadnice vzhledem k B a pak vypočítáme skalární součin podle tvrzení 7.21.

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_B &= \left(\left\langle \mathbf{u} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \mathbf{u} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle \right)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \\ [\mathbf{v}]_B &= \left(\left\langle \mathbf{v} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \mathbf{v} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle \right)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle &= [\mathbf{u}]_B \cdot [\mathbf{v}]_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(7, 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 \end{aligned}$$

To můžeme ověřit z definice skalárního součinu.

7.3.2. Ortogonální doplněk. Definici kolmosti rozšíříme na množiny vektorů.

Definice 7.23. Necht V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $\mathbf{v} \in V$, $M, N \subseteq V$. Říkáme, že \mathbf{v} je kolmý na M , zapisujeme $\mathbf{v} \perp M$, pokud \mathbf{v} je kolmý na každý vektor z množiny M .

Říkáme, že M je kolmá na N , zapisujeme $M \perp N$, pokud každý vektor množiny M je kolmý na každý vektor množiny N .

Pokud M je kolmá na N , pak v jejich průniku může být pouze nulový vektor (rozmyslete si jako cvičení). Například tabule není kolmá na podlahu, i když svírají úhel $\pi/2$ (úhel mezi podprostory definujeme později jako největší úhel, který svírají vektory jednotlivých podprostorů). Kolmost se přenáší na lineární obal:

Pozorování 7.24. Necht V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $M, N \subseteq V$. Pokud $M \perp N$, pak $\langle M \rangle \perp \langle N \rangle$.

Důkaz. Pokud $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{u}_i$, kde a_i jsou skaláry a $\mathbf{u}_i \in M$, a $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^l b_j \mathbf{v}_j$, kde b_j jsou skaláry a $\mathbf{v}_j \in N$, pak z lineariry, tj. z vlastností (SL1) a (SL2), máme

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{u}_i \left| \sum_{j=1}^l b_j \mathbf{v}_j \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \overline{a_i} b_j \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{v}_j \rangle = 0 .$$

□

Největší množina vektorů kolmá na danou množinu M se nazývá ortogonální doplněk.

Definice 7.25. Necht V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $M \subseteq V$. *Ortogonální doplněk* množiny M rozumíme množinu všech vektorů kolmých na každý vektor z M , značíme M^\perp :

$$M^\perp = \{ \mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \perp M \} .$$

Podle definice M je kolmá na M^\perp a M^\perp je největší taková množina. Další jednoduché vlastnosti:

Pozorování 7.26. Necht V je prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a $M, N \subseteq V$. Pak platí

- (1) M^\perp je podprostor V ,
- (2) Je-li $M \subseteq N$, pak $N^\perp \subseteq M^\perp$,
- (3) $M^\perp = \langle M \rangle^\perp$,

Důkaz. Důkaz se provede snadno z definic a předchozího pozorování. Přenecháme jej do cvičení. \square

V \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem je ortogonální doplněk množiny $M = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ dvou lineárně nezávislých vektorů přímka kolmá na rovinu $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Ortogonálním doplňkem nenulového vektoru (nebo jeho lineárního obalu) je rovina.

Příklad 7.27. Určíme ortogonální doplněk roviny $U = \langle (1, 2, 5)^T, (0, 1, 1)^T \rangle$ v prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem. Podle (3) je U^\perp rovná množině všech vektorů \mathbf{x} kolmých na oba generátory, tj. množině vektorů, pro které $(1, 2, 5)\mathbf{x} = 0$ a $(0, 1, 1)\mathbf{x} = 0$. Maticově

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hledáme tedy řešení homogenní soustavy s maticí, jejíž řádkové vektory jsou generátory U :

$$U^\perp = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

V příkladu jsme viděli, že k určení ortogonálního doplňku množiny vektorů $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ (nebo podprostoru $\langle M \rangle$) v aritmetickém vektorovém prostoru \mathbb{R}^n se standardním skalárním součinem stačí napsat vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ do řádků matice a vyřešit příslušnou homogenní soustavu. Při standardním skalárním součinu tedy platí

$$(\text{Im } A^T)^\perp = \text{Ker } A .$$

To nám dává nad \mathbb{R} další interpretaci řešení homogenní soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ – určujeme ortogonální doplněk řádků matice A . V \mathbb{C}^n se standardním skalárním součinem je ještě třeba přidat komplexní sdružování:

$$(\text{Im } A^*)^\perp = \text{Ker } A .$$

Obecněji, počítáme-li vzhledem k ortonormální bázi, pak skalární součin se chová jako standardní (viz tvrzení 7.21), takže ortogonální doplněk množiny vektorů můžeme spočítat podobně:

Pozorování 7.28. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$, B jeho ortonormální báze, $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$. Označme A matici s řádky $[\mathbf{v}_1]_B^*$, $[\mathbf{v}_2]_B^*$, \dots , $[\mathbf{v}_k]_B^*$. Pak*

$$[M^\perp]_B = \text{Ker } A .$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} [M^\perp]_B &= \{[\mathbf{u}]_B : \mathbf{u} \perp M\} = \{[\mathbf{u}]_B : \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u} \rangle = \dots = \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{u} \rangle = 0\} \\ &= \{[\mathbf{u}]_B : [\mathbf{v}_1]_B^*[\mathbf{u}]_B = [\mathbf{v}_2]_B^*[\mathbf{u}]_B = \dots = [\mathbf{v}_k]_B^*[\mathbf{u}]_B = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\} = \text{Ker } A \end{aligned}$$

\square

Důležité netriviální vlastnosti ortogonálního doplňku jsou shrnuty v následující větě o ortogonálním doplňku.

Věta 7.29. *Nechť V je konečně generovaný prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a W je podprostor V . Pak platí*

- (1) $\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$,
- (2) $V = W \oplus W^\perp$,
- (3) $(W^\perp)^\perp = W$.

Důkaz. V důkazu použijeme skutečnost, která bude dokázána teprve později ve větě 7.43, a to, že každý prostor konečné dimenze má nějakou ortonormální bázi B .

Zvolme nějakou bázi $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ prostoru W , tj. $\dim(W) = k$.

- (1) Označme A matici s řádky $[\mathbf{w}_1]_B, [\mathbf{w}_2]_B, \dots, [\mathbf{w}_k]_B$. Ortogonální doplněk prostoru W vyjádřený v bázi B je podle pozorování 7.28 jádrem matice \bar{A} . Matice má k lineárně nezávislých řádků, takže $\text{rank}(\bar{A}) = \text{rank}(A) = k$. Podle věty 5.90 o dimenzi jádra a obrazu máme $\dim(\text{Ker } A) = n - k$.
- (2) Protože podprostor W je kolmý na W^\perp , jejich průnikem je triviální podprostor $\{\mathbf{o}\}$. Podle věty 5.94 o dimenzi součtu a průniku máme

$$\dim(W + W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp) - \dim(W \cap W^\perp) = k + n - k - 0 = n .$$

Podprostor dimenze n v prostoru dimenze n je celý prostor (tvrzení 5.60), takže $W + W^\perp = V$.

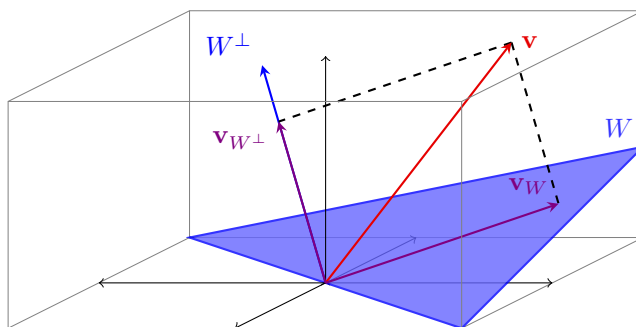
- (3) Podprostor W je kolmý na W^\perp , takže W je podprostorem $(W^\perp)^\perp$. Podle (1) máme $\dim(W^\perp) = n - k$ a $\dim((W^\perp)^\perp) = n - (n - k) = k$. Takže $W = (W^\perp)^\perp$ opět podle tvrzení 5.60.

□

Každý vektor ve V lze podle (2) vyjádřit jednoznačně jako součet vektoru \mathbf{v}_W ve W a vektoru \mathbf{v}_{W^\perp} kolmého na W :

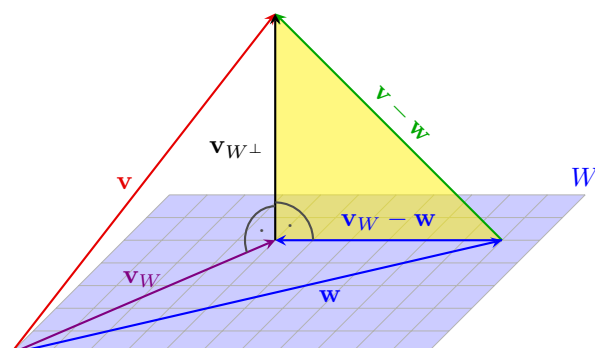
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_W + \mathbf{v}_{W^\perp}$$

Definice 7.30. Vektoru \mathbf{v}_W říkáme *ortogonální projekce* vektoru \mathbf{v} na W . Vektor \mathbf{v}_{W^\perp} se nazývá *kolmice* vektoru \mathbf{v} na W . (Kolmice je tedy ortogonální projekce \mathbf{v} na W^\perp .)



Důsledkem Pythagorovy věty je, že vektor \mathbf{v}_W je nejlepší aproximací vektoru \mathbf{v} v prostoru W :

Tvrzení 7.31. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W je podprostor V , $\mathbf{v} \in V$. Vektor $\mathbf{v} - \mathbf{v}_W$ ($=\mathbf{v}_{W^\perp}$) má nejmenší možnou normu ze všech vektorů $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in W$.*



Důkaz. Uvažujme libovolný vektor $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}_W$. Napíšeme si vektor $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ ve tvaru

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_W) + (\mathbf{v}_W - \mathbf{w}) = \mathbf{v}_{W^\perp} + (\mathbf{v}_W - \mathbf{w}) .$$

Vektor \mathbf{v}_{W^\perp} je kolmý na $\mathbf{v}_W - \mathbf{w}$ protože je kolmý na oba dva vektory \mathbf{v}_W a \mathbf{w} . Podle Pythagorovy věty 7.18 je

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}_{W^\perp}\|^2 + \|\mathbf{v}_W - \mathbf{w}\|^2 > \|\mathbf{v}_{W^\perp}\|^2 .$$

□

Předpoklad konečné generovanosti V v bodech (2), (3) věty 7.29 a v předchozím tvrzení lze nahradit slabším předpokladem, že W je konečně generovaný. To získáme jako důsledek Gram-Schmidtovy ortogonalizace, viz cvičení.

7.3.3. Prostory určené maticí a kolmost. Metody a aplikace hledání nejlepší aproximace budeme studovat v další části. Teď se ještě krátce podíváme na vztahy prostorů určených maticí z hlediska kolmosti a geometricky interpretujeme izomorfismus $\text{Im } A^T$ a $\text{Im } A$.

Uvažujme standardní skalární součin nad reálnými čísly a reálnou matici A typu $m \times n$.

Všimli jsme si, že pro standardní skalární součin nad \mathbb{R} máme $(\text{Im } A^T)^\perp = \text{Ker } A$. Podle bodů (3) a (2) z věty 7.29 také platí

$$(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im } A^T , \quad \text{Ker } A \oplus \text{Im } A^T = \mathbf{T}^n ,$$

kde n je počet sloupců matice A .

Jádrem lineárního zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je $\text{Ker } f_A = \text{Ker } A$. Jeho zúžení na libovolný doplněk $\text{Ker } A$, tj. libovolný podprostor $U \leq \mathbb{R}^n$ takový, že $\text{Ker } A \oplus U = \mathbb{R}^n$ je izomorfismus $U \rightarrow \text{Im } A$, viz cvičení. Pro ortogonální doplněk $\text{Ker } A$, což je $\text{Im } A^T$, máme izomorfismus $\text{Im } A^T \rightarrow \text{Im } A$. Z toho například vidíme, že prostory $\text{Im } A^T$ a $\text{Im } A$ mají stejnou dimenzi, takže získáváme v reálném případě další důkaz, že dimenze sloupcového a řádkového prostoru matice se shodují (věta 5.78).

Příklad 7.32. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

máme

$$\text{Ker } f_A = \text{Ker } A = \langle (-1, 5, 3)^T \rangle , \quad \text{Im } A^T = \langle (1, 2, -3)^T, (1, -1, 2)^T \rangle .$$

Skutečně $\text{Ker } A \perp \text{Im } A^T$ a $\text{Ker } A \oplus \text{Im } A^T = \mathbb{R}^3$.

Zúžení f na $\text{Im } A^T$ je izomorfismem rovin $\text{Im } A^T$ a $\text{Im } A = \langle (1, 1, 2)^T, (2, -1, 1)^T \rangle$.

OBRAZEK

Obdobně pro prostory $\text{Im } A$ a $\text{Ker } A^T$ máme vztahy.

$$(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker } A^T, \quad (\text{Ker } A^T)^\perp = \text{Im } A, \quad \text{Ker } A^T \oplus \text{Im } A = \mathbf{T}^m, \quad ,$$

kde m je počet řádků matice A .

Nad komplexními čísly vychází stejné vztahy, jen je potřeba transponování nahradit komplexním sdružováním.

7.4. Ortogonální projekce. V této části se naučíme hledat ortogonální projekci vektorů na podprostor. Ortogonální projekce je nejlepší aproximace vektoru v podprostoru, což také využijeme na hledání nejlepších přibližných řešení soustav lineárních rovnic.

7.4.1. Ortogonální projekce na přímku. Jednoduchým případem ortogonální projekce je projekce na přímku $W = \langle \mathbf{w} \rangle$, $\mathbf{w} \neq \{\mathbf{o}\}$. Projekce vektoru \mathbf{v} je vektor $\mathbf{v}_W = a\mathbf{w}$, pro který je vektor $\mathbf{v}_{W^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_W$ kolmý na \mathbf{w} . Z toho dostáváme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} - a\mathbf{w} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle - a \langle \mathbf{w} | \mathbf{w} \rangle &= 0 \\ a &= \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2}, \end{aligned}$$

takže ortogonální projekce vektoru \mathbf{v} na W je

$$\mathbf{v}_W = \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w}.$$

V případě, že je vektor \mathbf{w} jednotkový, se vzorec zjednoduší na

$$\mathbf{v}_W = \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}.$$

OBRAZEK

Vzorec také můžeme v \mathbb{R}^3 nahlédnout z geometrické interpretace skalárního součinu jako součinu norem vynásobeného kosinem úhlu jimi sevřeného. Norma projekce je kosinus úhlu mezi \mathbf{v} a \mathbf{w} krát norma \mathbf{v} , tj.

$$\frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} \|\mathbf{v}\| = \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|}$$

a projekce je rovna této normě vynásobené znormovaným vektorem \mathbf{w} , tj.

$$\frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|} \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w}.$$

OBRAZEK

Rovněž si všimněme souvislosti s vyjádřením vektoru \mathbf{v} vzhledem k ortonormální bázi $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ z tvrzení 7.19:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_2 + \dots + \langle \mathbf{w}_n | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_n.$$

Sčítanec $\langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_i$ je ortogonální projekcí vektoru \mathbf{v} na přímku $\langle \mathbf{w}_i \rangle$.

Příklad 7.33. V \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem je projekce vektoru $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)^T$ na přímku $W = \langle \mathbf{w} \rangle$, kde $\mathbf{w} = (1, 2, 3)^T$, vektor

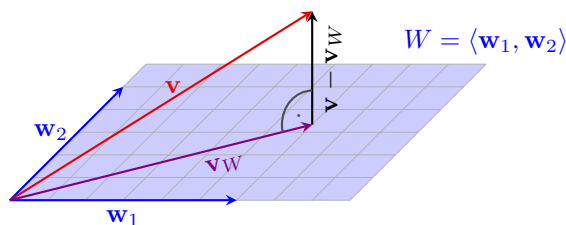
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_W &= \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w} = \frac{(1, 2, 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} (x_1 + 2x_2 + 3x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.4.2. *Ortogonalní projekce na obecný podprostor.* Nyní odvodíme vzorec pro ortogonální projekci vektoru \mathbf{v} na obecný podprostor $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$ konečně generovaného prostoru V se skalárním součinem $\langle | \rangle$. (Předpoklad, že V je konečně generovaný můžeme vynechat.)

Vektor \mathbf{v}_W leží v prostoru W , takže je lineární kombinací generátorů:

$$\mathbf{v}_W = a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + \dots + a_k \mathbf{w}_k .$$

K tomu, aby \mathbf{v}_W byl ortogonální projekcí \mathbf{v} , je nutné a stačí, aby vektor $\mathbf{v}_W^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_W$ byl kolmý na W .



To nastane právě tehdy (viz pozorování 7.24), když $\mathbf{v} - \mathbf{v}_W$ je kolmý na každý z vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$. Dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} - \mathbf{v}_W \rangle = \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} - a_1 \mathbf{w}_1 - a_2 \mathbf{w}_2 - \dots - a_k \mathbf{w}_k \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle - a_1 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_1 \rangle - a_2 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_2 \rangle - \dots - a_k \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_k \rangle . \end{aligned}$$

Úpravou dostaneme pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ rovnici

$$a_1 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_1 \rangle + a_2 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_2 \rangle + \dots + a_k \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_k \rangle = \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle .$$

Vektor koeficientů $(a_1, a_2, \dots, a_k)^T \in T^n$ je tedy řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{v} \rangle \end{pmatrix} .$$

Dokázali jsme:

Tvrzení 7.34. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v} \in V$, $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$. Ortogonální projekce vektoru \mathbf{v} na podprostor W je rovná vektoru*

$$\mathbf{v}_W = a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + \dots + a_k \mathbf{w}_k ,$$

kde $(a_1, a_2, \dots, a_k)^T$ je (libovolné) řešení soustavy rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{w}_k \rangle & \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{v} \rangle \end{array} \right).$$

Maticе soustavy z tvrzení se nazývá *Gramova matice* vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$. Je-li $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ lineárně nezávislá, pak $(a_1, a_2, \dots, a_k)^T$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v}_W \in W$ vzhledem k bázi B . Ty jsou určeny jednoznačně, takže Gramova matice je regulární (detailně si promyslete jako cvičení). Naopak, jsou-li vektory \mathbf{w}_i lineárně závislé, pak je Gramova matice singulární.

Determinant Gramovy matice vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je roven druhé mocnině k -rozměrnému objemu rovnoběžnostěny o stranách $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$. Důkaz pro $k = n$ necháme jako cvičení, obecně jej dělat nebudeme.

Příklad 7.35. V prostoru reálných polynomů stupně nejvýše dva se skalárním součinem $\langle f | g \rangle = \int_0^1 fg$ najdeme nejlepší aproximaci polynomu x^2 pomocí lineárního polynomu $a + bx$ a chybu této aproximace.

Chceme tedy nalézt ortogonální projekci $\mathbf{v}_W = a + bx$ a kolmici vektoru $\mathbf{v} = x^2$ na prostor $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle 1, x \rangle$. Koeficienty a, b jsou podle tvrzení řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{w}_2 \rangle & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \int_0^1 1 & \int_0^1 x & \int_0^1 x^2 \\ \int_0^1 x & \int_0^1 x^2 & \int_0^1 x^3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{array} \right).$$

Řešením soustavy dostaneme vektor $(a, b)^T = (-\frac{1}{6}, 1)^T$. Nejlepší aproximací vektoru $\mathbf{v} = x^2$ je tedy

$$\mathbf{v}_W = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 = -\frac{1}{6} + x,$$

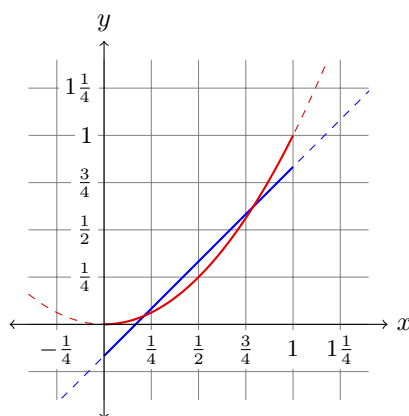
chybový vektor je

$$\mathbf{v}_{W^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_W = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

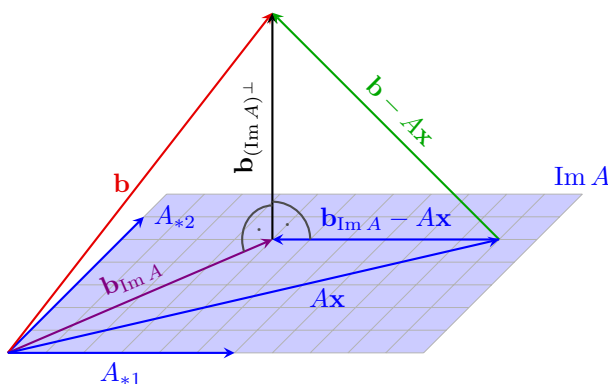
a velikost chyby je

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_{W^\perp}\| &= \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\int_0^1 x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{30}} \end{aligned}$$

7.4.3. Řešení neřešitelné soustavy lineárních rovnic. Mějme soustavu rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, která nemá řešení. Řekněme, že $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ je matice typu $m \times n$ nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} , typicky $m \gg n$. Taková soustava může například vzniknout sestavením rovnic z velkého množství měření, která jsou zatížena chybami. Chceme nalézt „co nejlepší“ přibližné řešení \mathbf{x} v tom smyslu, aby skutečná pravá strana $A\mathbf{x}$ byla co nejbližší ideální pravé straně \mathbf{b} , tj. aby norma $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ byla co nejmenší možná. V praktických aplikacích nás bude nejspíše zajímat eukleidovská norma na \mathbb{C}^m (nebo \mathbb{R}^m), proto také říkáme, že soustavu řešíme *metodou nejmenších čtverců*. Zapišeme-li $A\mathbf{x}$ jako lineární kombinaci sloupců, můžeme se na tento problém podívat tak, že hledáme $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, aby $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$ byl co nejbližší vektoru



b. Podle tvrzení 7.31 (kde $V = T^m$, $W = \text{Im } A$, $\mathbf{v} = \mathbf{b}$) je $A\mathbf{x}$ ortogonální projekce vektoru \mathbf{b} na $\text{Im } A$, kolmice vektoru \mathbf{b} na $\text{Im } A$ je chybový vektor $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$.



Přeformulujeme si tvrzení 7.34 na tento důležitý speciální případ. Matice soustavy z tohoto tvrzení, tj. Gramova matice vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, má na místě (i, j) číslo $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_i^* \mathbf{a}_j$. Je tedy rovná matici A^*A . Pravou stranu soustavy z tvrzení můžeme maticově zapsat $A^*\mathbf{b}$. Dostáváme:

Tvrzení 7.36. *Nechť A je matice typu $m \times n$ nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} , $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ (resp. \mathbb{C}^m). Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců je rovna množině všech (přesných) řešení soustavy*

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$$

Soustavě $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ říkáme *soustava normálních rovnic* příslušná soustavě $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pokud A má lineárně nezávislé sloupce, pak je vektor \mathbf{x} určen jednoznačně, takže A^*A je regulární a dostáváme jednoznačně řešení původní soustavy metodou nejmenších čtverců.

Příklad 7.37. Řešení reálné soustavy $(A|\mathbf{b})$, kde

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \end{array} \right),$$

metodou nejmenších čtverců je řešení soustavy

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Eliminací dostaneme $(x_1, x_2)^T = (1, 2)^T$.

Pravá strana původní soustavy vyjde $A(1, 2)^T = (2, 3, -4)$, je to ortogonální projekce vektoru \mathbf{b} na prostor $\text{Im } A$. Chybový vektor je

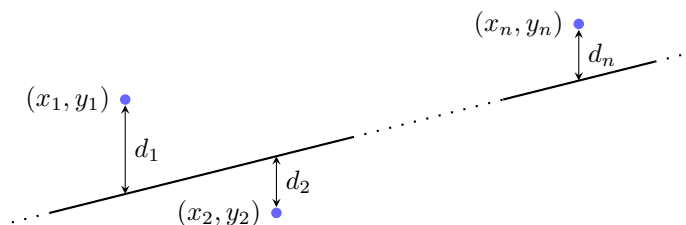
$$\mathbf{b}_{(\text{Im } A)^\perp} = (3, 5, -2)^T - (2, 3, -4)^T = (1, 2, 2)^T$$

a velikost chyby je

$$\|\mathbf{b}_{(\text{Im } A)^\perp}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 .$$

Jednou ze situací, která vede na přibližné řešení soustavy rovnic, je *lineární regrese*, kdy chceme co nejlépe proložit přímkou $y = ax + b$ danými naměřenými hodnotami $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. V tomto případě hledáme nejlepší „řešení“ soustavy

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & | & y_1 \\ x_2 & 1 & | & y_2 \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ x_n & 1 & | & y_n \end{pmatrix} .$$



OBRÁZEK 15. Lineární regrese – minimalizujeme $\sum d_i^2$.

Daty můžeme prokládat složitější útvary, jako paraboly, polynomy vyššího stupně, elipsy (např. při hledání dráhy planety), apod. Takové úlohy vedou na hledání řešení soustavy metodou nejmenších čtverců.

Příklad 7.38. Metodou nejmenších čtverců proložíme body $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 5)$ v \mathbb{R}^2 přímkou $y = ax + b$. Koeficienty a, b jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & | & 2 \\ 3 & 1 & | & 4 \\ 4 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

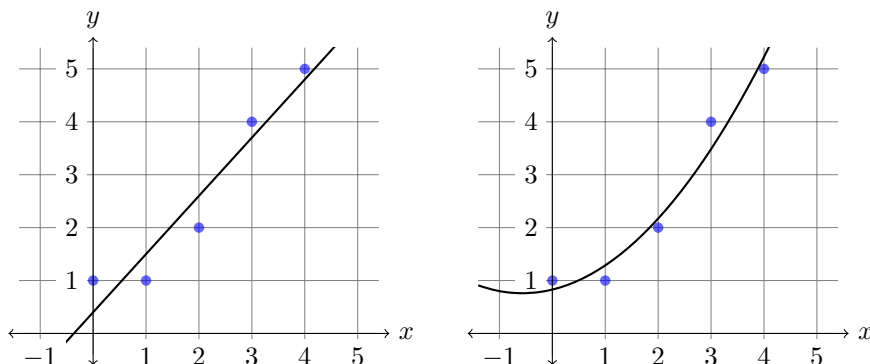
metodou nejmenších čtverců. Příslušná soustava normálních rovnic je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Řešením vyjde $(a, b)^T = (11/10, 2/5)^T$ takže hledaná přímka je

$$y = \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}.$$



Příklad 7.39. Stejnými body proložíme co nejlépe parabolu $y = ax^2 + bx + c$. Koeficienty jsou řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \\ 16 & 4 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

metodou nejmenších čtverců. Vyjde $(a, b, c)^T = 1/70(15, 17, 58)^T$,

$$y = \frac{3}{14}x^2 + \frac{17}{70}x + \frac{29}{35}$$

7.5. Gram-Schmidtova ortogonalizace, QR-rozklad.

Vzorec pro ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v} \in V$ na podprostor W se značně zjednoduší, je-li báze $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ prostoru W ortogonální. Gramova matice v tvrzení 7.34 je totiž v tomto případě diagonální. Protože odvození tvaru ortogonální projekce je krátké, zopakujeme jej v tomto speciálním případě. Hledáme vektor $\mathbf{v}_W = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \dots + a_k\mathbf{w}_k$ tak, aby vektor $\mathbf{v} - \mathbf{v}_W$ byl kolmý na každý z

vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$. Dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} - \mathbf{v}_W \rangle = \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} - a_1 \mathbf{w}_1 - a_2 \mathbf{w}_2 - \dots - a_k \mathbf{w}_k \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle - a_1 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_1 \rangle - a_2 \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_2 \rangle - \dots - a_k \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_k \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle - a_i \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_i \rangle \\ a_i &= \frac{\langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_i\|^2} . \end{aligned}$$

Tvrzení 7.40. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$, $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ ortogonální množina nenulových vektorů, $\mathbf{v} \in V$, $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$. Ortogonální projekce vektoru \mathbf{v} na podprostor W je rovná vektoru*

$$\mathbf{v}_W = \frac{\langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 + \frac{\langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{w}_k | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_k\|^2} \mathbf{w}_k .$$

Jinými slovy, souřadnice \mathbf{v}_W vzhledem k bázi $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ prostoru W jsou

$$[\mathbf{v}_W]_B = \left(\frac{\langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2}, \frac{\langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2}, \dots, \frac{\langle \mathbf{w}_k | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{w}_k\|^2} \right) .$$

V případě, že B je dokonce ortonormální, vzorec se dále zjednodušuje na

$$\mathbf{v}_W = \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_2 + \dots + \langle \mathbf{w}_k | \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}_k .$$

Výraz na pravé straně je shodný (až na přeznačení) s výrazem z tvrzení 7.19 o souřadnicích vzhledem k ortonormální bázi. Skutečně, tvrzení 7.40 je jeho zobecněním. Pokud $\mathbf{v} \in W$, pak $\mathbf{v} = \mathbf{v}_W$ a vzorec dává vyjádření \mathbf{v} vzhledem k ortonormální bázi $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ prostoru W . V případě, že \mathbf{v} ve W neleží, *stejný vzorec* nám dává souřadnice jeho ortogonální projekce.

Příklad 7.41. V \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem je $((1, 1, 2)^T, (2, 0, -1)^T)$ ortogonální množina. Ortogonální projekce vektoru $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$ na rovinu $W = \langle (1, 1, 2)^T, (2, 0, -1)^T \rangle$ je tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_W &= \frac{(1, 1, 2)(1, 2, 3)^T}{(1, 1, 2)(1, 1, 2)^T} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{(2, 0, -1)(1, 2, 3)^T}{(2, 0, -1)(2, 0, -1)^T} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{9}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 32 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Skutečně, chybový vektor $\mathbf{v}_{W^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_W = \frac{1}{10}(-1, 5, -2)^T$ je kolmý na oba dva vektory $(1, 1, 2)^T, (2, 0, -1)^T$.

7.5.1. *Gram-Schmidtova ortogonalizace.* Již několikrát jsme si všimli, že je výhodné mít v prostoru ortogonální nebo ortonormální bázi. Vzhledem k ortonormální bázi se snadno počítají souřadnice (tvrzení 7.19), skalární součin přechází na standardní (tvrzení 7.21), dobře se počítají ortogonální doplňky (pozorování 7.28) a máme-li v podprostoru ortogonální bázi, můžeme na tento podprostor jednoduše počítat ortogonální projekce (tvrzení 7.40).

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces „vyrobí“ z jakékoliv báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ortogonální bázi $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ a to tak, že se pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ zachovávají lineární obaly prvních i vektorů, tj. $\langle \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{w}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$, atd.

První vektor zvolíme $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$. Vektor \mathbf{w}_2 bude kolmice \mathbf{v}_2 na přímkou $\langle \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$, vektor \mathbf{w}_3 bude kolmice na rovinu $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, atd. Obecně, \mathbf{w}_i určíme jako kolmici na lineární obal předchozích vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$.

OBRAZEK

V průběhu procesu se zachovává vlastnost $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_i \rangle$, protože nový vektor \mathbf{w}_i se volí

$$\mathbf{w}_i = (\mathbf{v}_i)_{W^\perp} = \mathbf{v}_i - (\mathbf{v}_i)_W$$

kde $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{i-1} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle$. Speciálně, $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ generuje V , takže je to báze ($\dim(V)$ -prvková posloupnost generátorů je vždy bází, viz bod (2) v pozorování 5.58). Tato báze je ortogonální, protože \mathbf{w}_i se volí tak, aby byl kolmý k vektorům $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$.

Protože $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$ je ortogonální báze lineárního obalu těchto vektorů, máme pro vektor \mathbf{w}_i explicitní vzorec z tvrzení 7.40:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i - (\mathbf{v}_i)_W = \mathbf{v}_i - \left(\frac{\langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 + \frac{\langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{w}_{i-1} | \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{w}_{i-1}\|^2} \mathbf{w}_{i-1} \right).$$

Pokud chceme najít ortonormální bázi, můžeme buď vektory znormovat na konci, nebo je normujeme průběžně, čímž nám také ve vzorci odpadají jmenovatelé.

Příklad 7.42. V podprostoru

$$W = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1, 2, 0, 1)^T, (1, -1, 1, 0)^T, (0, 1, 1, 3)^T\}$$

prostoru \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem najdeme ortonormální bázi $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$. Použijeme Gram-Schmidtovou ortogonalizaci aplikovanou na vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Budeme průběžně normovat, vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ před znormováním označíme $\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \mathbf{w}'_3$. Uvědomme si, že nemusíme ověřovat lineární nezávislost vektorů \mathbf{v}_i (tj. že tvoří bázi W), pokud je totiž vektor \mathbf{v}_i lineární kombinací předchozích, pak \mathbf{w}_i , jakožto kolmice \mathbf{v}_i na lineární obal $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle$, je nulový vektor.

$$\mathbf{w}'_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{w}'_1}{\|\mathbf{w}'_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, 1)(1, -1, 1, 0)^T \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{w}_2 &= \frac{\mathbf{w}'_2}{\|\mathbf{w}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{102}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}'_3 &= \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{w}_1 - \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{w}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, 1)(0, 1, 1, 3)^T \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{102}}(7, -4, 6, 1)(0, 1, 1, 3)^T \frac{1}{\sqrt{102}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{102} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{102} \begin{pmatrix} -120 \\ -48 \\ 72 \\ 216 \end{pmatrix} = \frac{4}{51} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} \\
\mathbf{w}_3 &= \frac{\mathbf{w}'_3}{\|\mathbf{w}'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{1039}} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Získali jsme ortonormální bázi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{102}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1039}} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} \right)$$

Z Gram-Schmidtovy ortogonalizace vidíme, že každý konečně generovaný prostor má ortonormální bázi, protože stačí zortogonalizovat a znormovat libovolnou bázi. Obecněji, každou ortogonální posloupnost můžeme rozšířit do ortogonální báze.

Věta 7.43. *Nechť V je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$. Každá ortogonální (resp. ortonormální) posloupnost nenulových vektorů z V jde doplnit do ortogonální (resp. ortonormální) báze.*

Speciálně, každý konečně generovaný prostor se skalárním součinem má ortonormální bázi.

Důkaz. Necht $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ je ortogonální posloupnost nenulových vektorů. Tato posloupnost je lineárně nezávislá (viz tvrzení 7.14), proto jde doplnit vektory $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ na bázi V (viz důsledek 5.55). „Dokončením“ Gram-Schmidtovy ortogonalizace získáme vektory $\mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ takové, že $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ je ortogonální bázi. Je-li C navíc ortonormální, můžeme vektory \mathbf{w}_{k+1}, \dots znormovat a získáme ortonormální bázi.

Poznámka: Mohlo by se zdát, že jsme existenci ortonormální báze dokázali kruhem. Ve větě 7.29 o ortogonálním doplňku jsme existenci předpokládali a z této věty plyne existence ortogonální projekce a kolmice vektorů. Ke Gram-Schmidtově ortogonalizaci tuto větu ale nepotřebujeme, prostě definujeme vektory \mathbf{w}_i odvozeným vzorcem a získáme ortogonální bázi. \square

Gram-Schmidtova ortogonalizace je numericky nestabilní. Na ortogonalizaci se v některých praktických úlohách proto používají jiné, numericky stabilní algoritmy, například algoritmus využívající Householderovy transformace, nebo algoritmus využívající Givensovy rotace.

7.5.2. QR-rozklad. Ze vzorce pro Gram-Schmidtovu ortogonalizaci je vidět, že původní vektory \mathbf{v}_i lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_i$ (ty jsou navzájem kolmé a můžeme je volit jednotkové). Použijeme-li tento fakt na aritmetické vektory a standardní skalární součin, získáme vyjádření matice $(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n)$ jako součin matice $(\mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 | \dots | \mathbf{w}_n)$ a horní trojúhelníkové matice. Tomuto vyjádření říkáme QR-rozklad.

Tvrzení 7.44 (o QR-rozkladu). *Necht A je reálná nebo komplexní matice typu $m \times n$ s lineárně nezávislými sloupci. Pak existuje matice Q typu $m \times n$ nad stejným tělesem s ortonormálními sloupci (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) a horní trojúhelníková matice R řádu n s kladnými reálnými prvky na hlavní diagonále taková, že platí $A = QR$.*

Důkaz. Označíme $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sloupcové vektory matice A . S těmito vektory provedeme Gram-Schmidtovu ortogonalizaci s průběžným normováním, tj.

$$\mathbf{w}'_i = \mathbf{v}_i - \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_1 - \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_2 - \dots - \langle \mathbf{w}_{i-1} | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_{i-1}, \quad \mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{w}'_i}{\|\mathbf{w}'_i\|}.$$

Z toho získáme vyjádření

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{w}'_i + \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_2 + \dots + \langle \mathbf{w}_{i-1} | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_{i-1} \\ &= \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_2 + \dots + \langle \mathbf{w}_{i-1} | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{w}_{i-1} + \|\mathbf{w}'_i\| \mathbf{w}_i \end{aligned}$$

Tyto vztahy můžeme maticově zapsat

$$(\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n) = (\mathbf{w}_1 | \dots | \mathbf{w}_n) \begin{pmatrix} \|\mathbf{w}'_1\| & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_n \rangle \\ 0 & \|\mathbf{w}'_2\| & \dots & \langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|\mathbf{w}'_n\| \end{pmatrix}$$

\square

Příklad 7.45. Vypočítáme QR-rozklad reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Je potřeba provést Gram-Schmidtovu ortogonalizaci s průběžným normováním pro vektory $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, -1, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, 3)^T$. To jsme provedli v příkladu 7.42. Nalezli jsme vektory

$$(\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \mathbf{w}'_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{4}{51} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} \right)$$

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{102}} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1039}} \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} \right)$$

a z průběhu ortogonalizace získáme vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{w}'_1 \\ \mathbf{w}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{w}_1, & \mathbf{w}_2 &= \frac{6}{\sqrt{102}} \mathbf{w}'_2 \\ \mathbf{w}'_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{5}{\sqrt{6}} \mathbf{w}_1 - \frac{5}{\sqrt{102}} \mathbf{w}_2, & \mathbf{w}_3 &= \frac{51}{4\sqrt{1039}} \mathbf{w}'_3 \end{aligned}$$

Z těchto vztahů vyjádříme vektory \mathbf{v}_i

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \sqrt{6} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{w}_1 + \frac{\sqrt{102}}{6} \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{5}{\sqrt{6}} \mathbf{w}_1 + \frac{5}{\sqrt{102}} \mathbf{w}_2 + \frac{4\sqrt{1039}}{51} \mathbf{w}_3 \end{aligned}$$

a zapíšeme maticově

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{7}{\sqrt{102}} & -\frac{15}{\sqrt{1039}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{102}}{6} & -\frac{\sqrt{1039}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{102}}{6} & \frac{9}{\sqrt{1039}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{102}} & \frac{27}{\sqrt{1039}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{\sqrt{102}}{6} & \frac{5}{\sqrt{102}} \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{1039}}{51} \end{pmatrix}$$

QR-rozklad jde použít na hledání řešení soustavy metodou nejmenších čtverců. Všimněte si, že pro matici Q v rozkladu $A = QR$ platí $Q^*Q = I_n$ (díky ortonormalitě sloupců), takže příslušnou normální soustavu rovnic můžeme zapsat

$$\begin{aligned} A^*Ax &= A^*b \\ (QR)^*QRx &= (QR)^*b \\ R^*Q^*QRx &= R^*Q^*b \\ R^*Rx &= R^*Q^*b \\ Rx &= Q^*b . \end{aligned}$$

Poslední soustava má horní trojúhelníkovou matici, takže řešení můžeme spočítat zpětnou substitucí. Postup v této podobě můžeme samozřejmě použít jen pro matice A s lineárně nezávislými sloupci.

7.6. Unitární a ortogonální matice.

Posledním pojmem kterým se budeme stručně zabývat je unitární matice. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze standardní skalární součin v \mathbb{R}^n nebo \mathbb{C}^n . Čtvercová matice U řádu n určuje zobrazení $f_U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $f_U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$). Pokud toto zobrazení zachovává skalární součin (tj. také všechny metrické vlastnosti jako délky a úhly), nazýváme matici U *unitární*, v reálném případě též *ortogonální*. Tuto vlastnost lze vyjádřit mnoha ekvivalentními způsoby, například:

Tvrzení 7.46. *Nechť U je reálná (resp. komplexní) čtvercová matice řádu n . Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) f_U zachovává standardní skalární součin, tj. pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (resp. \mathbb{C}^n) platí $U\mathbf{u} \cdot U\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
- (2) f_U zachovává eukleidovskou normu, tj. pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (resp. \mathbb{C}^n) platí $\|U\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$.
- (3) f_U zobrazuje ortonormální bázi na ortonormální bázi.
- (4) $U^{-1} = U^*$, tj. $UU^* = U^*U = I_n$.
- (5) Řádky matice U tvoří ortonormální bázi.
- (6) Sloupce matice U tvoří ortonormální bázi.

Důkaz. Skutečnost, že řádky matice U jsou ortonormální (tedy tvoří ortonormální bázi) můžeme maticově zapsat $UU^* = I_n$. Podobně, sloupce jsou ortonormální právě tehdy, když $U^*U = I_n$. Triviálně tedy platí (4) \Rightarrow (5),(6). Naopak, pokud $UU^* = I_n$ nebo $U^*U = I_n$, pak U je regulární podle charakterizace regulárních matic ve větě 4.30 a platí $U^{-1} = U^*$. Body (4),(5),(6) jsou proto ekvivalentní.

(4) \Rightarrow (1). Pokud $UU^* = U^*U = I_n$, pak f_U zachovává standardní skalární součin:

$$U\mathbf{u} \cdot U\mathbf{v} = (U\mathbf{u})^*U\mathbf{v} = \mathbf{u}^*U^*U\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} .$$

(1) \Rightarrow (2). Pokud f_U zachovává standardní skalární součin, pak také zachovává eukleidovskou normu, protože ta je určená skalárním součinem. Obšrněji: $\|U\mathbf{v}\| = \sqrt{U\mathbf{v} \cdot U\mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\|$. (1) \Rightarrow (3) je rovněž snadné.

(3) \Rightarrow (6). Kvůli (3) musí být $U\mathbf{e}_1, U\mathbf{e}_2, \dots, U\mathbf{e}_n$ ortonormální báze, což dává podmínku (6).

K dokončení důkazu stačí zdůvodnit (2) \Rightarrow (1), tedy, že zachovávání normy je postačující podmínkou pro zachovávání skalárního součinu. To plyne z polarizačních identit, které říkají, že skalární součin je určen normou. Obšrněji, protože U

zachovává normu, dostaneme z bodu (4) tvrzení 7.7

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(U\mathbf{u} \cdot U\mathbf{v}) &= \frac{1}{2}(\|U\mathbf{u} + U\mathbf{v}\|^2 - \|U\mathbf{u}\|^2 - \|U\mathbf{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|U(\mathbf{u} + \mathbf{v})\|^2 - \|U\mathbf{u}\|^2 - \|U\mathbf{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2) \\ &= \operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Rovnost imaginárních částí dostaneme podobně z polarizační identity ve cvičeních. \square

Definice 7.47. Reálnou (resp. komplexní) čtvercovou matici splňující ekvivalentní podmínky z předchozího tvrzení nazýváme *ortogonální* (resp. *unitární*).

Standardní pojmenování ortogonální matice je poněkud matoucí, smysluplnější by bylo ortonormální. Hezkou vlastností těchto matic je snadné určení inverzní matice – stačí vzít podle bodu (4) matici hermitovsky sdruženou. Příklady ortogonálních matic jsou matice rotací a zrcadlení podle podprostorů.

Součinem unitárních matic stejných řádů je opět unitární matice. Buď můžeme ověřit algebraicky nebo nahlédnout geometricky z toho, že složením dvou zobrazení zachovávajících skalární součin (nebo jen normu) je zobrazení, které skalární součin rovněž zachovává. Detaily si promyslete jako cvičení.

Cvičení

1. Jsou-li A, B matice nad tělesem \mathbb{C} typu $m \times n$, C je matice typu $n \times p$ nad \mathbb{C} a $a \in \mathbb{C}$, pak

- (1) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- (2) $(aA)^* = \bar{a}A^*$,
- (3) $(A^*)^* = A$.
- (4) $(BC)^* = C^*B^*$.

Dokažte.

2. Nechť A je čtvercová matice nad \mathbb{C} . Dokažte, že $\det(A^*) = (\det(A))^*$.

3. Nechť A je regulární matice nad \mathbb{C} . Dokažte, že $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

4. Nechť A je čtvercová matice řádu n nad \mathbb{C} . Dokažte, že zobrazení $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované vztahem $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* A \mathbf{v}$ splňuje podmínky (SL1) a (SL2).

5. Nechť A je čtvercová matice řádu n nad \mathbb{C} . Dokažte, že zobrazení $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované vztahem $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* A \mathbf{v}$ splňuje podmínku (SCS) právě tehdy, když A je hermitovská (tj. $A^* = A$).

6. Nechť B je regulární matice řádu n nad \mathbb{C} a $A = B^* B$. Dokažte, že zobrazení $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované vztahem $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* A \mathbf{v}$ je skalární součin.

7. Dokažte, že v libovolném vektorovém prostoru se skalárním součinem $\langle | \rangle$ platí

- $\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$
- $\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$
- $\operatorname{Im}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2)$
- $\operatorname{Im}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2)$
- $\operatorname{Im}(\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u} - i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2)$

$\operatorname{Im}(x)$ značí imaginární část čísla $x \in \mathbb{C}$.

8. Nad reálnými čísly lze Cauchy-Schwarzovu nerovnost dokázat také následujícím způsobem: Výraz $\|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2$ definuje kvadratickou funkci. Protože musí být nezáporná, její diskriminant je nekladný a to dává C-S nerovnost. Doplňte detaily.

9. Kdy nastává v trojúhelníkové nerovnosti rovnost?
10. Dokažte, že norma pochází ze skalárního součinu právě tehdy, když splňuje rovnoběžníkové pravidlo.
11. Dokažte, že platí-li $M \perp N$, pak $M \cap N \subseteq \{\mathbf{o}\}$.
12. Dokažte pozorování 7.26.
13. Dokažte, že prostorech nad \mathbb{R} se skalárním součinem platí opačná implikace v Pythagorově větě, tj. pokud $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, pak $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Platí opačná implikace v prostorech nad \mathbb{C} ?
14. Nechtě $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení a $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ je doplněk $\text{Ker } f$, tj. $\text{Ker } f \oplus \mathbf{U} = \mathbf{V}$. Dokažte, že zúžení f na \mathbf{U} je izomorfismus z \mathbf{U} na obraz f .
15. Dokažte, že Gramova matice vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ je regulární právě tehdy, když je $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost.
16. Dokažte, že determinant Gramovy matice vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^n$ je rovný druhé mocnině determinantu matice

$$(\mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 | \dots | \mathbf{w}_n) .$$

Interpretujte geometricky.

17. Pomocí Gram-Schmidtovi ortogonalizace dokažte body (2) a (3) věty 7.29 za předpokladu, že W je konečně generovaný (prostor V konečně generovaný být nemusí).
18. Využijte QR -rozklad na důkaz následující nerovnosti pro komplexní matici $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ typu $m \times n$ a standardní skalární součin:

$$\det(A^*A) \leq \|\mathbf{a}_1\|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 \dots \|\mathbf{a}_n\|^2$$

Připomeňme si geometrický význam determinantu $\det(A^*A)$ a interpretujte nerovnost geometricky.

19. Dokažte, že součinem unitárních matic stejných řádů je unitární matice.

8. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Cíl.

8.1. Definice a příklady.

Připomeňme, že matice A nad tělesem \mathbf{T} typu $m \times n$ určuje zobrazení $f_A : T^n \rightarrow T^m$ předpisem $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Tento pohled motivoval řadu zavedených pojmů:

- **Násobení matice:** Je-li B matice nad \mathbf{T} typu $p \times m$, pak složené zobrazení $f_B \circ f_A : T^n \rightarrow T^p$ je rovno zobrazení f_{BA} .
- **Inverzní matice:** Je-li $m = n$ a f_A je bijekce, pak inverzní zobrazení $(f_A)^{-1}$ je rovno $f_{A^{-1}}$.
- **Jádro matice:** $\text{Ker } A$ je rovno množině všech vektorů $\mathbf{x} \in T^n$, které f_A zobrazí na nulový vektor.

$$\text{Ker } A = \{x : f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\} \leq \mathbf{T}^n$$

- **Sloupcový prostor matice a hodnost:** $\text{Im } A$ je roven obrazu zobrazení f_A . Hodnost A je rovna dimenzi $\text{Im } A$.

$$\text{Im } A = \{f_A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{T}^n\} = f_A(T^n) \leq \mathbf{T}^m, \quad \text{rank}(A) = \dim(\text{Im } A)$$

- **Determinant:** Je-li $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ a $m = n = 2$ (resp. $m = n = 3$), pak $\det(A)$ udává změnu obsahu (resp. objemu) a orientace při zobrazení f_A .

Rovněž nám tento pohled poskytl geometrickou interpretaci řady tvrzení.

Ne každé zobrazení $T^n \rightarrow T^m$ je tvaru f_A pro nějakou matici A . Zobrazení tvaru f_A mají tu vlastnost, že „zachovávají“ sčítání a násobení. Takovým zobrazením říkáme *lineární* a za okamžik nahlédneme, že linearita tato zobrazení charakterizuje. Lineární zobrazení definujeme mezi obecnými vektorovými prostory (nejen aritmetickými).

Definice 8.1. Necht \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou vektorové prostory nad stejným tělesem \mathbf{T} . Zobrazení $f : V \rightarrow W$ nazýváme *lineární zobrazení* (nebo *homomorfismus*) z \mathbf{V} do \mathbf{W} , pokud

- (1) $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a
- (2) $f(t\mathbf{u}) = tf(\mathbf{u})$ pro libovolné $\mathbf{u} \in V$ a $t \in T$.

Skutečnost, že f je lineární zobrazení z \mathbf{V} do \mathbf{W} zapisujeme $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$.

Vlevo v rovnostech vystupují operace v prostoru \mathbf{V} a vpravo operace v prostoru \mathbf{W} . Zdůrazněme, že prostory \mathbf{V} a \mathbf{W} musí být nad stejným tělesem. Všimněte si rovněž, že každé lineární zobrazení zobrazuje nulový vektor ve \mathbf{V} na nulový vektor v \mathbf{W} .

Pro libovolnou matici A nad \mathbf{T} typu $m \times n$ je zobrazení $f_A : T^n \rightarrow T^m$ lineární, protože

$$f_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = f_A(\mathbf{u}) + f_A(\mathbf{v})$$

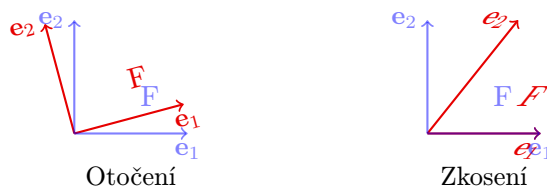
a

$$f_A(t\mathbf{u}) = A(t\mathbf{u}) = t(A\mathbf{u}) = tf_A(\mathbf{u}) .$$

To nám dává řadu příkladů lineárních zobrazení mezi aritmetickými vektorovými prostory (a jak jsme zmínili, jiná lineární zobrazení mezi aritmetickými prostory neexistují, viz níže).

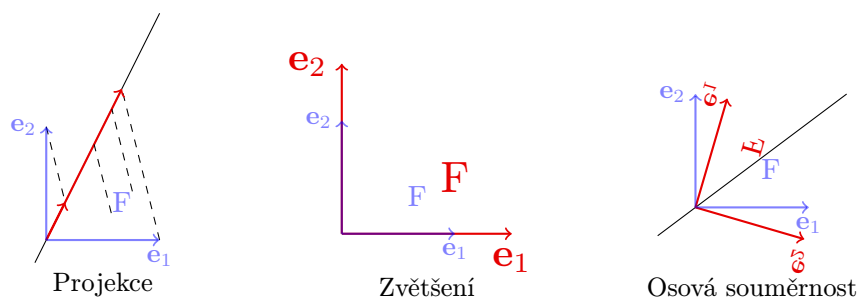
Příklad 8.2. Příklady lineárních zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 :

- Otočení (rotace) o daný úhel.
- Zkosení



OBRÁZEK 16. Zobrazení v rovině: otočení a zkosení

- Projekce na přímku procházející počátkem.
- Osová souměrnost podle přímky procházející počátkem.
- Zvětšení (zmenšení)



OBRÁZEK 17. Zobrazení v rovině: projekce, zvětšení a osová souměrnost

Lineární zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^3 jsou například rotace, zrcadlení podle roviny procházející počátkem, osová souměrnost podle přímky procházející počátkem, projekce na rovinu nebo přímku procházející počátkem.

Příkladem lineárního zobrazení z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^3 je zobrazení f_A pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

OBRÁZEK

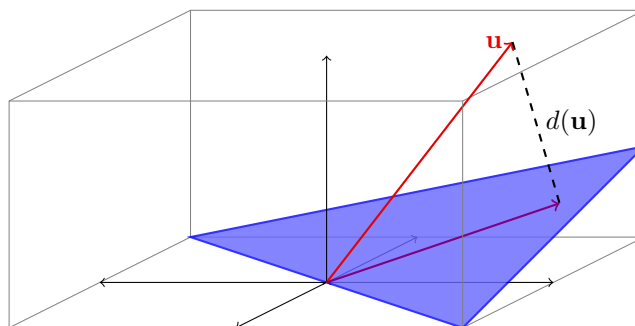
Lineární zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^2 používáme při kreslení trojrozměrných útvarů na tabuli (papír):

OBRÁZEK

Příkladem lineárního zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R} je zobrazení d udávající orientovanou vzdálenost od zvolené roviny procházející počátkem.

Ještě než popíšeme, jak vypadají lineární zobrazení obecně, podíváme se na další příklady.

Příklad 8.3.



OBRÁZEK 18. Lineární zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R} : orientovaná vzdálenost od plochy

- Identické zobrazení id_V na libovolném vektorovém prostoru V je lineární zobrazení $V \rightarrow V$.
- Tzv. *nulové zobrazení* 0 z V do W přiřazující všem vektorům ve V nulový vektor ve W je lineární.
- Nechť $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze vektorového prostoru V . Zobrazení f z V do T^n definované $f(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_B$ je lineární zobrazení $V \rightarrow T^n$ podle tvrzení 5.65 o souřadnicích a operacích.
- Zobrazení přiřazující matici nad T typu $n \times n$ součet prvků na diagonále (tzn. stopu) je lineárním zobrazením $T^{n \times n} \rightarrow T$.
- Determinant můžeme chápat jako zobrazení přiřazující n -tici vektorů z T^n prvek T , tedy jako zobrazení

$$\text{Det} : \underbrace{T^n \times T^n \times \dots \times T^n}_{n \times} \rightarrow T .$$

Toto zobrazení je tzv. *multilineární*, tj. zvolíme-li pevně $n-1$ z celkových n argumentů, vznikne lineární zobrazení $T^n \rightarrow T$. Například jsou-li $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \in T^3$ libovolné vektory, je zobrazení definované vztahem $f(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{v}_1 | \mathbf{x} | \mathbf{v}_3)$ lineárním zobrazením z T^3 do T . Linearita byla použita při odvozování vzorců na začátku kapitoly o determinantech a formulována jako body (1) a (2) v tvrzení 6.19.

- Skalární součin na reálném vektorovém prostoru V je lineární v obou proměnných, tj. pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ jsou zobrazení definovaná vztahy $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle$, $g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{v} \rangle$ lineární zobrazení $V \rightarrow \mathbb{R}$. Na komplexním prostoru je skalární součin lineární pouze v druhé proměnné.
- Derivace je lineárním zobrazením (např.) z prostoru reálných diferencovatelných funkcí do prostoru všech reálných funkcí.
- Zobrazení přiřazující funkci její určitý integrál od 1 do 10 je lineárním zobrazením z prostoru všech reálných spojitých funkcí na $[1, 10]$ do \mathbb{R} .

8.2. Matice lineárního zobrazení.

Z definice lineárního zobrazení se snadno indukcí dokáže, že obrazem lineární kombinace je lineární kombinace obrazů, tj. pro libovolné lineární zobrazení $f : V \rightarrow W$, vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ a skaláry $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ platí

$$f(t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 + \dots + t_k \mathbf{v}_n) = t_1 f(\mathbf{v}_1) + t_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + t_k f(\mathbf{v}_n).$$

Toto jednoduché pozorování má důležitý důsledek, že lineární zobrazení je jednoznačně určené obrazy prvků libovolné báze. Tvrzení formulujeme pro konečně generované prostory, zobecnění necháme do cvičení.

Tvrzení 8.4. *Nechť \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze \mathbf{V} a $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbf{W}$ jsou libovolné vektory. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ splňující $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že f je lineární zobrazení splňující $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$. Každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ lze zapsat jediným způsobem jako lineární kombinaci $\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \dots + t_n\mathbf{v}_n$ (jinými slovy, $[\mathbf{x}]_B = (t_1, t_2, \dots, t_n)$) a pak podle výše uvedeného vztahu platí

$$f(\mathbf{x}) = t_1\mathbf{w}_1 + t_2\mathbf{w}_2 + \dots + t_n\mathbf{w}_n$$

To dokazuje jednoznačnost.

Na druhou stranu je potřeba ověřit, že zobrazení f definované tímto předpisem je lineární a splňuje $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, a tím bude dokázána existence. Vztah $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ necháme k ověření čtenáři. K důkazu linearity uvažujme vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, jejichž vyjádření vzhledem k B jsou

$$[\mathbf{x}]_B = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T, \quad [\mathbf{y}]_B = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T .$$

Pak $[\mathbf{x} + \mathbf{y}]_B = (t_1 + s_1, t_2 + s_2, \dots, t_n + s_n)^T$ (viz tvrzení 5.65 o souřadnicích a operacích) a tedy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= (t_1 + s_1)\mathbf{w}_1 + (t_2 + s_2)\mathbf{w}_2 + \dots + (t_n + s_n)\mathbf{w}_n \\ &= t_1\mathbf{w}_1 + t_2\mathbf{w}_2 + \dots + t_n\mathbf{w}_n + s_1\mathbf{w}_1 + s_2\mathbf{w}_2 + \dots + s_n\mathbf{w}_n \\ &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) . \end{aligned}$$

Podobně se ukáže zachování násobení skalárem. □

Tvrzení nám dává geometrickou představu lineárních zobrazení: podíváme se na obrazy prvků nějaké báze, obrazy zbylých vektorů jsou určeny linearitou. Na obrázku je znázorněné lineární zobrazení z prostoru dimenze 2 s bází (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , obraz vektoru $-\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ a obraz komplikovanějšího útvaru.

OBRÁZEK

Algebraickým důsledkem je, že každé lineární zobrazení je „určené“ maticí. Než zformulujeme příslušné definice a tvrzení obecněji, ukážeme, že každé lineární zobrazení f z \mathbf{T}^n do \mathbf{T}^m je rovno f_A pro jistou (jednoznačně určenou) matici A nad \mathbf{T} typu $m \times n$. Skutečně, pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ platí

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1f(\mathbf{e}_1) + x_2f(\mathbf{e}_2) + \dots + x_nf(\mathbf{e}_n) ,$$

což lze maticově zapsat jako

$$f(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{e}_1)|f(\mathbf{e}_2)|\dots|f(\mathbf{e}_n))\mathbf{x} ,$$

takže stačí položit $A = (f(\mathbf{e}_1)|f(\mathbf{e}_2)|\dots|f(\mathbf{e}_n))$ a máme $f = f_A$. Matice A je určena jednoznačně, protože i -tý sloupec musí být f -obrazem i -tého vektoru kanonické báze.

Lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, kde \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou konečně generované, můžeme obdobně popsat maticově, počítáme-li v prostorech \mathbf{V} a \mathbf{W} vzhledem ke zvoleným bázím B a C . Konkrétně, existuje (jednoznačně určená) matice A typu $\dim(\mathbf{W}) \times \dim(\mathbf{V})$ taková, že

$$[f(\mathbf{x})]_C = A[\mathbf{x}]_B$$

pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$. Těto matici říkáme matice f vzhledem k B a C . Odvození, jak tato matice vypadá, se udělá podobně jako výše.

Definice 8.5. Necht \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou konečně generované vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze \mathbf{V} a C je báze \mathbf{W} . Maticí lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B a C rozumíme matici

$$[f]_C^B = ([f(\mathbf{v}_1)]_C | [f(\mathbf{v}_2)]_C | \dots | [f(\mathbf{v}_n)]_C)$$

V matici f vzhledem k B a C je tedy i -tý sloupec roven souřadnicím obrazu i -tého vektoru báze B v bázi C . Matice je typu $\dim(\mathbf{W}) \times \dim(\mathbf{V})$.

Tvrzení 8.6. Jsou-li \mathbf{V}, \mathbf{W} konečně generované vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , B báze \mathbf{V} , C báze \mathbf{W} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$ platí

$$[f(\mathbf{x})]_C = [f]_C^B [\mathbf{x}]_B .$$

Důkaz. Pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$ s vyjádřením $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ platí

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) = x_1f(\mathbf{v}_1) + x_2f(\mathbf{v}_2) + \dots + x_nf(\mathbf{v}_n) ,$$

pro vyjádření vzhledem k bázi C pak podle tvrzení 5.65 o souřadnicích a operacích platí

$$[f(\mathbf{x})]_C = x_1[f(\mathbf{v}_1)]_C + x_2[f(\mathbf{v}_2)]_C + \dots + x_n[f(\mathbf{v}_n)]_C ,$$

což se maticově přepíše

$$[f(\mathbf{x})]_C = ([f(\mathbf{v}_1)]_C | [f(\mathbf{v}_2)]_C | \dots | [f(\mathbf{v}_n)]_C) (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = [f]_C^B [\mathbf{x}]_B .$$

□

Matice $[f]_C^B$ tedy umožňuje počítat souřadnice $[f(\mathbf{x})]_C$ vektoru $f(\mathbf{x})$ vzhledem k bázi C prostoru \mathbf{W} , známe-li souřadnice $[\mathbf{x}]_B$ vektoru \mathbf{x} vzhledem k bázi B prostoru \mathbf{V} .

Matice $[f]_C^B$ je jediná matice splňující rovnost z tvrzení:

Tvrzení 8.7. Jsou-li \mathbf{V}, \mathbf{W} konečně generované vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , B báze \mathbf{V} , C báze \mathbf{W} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ a M matice nad tělesem \mathbf{T} splňující $[f(\mathbf{x})]_C = M[\mathbf{x}]_B$, pak $M = [f]_C^B$.

Důkaz. Předně si uvědomme, že M musí být typu $\dim(\mathbf{W}) \times \dim(\mathbf{V})$, aby mohl platit vztah $[f(\mathbf{x})]_C = M[\mathbf{x}]_B$. Dosadíme-li do tohoto vztahu i -tý vektor \mathbf{v}_i báze B , dostaneme $[f(\mathbf{v}_i)]_C = M[\mathbf{v}_i]_B = M\mathbf{e}_i$. Pravá strana je rovná i -tému sloupci matice M , tedy $M = ([f(\mathbf{v}_1)]_C | [f(\mathbf{v}_2)]_C | \dots | [f(\mathbf{v}_n)]_C) = [f]_C^B$. □

Matice lineárního zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^m$ vzhledem ke kanonickým bázím je původní matice A , tj.

$$[f_A]_{K_m}^{K_n} = A,$$

kde K_i značí kanonickou bázi \mathbf{T}^i .

Příklad 8.8. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ dané předpisem

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} .$$

Vztah lze maticově zapsat

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Z toho vidíme, že $f = f_A$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

takže f je lineární zobrazení a podle předchozí poznámky $[f]_{K_3}^{K_2} = A$.

Určíme matici f vzhledem k bázím B a C , kde

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \quad \text{a} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) .$$

K tomu dosazením spočítáme obrazy vektorů v bázi B :

$$f(1, 1, 2)^T = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2, 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2)^T = (2, 3)^T$$

$$f(2, 2, 0)^T = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0, 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0)^T = (0, 3)^T$$

$$f(3, 4, 4)^T = (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4, 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4)^T = (2, 0)^T$$

a obrazy vyjádříme v bázi C tím, že vyřešíme tři soustavy rovnic se stejnou maticí zároveň.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Zpětnou substitucí dostáváme $[(2, 3)^T]_C = (1, 2)^T$, $[(0, 3)^T]_C = (3, 4)^T$, $[(2, 0)^T]_C = (3, 3)^T$ (toto je dobré ověřit zkouškou, např. $(2, 3)^T = 1 \cdot (1, 2)^T + 2 \cdot (3, 3)^T$, takže souřadnice vektoru $(2, 3)^T$ vzhledem k C jsou spočteny správně). Matice f vzhledem k B a C je

$$[f]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

Ověříme vztah $[f(\mathbf{x})]_C = [f]_C^B[\mathbf{x}]_B$ pro vektor $[\mathbf{x}]_B = (1, 2, 3)^T$, tj.

$$\mathbf{x} = 1 \cdot (1, 1, 2)^T + 2 \cdot (2, 2, 0)^T + 3 \cdot (3, 4, 4)^T = (4, 2, 4)^T .$$

Obraz tohoto vektoru je podle definice

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Podle $[f(\mathbf{x})]_C = [f]_C^B[\mathbf{x}]_B$ musí také platit

$$[f(\mathbf{x})]_C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} ,$$

což odpovídá, protože $1 \cdot (1, 2)^T + 4 \cdot (3, 3)^T = (3, 4)^T$, takže skutečně $[(3, 4)^T]_C = (1, 4)^T$.

Příklad 8.9. S nabytými znalostmi můžeme nyní rychleji určovat matice některých lineárních zobrazení. Budeme hledat matici A , aby příslušné zobrazení f_A byla rotace o α . V novější terminologii, hledáme matici rotace f v \mathbb{R}^2 o úhel α vzhledem

ke kanonickým bázím. K tomu stačí určit obrazy prvků kanonické báze a napsat je do sloupců. Máme

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix},$$

tedy

$$A = [f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Srovnajte tento výpočet s odvozením v části 4.2.1.

Příklad 8.10. Uvažujme zrcadlení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podle přímky p procházející počátkem se směrem $(2, 5)^T$. K nalezení matice f vzhledem ke kanonickým bázím, bychom potřebovali nalézt obrazy vektorů kanonické báze, což vyžaduje netriviální výpočet. Je ale snadné určit obrazy vektorů vhodně zvolené báze, například $B = ((2, 5)^T, (-5, 2)^T)$. Máme totiž $f(2, 5)^T = (2, 5)^T$, protože tento vektor $(2, 5)^T$ leží na přímce p , a $f(-5, 2)^T = (5, -2)^T$, protože vektor $(-5, 2)^T$ je kolmý na p . Matice f vzhledem k B a K_2 je tedy

$$[f]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zanedlouho si ukážeme, jak z nalezené matice určit matici f vzhledem k jakýmkoliv jiným bázím, například kanonickým.

Příklad 8.11. Určíme matici derivace chápané jako lineární zobrazení f z prostoru polynomů stupně nejvýše 3 do stejného prostoru vzhledem k bázím $B = (1, x, x^2, x^3)$ a stejné bázi B . K tomu stačí vypočítat vyjádření f -obrazů prvků B vzhledem k bázi B :

$$\begin{aligned} [1']_B &= [0]_B = (0, 0, 0, 0)^T \\ [x']_B &= [1]_B = (1, 0, 0, 0)^T \\ [(x^2)']_B &= [2x]_B = (0, 2, 0, 0)^T \\ [(x^3)']_B &= [3x^2]_B = (0, 0, 3, 0)^T \end{aligned}$$

Hledaná matice je

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 8.12. Uvažujme vektorový prostor $\mathbf{V} = \mathbb{C}^n$ (nebo $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$) se standardním skalárním součinem a jeho jednodimenzionální podprostor $W = \langle \mathbf{w} \rangle$. *Ortogonalní projekci na W* rozumíme zobrazení $p_W : V \rightarrow V$, které vektoru \mathbf{v} přiřazuje jeho ortogonální projekci \mathbf{v}_W na W . Ukážeme, že p_W je lineární zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ a najdeme jeho matici vzhledem ke kanonickým bázím.

Z kapitoly o skalárním součinu víme, že pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in V$ platí

$$\mathbf{v}_W = \frac{\mathbf{w}^* \mathbf{v}}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w}.$$

Součin skaláru $\mathbf{w}^* \mathbf{v} / \|\mathbf{w}\|^2$ a vektoru \mathbf{w} lze zapsat maticovým součinem

$$\mathbf{v}_W = \mathbf{w} \frac{\mathbf{w}^* \mathbf{v}}{\|\mathbf{w}\|^2} = \frac{\mathbf{w} \mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{v}.$$

Z toho vidíme, že p_W je lineární zobrazení a jeho matice vzhledem ke kanonickým bázím je

$$[p_W]_K^K = \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2} .$$

Příklad 8.13. Obecněji, uvažujme libovolný podprostor W dimenze n aritmetického prostoru \mathbb{C}^m (nebo \mathbb{R}^m) se standardním skalárním součinem. Určíme matici P_W ortogonální projekce p_W na podprostor W vzhledem ke kanonickým bázím.

Napíšeme si do sloupců matice A vektory nějaké báze prostoru W , tj. A je matice typu $m \times n$ s lineárně nezávislými sloupci. Ortogonální projekce vektoru \mathbf{b} na $\text{Im } A = W$ je vektor $A\mathbf{x}$, kde \mathbf{x} je řešením rovnice $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$. Protože A má lineárně nezávislé sloupce, je Gramova matice A^*A regulární, takže můžeme psát $\mathbf{x} = (A^*A)^{-1}A^*\mathbf{b}$. Projekci tedy můžeme vyjádřit $p_W(\mathbf{b}) = A\mathbf{x} = A(A^*A)^{-1}A^*\mathbf{b}$ a vidíme, že p_W je lineární a jeho matice vzhledem ke kanonickým bázím je

$$P_W = [p_W]_K^K = A(A^*A)^{-1}A^* .$$

Každá taková matice je, jak se snadno ověří, hermitovská a splňuje $P_W P_W = P_W$, což je též geometricky vidět z toho, že f_W je projekce. (Dokonce platí, že libovolná matice splňující tyto dvě podmínky je maticí projekce na nějaký podprostor.)

V definici 5.68 byl zaveden pojem matice přechodu od báze B k bázi C konečně generovaného prostoru \mathbf{V} . Pojem matice lineárního zobrazení nám umožňuje zdůvodnit zavedené značení $[\text{id}]_C^B$.

Pozorování 8.14. *Nechť B, C jsou báze konečně generovaného prostoru \mathbf{V} . Pak matice identického zobrazení z \mathbf{V} do \mathbf{V} je rovná matici přechodu od B k C .*

Důkaz. Přímý důsledek definic. □

Přesnější označení pro matici přechodu by bylo $[\text{id}_V]_C^B$, abychom zdůraznili, že se jedná o matici identického zobrazení id_V z V do V . Index V ale pro přehlednost většinou vynecháváme.

Vztah $[\mathbf{x}]_C = [\text{id}]_C^B[\mathbf{x}]_B$ z tvrzení 5.69 je nyní důsledkem tvrzení 8.6

Příklad 8.15. Matice přechodu od báze $B = ((1, 2, 3)^T, (6, 7, 8)^T, (\pi, \pi, 10)^T)$ ke kanonické bázi prostoru \mathbb{R}^3 je

$$[\text{id}]_{K_3}^B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & \pi \\ 2 & 7 & \pi \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix} ,$$

protože vyjádření i -tého vektoru báze B v kanonické bázi je ten samý vektor.

Příklad 8.16. Matice přechodu od B k B je vždy identická matice, protože vyjádření i -tého vektoru báze B vzhledem k bázi B je \mathbf{e}_i .

8.3. Skládání lineárních zobrazení. Lineární zobrazení a matice spolu úzce souvisí, proto není překvapivé, že s lineárními zobrazeními můžeme provádět podobné operace jako s maticemi: můžeme je násobit skalárem, sčítat, násobit (pro zobrazení tím myslíme skládat) a invertovat, samozřejmě jen za určitých podmínek. Přičemž operace s lineárními zobrazeními odpovídají při maticovém popisu příslušným operacím pro matice. Podíváme se nejprve na skládání a invertování.

Tvrzení 8.17. *Nechť $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} a $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ a $g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení. Pak složené zobrazení gf je lineární zobrazení $gf : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{W}$.*

Jsou-li navíc prostory $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ konečně generované a B je báze \mathbf{U} , C je báze \mathbf{V} a D je báze \mathbf{W} , pak platí

$$[gf]_D^B = [g]_D^C [f]_C^B .$$

Důkaz. Pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ dostáváme využitím linearity f a g

$$gf(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = g(f(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = g(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})) = gf(\mathbf{x}) + gf(\mathbf{y}) .$$

Zobrazení gf tedy zachovává sčítání. Podobně, pro každý vektor $\mathbf{x} \in U$ a každý skalár $t \in T$ platí

$$gf(t\mathbf{x}) = g(t f(\mathbf{x})) = t gf(\mathbf{x}) .$$

Zobrazení gf proto zachovává i násobení skalárem, takže je lineární.

K důkazu druhé části ověříme (dvojím užitím tvrzení 8.6 o matici lineárního zobrazení), že pro libovolné $\mathbf{x} \in U$ platí

$$[gf(\mathbf{x})]_D = [g]_D^C [f(\mathbf{x})]_C = [g]_D^C ([f]_C^B [\mathbf{x}]_B) = ([g]_D^C [f]_C^B) [\mathbf{x}]_B .$$

Z tvrzení 8.7 o jednoznačnosti matice lineárního zobrazení nyní vyplývá, že $[gf]_D^B = [g]_D^C [f]_C^B$. \square

Tvrzení 8.18. *Nechť \mathbf{U}, \mathbf{V} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} a $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární zobrazení, které je bijekcí $U \rightarrow V$. Pak f^{-1} je lineární zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$.*

Jsou-li navíc \mathbf{U}, \mathbf{V} konečně generované prostory dimenze n , B je báze \mathbf{U} a C je báze \mathbf{V} , pak platí

$$[f^{-1}]_B^C = ([f]_C^B)^{-1} .$$

Důkaz. Zvolíme libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Protože f je na V , existují $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ takové, že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ a $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$. Protože f je lineární, platí $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ a tedy $f^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} = f^{-1}(\mathbf{x}) + f^{-1}(\mathbf{y})$.

Podobně, pro libovolný skalár $t \in T$ platí $f(t\mathbf{u}) = tf(\mathbf{u}) = t\mathbf{x}$ a tedy $f^{-1}(t\mathbf{x}) = t\mathbf{u} = tf^{-1}(\mathbf{x})$.

K důkazu druhé části využijeme druhou část tvrzení 8.17 o složeném zobrazení. Protože $f^{-1}f = \text{id}_U$, platí $I_n = [\text{id}_U]_B^B = [f^{-1}f]_B^B = [f^{-1}]_B^C [f]_C^B$. Matice $[f]_C^B$ je čtvercová, proto $[f^{-1}]_B^C = ([f]_C^B)^{-1}$. \square

V druhé části tvrzení stačí předpokládat, že prostor \mathbf{U} je konečně generovaný. Podle bodu (2) nebo (3) tvrzení 8.31 je pak prostor \mathbf{V} také konečně generovaný a má stejnou dimenzi.

Ukážeme si použití předchozích dvou tvrzení na početních příkladech.

Příklad 8.19. Určíme matici přechodu od kanonické báze prostoru \mathbb{R}^2 k bázi $B = ((2, 5)^T, (-5, 2)^T)$. Matici přechodu od B ke kanonické bázi určíme přímo z definice.

$$[\text{id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Využijeme $\text{id}^{-1} = \text{id}$ a tvrzení 8.18:

$$[\text{id}]_B^{K_2} = [\text{id}^{-1}]_B^{K_2} = ([\text{id}]_{K_2}^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} .$$

Inverzní matici jsme spočítali pomocí adjungované matice (viz příklad 6.39).

Nalezenou matici přechodu můžeme použít k výpočtu matice zrcadlení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podle přímky p procházející počátkem se směrem $(2, 5)^T$ vzhledem ke kanonickým bázím. V příkladu 8.10 jsme nahlédli, že matice f vzhledem k B a kanonické bázi je

$$[f]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pomocí tvrzení 8.17 a užitím $f = f \circ \text{id}$ nyní můžeme spočítat matici f vzhledem ke kanonickým bázím:

$$[f]_{K_2}^{K_2} = [f]_{K_2}^B [\text{id}]_B^{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} -21 & 20 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}.$$

Příklad 8.20. V prostoru \mathbb{Z}_5^2 jsou dány báze $B = ((2, 4)^T, (3, 3)^T)$ a $C = ((1, 3)^T, (2, 4)^T)$. Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_5^2$ má vzhledem k bázi B souřadnice $[\mathbf{v}]_B = (x_1, x_2)^T$. Najdeme souřadnice vektoru \mathbf{v} vzhledem k bázi C .

K tomu určíme matici přechodu od B k C užitím tvrzení 8.17 a 8.18:

$$\begin{aligned} [\text{id}]_C^B &= [\text{id}]_C^{K_2} [\text{id}]_{K_2}^B = ([\text{id}]_{K_2}^C)^{-1} [\text{id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Souřadnice \mathbf{v} vzhledem k C jsou

$$[\mathbf{v}]_C = [\text{id}]_C^B [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}.$$

Výsledek ještě můžeme ověřit například volbou $(x_1, x_2)^T = (1, 0)^T$. Je $[\mathbf{v}]_B = (1, 0)^T$, takže $\mathbf{v} = (2, 4)^T$. Podle odvozeného vzorce by mělo platit $[\mathbf{v}]_C = (0, 1)^T$ a skutečně $(2, 4)^T = 0 \cdot (1, 3)^T + 1 \cdot (2, 4)^T$. K nabytí úplné jistoty bychom mohli ještě ověřit pro $(x_1, x_2)^T = (0, 1)^T$.

Příklad 8.21. V příkladu 8.8 jsme určili matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ daného předpisem

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázím B a C , kde

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \quad \text{a} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Spočítáme tuto matici jiným postupem. Ze zadání můžeme přímo určit $[f]_{K_2}^{K_3}$, $[\text{id}]_{K_3}^B$ a $[\text{id}]_{K_2}^C$, pomocí těchto matic lze spočítat $[f]_C^B$:

$$\begin{aligned} [f]_C^B &= [\text{id}]_C^{K_2} [f]_{K_2}^{K_3} [\text{id}]_{K_3}^B = ([\text{id}]_{K_2}^C)^{-1} [f]_{K_2}^{K_3} [\text{id}]_{K_3}^B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Následující důsledek tvrzení 8.17 a 8.18 je obzvláště důležitý, jak zjistíme v kapitole o vlastních číslech, proto jej formulujeme jako samostatné tvrzení.

Tvrzení 8.22. *Je-li \mathbf{V} konečně generovaný vektorový prostor nad tělesem \mathbf{T} , $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární zobrazení, B, C dvě báze prostoru \mathbf{V} a R matice přechodu od báze B k bázi C , pak*

$$[f]_B^B = R^{-1}[f]_C^C R .$$

Důkaz. Protože $f = \text{id}_V f \text{id}_V$ máme

$$[f]_B^B = [\text{id}_V]_B^C [f]_C^C [\text{id}_V]_C^B = ([\text{id}_V]_C^B)^{-1} [f]_C^C [\text{id}_V]_C^B = R^{-1} [f]_C^C R .$$

□

8.4. Typy lineárních zobrazení. Následující definice zavádí terminologii pro různé typy lineárních zobrazení.

Definice 8.23. Necht \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení.

- Pokud f je prosté, říkáme, že f je *monomorfismus*.
- Pokud f je na, říkáme, že f je *epimorfismus*.
- Pokud f je bijekce, říkáme, že f je *izomorfismus*.
- Pokud $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, říkáme, že f je *endomorfismus* prostoru \mathbf{V} (též *lineární operátor* na \mathbf{V}).
- Pokud $\mathbf{W} = \mathbf{T}$, říkáme, že f je *lineární forma* na \mathbf{V} .
- Pokud f je izomorfismus a endomorfismus, říkáme, že f je *automorfismus*.

Příklad 8.24. Rotace a osově souměrnosti jsou automorfismy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Zobrazení přiřazující vektoru z \mathbf{V} souřadnice ve zvolené bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je izomorfismus z \mathbf{V} do \mathbf{T}^n .

Zobrazení přiřazující vektoru z \mathbb{R}^3 jeho orientovanou vzdálenost od zvolené roviny procházející počátkem je lineární forma na \mathbb{R}^3 , je to epimorfismus, který není monomorfismus.

Projekce na rovinu procházející počátkem (chápaná jako zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) je endomorfismus, který není ani epimorfismus ani monomorfismus.

Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované vztahem $f(x_1, x_2)^T = (x_1, x_2, 0)^T$ (vlození roviny do \mathbb{R}^3) je monomorfismus a není to epimorfismus.

8.4.1. Jádro a obraz. Jako defekt prostoty zavedeme jádro $\text{Ker } f$ lineárního zobrazení f , je tvořeno těmi vektory, které f zobrazí na nulový vektor. Obraz lineárního zobrazení f budeme značit $\text{Im } f$:

Definice 8.25. Necht $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. *Jádrem* f rozumíme množinu

$$\text{Ker } f = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\} .$$

Obraz (obor hodnot) f značíme $\text{Im } f$, tj.

$$\text{Im } f = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}$$

Všimněte si, že nulový vektor leží v jádru jakéhokoliv lineárního zobrazení. Pokud ale v jádru žádný jiný vektor neleží, je již zobrazení prosté (tj. monomorfismus):

Tvrzení 8.26. *Necht $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak f je prosté právě tehdy, když $\text{Ker } f = \{\mathbf{o}\}$.*

Důkaz. Je-li f prosté a $\mathbf{x} \in \text{Ker } f$, pak $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o} = f(\mathbf{o})$ a protože f je prosté, plyne odtud $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Proto $\text{Ker } f \subseteq \{\mathbf{o}\}$. Druhá inkluze je triviální.

Je-li naopak $\text{Ker } f = \{\mathbf{o}\}$ a $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ pro nějaké vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, pak z linearity f plyne $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \text{Ker } f$, odkud plyne $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. To dokazuje, že f je prosté. \square

Z důvodu je patrné, že jádro lineárního zobrazení určuje, které dvojice vektorů se zobrazí na stejný vektor. Vztah $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ totiž platí právě tehdy, když $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \text{Ker } f$. To je ilustrováno na obrázku níže, kde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je projekce na přímkou p podél roviny U .

OBRAZEK

Obraz i jádro lineárního zobrazení určíme snadno z jeho libovolné matice – v příslušných bázích je to sloupcový prostor resp. jádro této matice. Toho jsme si již dříve všimli pro zobrazení mezi aritmetickými prostory a jejich matici vzhledem ke kanonickým bázím.

Tvrzení 8.27. *Nechť \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou konečně generované vektorové prostory, B je báze \mathbf{V} , C je báze \mathbf{W} a $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak platí:*

- Jádro f je podprostorem \mathbf{V} a platí

$$[\text{Ker } f]_B = \text{Ker } [f]_C^B .$$

- Obraz f je podprostorem \mathbf{W} a platí

$$[\text{Im } f]_C = \text{Im } [f]_C^B .$$

Důkaz.

- Jádro je neprázdné, protože obsahuje nulový vektor. Je uzavřené na sčítání, protože z $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Ker } f$ plyne $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, čili $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Ker } f$, a podobně se ukáže uzavřenost na násobení skalárem.

Použijeme opět vzorec pro matici lineárního zobrazení:

$$\begin{aligned} [\text{Ker } f]_B &= \{[\mathbf{v} : f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}]\}_B = \{[\mathbf{v}]_B : f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}\} = \{[\mathbf{v}]_B : [f(\mathbf{v})]_C = \mathbf{o}\} \\ &= \{[\mathbf{v}]_B : [f]_C^B [\mathbf{v}]_B = \mathbf{o}\} = \{\mathbf{x} \in T^{\dim(V)} : [f]_C^B \mathbf{x} = \mathbf{o}\} = \text{Ker } [f]_C^B \end{aligned}$$

- Obraz je zřejmě neprázdný. Ověříme uzavřenost na sčítání, uzavřenost na násobení skalárem se dokáže podobně. Jsou-li $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ v obrazu f , pak existují $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ takové, že $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ a $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Z linearity $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, takže v obrazu leží i součet $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.

Z tvrzení 8.6 o matici lineárního zobrazení dostáváme

$$\begin{aligned} [f(V)]_C &= \{[f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V]\}_C = \{[f(\mathbf{v})]_C : \mathbf{v} \in V\} = \{[f]_C^B [\mathbf{v}]_B : \mathbf{v} \in V\} \\ &= \{[f]_C^B \mathbf{x} : \mathbf{x} \in T^{\dim(V)}\} = \text{Im } [f]_C^B . \end{aligned}$$

\square

Příklad 8.28. Lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ máme dáno maticí vzhledem k bázím B a C :

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) \right), \quad C = \left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right) \right),$$

$$A = [f]_C^B = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{array} \right) .$$

Určíme $\text{Ker } f$ a $f(\mathbb{R}^3)$.

Nejprve spočítáme $\text{Ker } A$ (tj. určíme nějakou bázi $\text{Ker } A$), tedy vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí A .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Báze $\text{Ker } A$ je například $(-1, 2, 0)^T, (3, 0, 2)^T$ (za parametry jsme volili $(2, 0)^T$ a $(0, 2)^T$, aby vycházela hezčí čísla). Takže

$$[\text{Ker } f]_B = \text{Ker } A = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

z čehož dopočteme

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \left\langle -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Nyní řádkovými úpravami určíme bázi $\text{Im } A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Takže

$$[\text{Im } f]_C = \text{Im } A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a

$$\text{Im } f = \left\langle 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dimenze jádra f je 2 a dimenze obrazu f je 1, což je v souladu s větou o dimenzi jádra a obrazu. Zobrazení f je znázorněné na obrázku

OBRAZEK

8.4.2. *Charakterizace mono/epi/izo-morfismů.* Monomorfismy zobrazují lineárně nezávislé posloupnosti na lineárně nezávislé posloupnosti a tato vlastnost je charakterizuje:

Tvrzení 8.29. *Nechť \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , \mathbf{V} je konečně generovaný a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Zobrazení f je prosté (monomorfismus).*
- (2) *Pro každou lineárně nezávislou posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ve \mathbf{V} je posloupnost $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k))$ lineárně nezávislá v \mathbf{W} .*
- (3) *Existuje báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} taková, že $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ je lineárně nezávislá v \mathbf{W} .*

Důkaz. (1) \Rightarrow (2). Předpokládejme, že f je prosté a $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost ve \mathbf{V} . Platí-li pro nějaké skaláry $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{T}$

$$t_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + t_k f(\mathbf{v}_k) = \mathbf{o},$$

pak v důsledku linearity f platí rovněž

$$f(t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k) = \mathbf{o} = f(\mathbf{o}) .$$

Protože f je prosté zobrazení, platí $t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}$, a protože $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá, dostáváme $t_1 = \cdots = t_k = 0$.

(2) \Rightarrow (3). Plyne z toho, že každá báze je lineárně nezávislá posloupnost.

(3) \Rightarrow (1). Podle tvrzení 8.26 stačí dokázat, že $\text{Ker } f$ obsahuje pouze nulový vektor. Uvažujme libovolný vektor $\mathbf{x} \in \text{Ker } f$. Vyjádříme jej jako lineární kombinaci prvků báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$:

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n .$$

Pak

$$\mathbf{o} = f(\mathbf{x}) = f(t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n) = t_1f(\mathbf{v}_1) + \cdots + t_nf(\mathbf{v}_n) .$$

Protože je $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ lineárně nezávislá, plyne odtud $t_1 = \cdots = t_n = 0$ a tedy $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. \square

Následuje obdobné tvrzení pro epimorfismy. Ty převádějí množiny generátorů na množiny generátorů.

Tvrzení 8.30. *Nechť \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , \mathbf{V} je konečně generovaný a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Zobrazení f je na \mathbf{W} (epimorfismus).*
- (2) *Pro každou množinu generátorů $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ ve \mathbf{V} je $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ množina generátorů v \mathbf{W} .*
- (3) *Existuje báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} taková, že $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ generuje \mathbf{W} .*

Důkaz. (1) \Rightarrow (2). Pro libovolný vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ existuje $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ tak, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$, protože f je epimorfismus. Protože $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ generuje \mathbf{V} , můžeme vektor \mathbf{x} vyjádřit jako lineární kombinaci $\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k$. Díky linearitě f nyní máme $\mathbf{w} = f(\mathbf{x}) = f(t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k) = t_1f(\mathbf{v}_1) + \cdots + t_kf(\mathbf{v}_k)$. Zjistili jsme, že každý vektor \mathbf{w} lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)$.

(2) \Rightarrow (3). Plyne z toho, že každá báze \mathbf{V} generuje \mathbf{V} .

(3) \Rightarrow (1). Potřebujeme ukázat, že každý vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ má vzor při zobrazení f . Protože $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ generuje \mathbf{W} , můžeme \mathbf{w} vyjádřit jako $\mathbf{w} = t_1f(\mathbf{v}_1) + \cdots + t_nf(\mathbf{v}_n)$. Pak pro vektor $\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n$ platí $f(\mathbf{x}) = f(t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n) = t_1f(\mathbf{v}_1) + \cdots + t_nf(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}$. \square

Důsledkem předchozích dvou tvrzení je charakterizace izomorfismů.

Tvrzení 8.31. *Nechť \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , \mathbf{V} je konečně generovaný a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Zobrazení f je izomorfismus.*
- (2) *Pro každou bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ve \mathbf{V} je $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k))$ báze v \mathbf{W} .*
- (3) *Existuje báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} taková, že $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ je báze v \mathbf{W} .*

8.4.3. *Izomorfismus.* Dva prostory \mathbf{V} , \mathbf{W} nazýváme *izomorfní*, pokud existuje izomorfismus $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$. (Rozmyslete si, že relace “být izomorfní” je reflexivní, symetrická a tranzitivní, tj. je to ekvivalence, viz cvičení.) Skutečnost, že \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou izomorfní se zapisuje

$$\mathbf{V} \cong \mathbf{W}$$

Izomorfní prostory jsou „v podstatě“ stejné, liší se jenom přejmenováním vektorů. Podrobněji, uvažujme izomorfismus $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$. Přejmenováním každého vektoru $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ na $f(\mathbf{v})$ a zachováním původních operací vznikne prostor \mathbf{W} . Skutečně, přejmenováním dvou vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} ve \mathbf{V} vzniknou vektory $f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})$, jejichž součet ve \mathbf{W} je $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$, což je z linearity totéž jako přejmenovaný vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, tj. vektor $f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Podobně pro násobení skalárem. Proto izomorfismy zachovávají mnoho vlastností:

Pozorování 8.32. *Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je izomorfismus konečně generovaných prostorů. Pak platí*

- (1) *Posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá ve \mathbf{V} právě tehdy, když je posloupnost $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k))$ lineárně nezávislá v \mathbf{W} .*
- (2) *Množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ generuje \mathbf{V} právě tehdy, když množina $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k)\}$ generuje \mathbf{W} .*
- (3) *Posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je báze \mathbf{V} právě tehdy, když je posloupnost $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k))$ báze \mathbf{W} .*
- (4) $\dim V = \dim W$.
- (5) *Množina $M \subseteq V$ je podprostorem prostoru \mathbf{V} právě tehdy, když je $f(M) = \{f(\mathbf{m}) : \mathbf{m} \in M\}$ podprostorem prostoru \mathbf{W} .*
- (6) *Pokud $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$, pak f zúžené na \mathbf{U} je izomorfismem $\mathbf{U} \rightarrow f(\mathbf{U})$. Speciálně $\dim \mathbf{U} = \dim f(\mathbf{U})$.*

Důkaz. □

Pro libovolný konečně generovaný prostor \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} s bází $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je zobrazení $s : V \rightarrow T^n$ definované vztahem $s(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_B$ izomorfismus $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{T}^n$: Zobrazení s je prosté, protože každý vektor je jednoznačně určen souřadnicemi vzhledem k B . Zobrazení s je na T^n , protože každá n -tice je souřadnicemi nějakého vektoru ve \mathbf{V} . Konečně s je lineární podle tvrzení 5.65. (Vlastnosti uvedené v pozorování 5.67 jsou tak speciálním případem pozorování 8.32.)

Použitím vlastností z pozorování 8.32 na tento “souřadnicový izomorfismus” získáme obecnější verzi věty o dimenzi jádra a obrazu, dříve dokázané v maticové verzi.

Věta 8.33 (o dimenzi jádra a obrazu). *Je-li \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou konečně generované vektorový prostory nad tělesem \mathbf{T} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineární zobrazení, pak*

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim \mathbf{V}$$

Důkaz. Vezmeme libovolnou bázi B prostoru \mathbf{V} a bázi C prostoru \mathbf{W} . Označme $A = [f]_C^B$ (jde o matici typu $\dim W \times \dim V$). Podle tvrzení 8.27 o výpočtu jádra a obrazu platí $[\text{Ker } f]_B = \text{Ker } A$ a $[\text{Im } f]_C = \text{Im } A$. Z bodu (6) pozorování 8.32 nyní vyplývá $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } A$ a $\dim \text{Im } f = \dim A$. Vztah nyní vyplývá z věty 5.90 o dimenzi jádra a obrazu pro matice. □

Souřadnicový izomorfismus také ukazuje, že každý vektorový prostor \mathbf{V} nad \mathbf{T} dimenze n je izomorfní aritmetickému prostoru \mathbf{T}^n . Ze symetrie a tranzitivity relace

“být izomorfní” plyne, že libovolné dva prostory nad stejným tělesem stejné dimenze jsou izomorfní. Předvedeme “bezsouřadnicový” důkaz.

Věta 8.34. *Nechť \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou dva konečně generované prostory nad tělesem \mathbf{T} . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (1) *Existuje izomorfismus $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$.*
- (2) $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{W})$.

Důkaz. Implikace (1) \Rightarrow (2) je bod (4) v pozorování 8.32.

Pro důkaz druhé implikace zvolíme bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} a bázi $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ prostoru \mathbf{W} . Podle tvrzení 8.4 (o rozšiřování lineárního zobrazení definovaného na bázi) existuje lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ splňující $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Toto lineární zobrazení je izomorfismem podle bodu (3) tvrzení 8.31 charakterizující izomorfismy. \square

Dokázaná věta přesný význam heslu, že vektorový prostor nad daným tělesem dané dimenze je “v podstatě” jen jeden.

Věta platí i pro prostory, které nejsou konečně generované. Těmi se detailněji nezabýváme, ukážeme ale příklad izomorfismu mezi takovými prostory.

Příklad 8.35. Ozačíme \mathbf{V} prostor všech reálných polynomů a \mathbf{W} podprostor prostoru všech posloupností reálných čísel tvořený posloupnostmi, které obsahují konečně mnoho nenulových prvků. Definujeme zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ vztahem

$$f(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) .$$

Snadno se ověří, že f je bijekce (prosté a na) a že je lineární, tedy f je izomorfismus.

8.5. Prostor lineárních zobrazení. Uvažujme dva vektorové prostory \mathbf{V} , \mathbf{W} nad stejným tělesem. Následující tvrzení ukazuje, že na množině všech lineárních zobrazení z \mathbf{V} do \mathbf{W} lze přirozeným způsobem zavést sčítání a skalární násobení. Další tvrzení ukazuje, že tímto získáme vektorový prostor.

Tvrzení 8.36. *Jsou-li \mathbf{V} , \mathbf{W} vektorové prostory nad stejným tělesem \mathbf{T} , $f, g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ dvě lineární zobrazení a $t \in \mathbf{T}$, pak platí:*

- (1) *Zobrazení tf definované vztahem*

$$(tf)(\mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}$$

je lineární zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$.

- (2) *Zobrazení $f + g$ definované vztahem*

$$(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}$$

je lineární zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$.

Tvrzení 8.37. *Jsou-li \mathbf{V} , \mathbf{W} vektorové prostory nad stejným tělesem \mathbf{T} , pak množina všech lineárních zobrazení z \mathbf{V} do \mathbf{W} s operacemi definovanými v tvrzení 8.36 tvoří vektorový prostor nad \mathbf{T} .*

Důkaz. Přenecháme jako cvičení \square

Definice 8.38. Vektorový prostor všech lineárních zobrazení z \mathbf{V} do \mathbf{W} značíme $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

Tvrzení 8.39. *Jsou-li \mathbf{V} , \mathbf{W} konečně generované vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , $\dim \mathbf{V} = n$ a $\dim \mathbf{W} = m$, pak prostor $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ je izomorfní prostoru $\mathbf{T}^{m \times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad \mathbf{T}*

Důkaz. Zvolíme bázi B prostoru \mathbf{V} a bázi C prostoru \mathbf{W} . Zobrazení $s : \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \rightarrow T^{m \times n}$ definujeme vztahem $s(f) = [f]_C^B$.

Zobrazení s je prosté, protože každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno svou maticí vzhledem k B a C . Zobrazení s je na $T^{m \times n}$, protože každá matice typu $m \times n$ je maticí nějakého lineárního zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$. K ověření toho, že s je lineární, potřebujeme ukázat, že pro libovolné $f, g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ a $t \in T$ platí $[tf]_C^B = t[f]_C^B$, $[f + g]_C^B = [f]_C^B + [g]_C^B$. To přenecháme jako cvičení. \square

8.5.1. *Lineární formy.* Připomeňme, že lineární forma na vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} je lineární zobrazení z \mathbf{V} do (jednodimenzionálního) prostoru \mathbf{T} .

Množinu všech lineárních forem na \mathbf{V} spolu s přirozenými operacemi sčítání a násobení (zavedenými ve tvrzení 8.36) nazýváme duál prostoru \mathbf{V} :

Definice 8.40. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad tělesem \mathbf{T} . *Duálem prostoru \mathbf{V}* rozumíme prostor

$$\mathbf{V}^d = \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{T}) .$$

Předpokládejme, že \mathbf{V} je konečně generovaný prostor dimenze n . Prostor $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{T})$ je podle tvrzení 8.39 izomorfní prostoru $\mathbf{T}^{1 \times n}$ všech matic nad \mathbf{T} typu $1 \times n$ tj. prostoru řádkových vektorů. Speciálně:

Tvrzení 8.41. *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný prostor, pak*

$$\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}^d .$$

Důkaz. $\mathbf{V}^d = \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{T})$ je izomorfní $\mathbf{T}^{1 \times n}$ (kde $n = \dim \mathbf{V}$) a tento prostor má dimenzi n . Protože izomorfní prostory mají stejnou dimenzi (viz např. pozorování 8.32), platí $\dim \mathbf{V}^d = n$. \square

Podle důkazu tvrzení 8.39 izomorfismus $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{T}) \cong \mathbf{T}^{1 \times n}$ získáme volbou báze B prostoru \mathbf{V} a báze C prostoru \mathbf{T} . Pro lineární formy bázi C volíme vždy “kanonickou”, tj. $C = (1)$.

Definice 8.42. Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný prostor nad tělesem \mathbf{T} , f je lineární forma na \mathbf{V} a B je báze prostoru \mathbf{V} . *Maticí formy f vzhledem k bázi B* rozumíme řádkový vektor

$$[f]^B = [f]_{(1)}^B .$$

Podle definice matice lineárního zobrazení je matice f vzhledem k $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ rovná

$$[f]^B = (f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)) .$$

Vzorec z tvrzení 8.6 o matici lineárního zobrazení má pro lineární formy tvar

$$f(\mathbf{x}) = [f]^B [\mathbf{x}]_B .$$

Označíme-li $[f]^B = (a_1, \dots, a_n)$ a $[\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)$, máme

$$f(\mathbf{x}) = (a_1, \dots, a_n)(x_1, \dots, x_n)^T = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n .$$

8.5.2. *Řádkový pohled na soustavy lineárních rovnic.* Rozebereme nyní podrobněji řádkový pohled na soustavy lineárních rovnic. Diskuzi budeme provádět pouze pro homogenní soustavy rovnic, jejichž řešení je základem pro řešení obecných soustav.

Nechť tedy $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ nad tělesem \mathbf{T} s řádkovými vektory $\tilde{\mathbf{a}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_m$. Pro $i = 1, \dots, m$ označme f_i lineární formu na \mathbf{T}^n , jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je $\tilde{\mathbf{a}}_i$, tj.

$$f_i(x_1, \dots, x_n)^T = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n .$$

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ právě tehdy, když $f_1(\mathbf{x}) = 0, f_2(\mathbf{x}) = 0, \dots, f_m(\mathbf{x}) = 0$. Jinými slovy, $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ právě tehdy, když $\mathbf{x} \in \text{Ker } f_1, \dots, \mathbf{x} \in \text{Ker } f_m$, neboli $\mathbf{x} \in \text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_m$. Jádro je, kromě případu nulové formy, vždy nadrovina (tj. podprostor dimenze $n - 1$ v \mathbf{T}^n), jak ukazuje následující obecnější tvrzení.

Tvrzení 8.43. *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor dimenze n nad tělesem \mathbf{T} a f je lineární forma na \mathbf{V} . Je-li f nenulová, pak $\dim \text{Ker } f = n - 1$.*

Důkaz. Podle věty 8.33 o dimenzi jádra a obrazu platí

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = n$$

Je-li f nenulová forma, její obraz je celé T a $\dim \text{Im } f = 1$, takže $\dim \text{Ker } f + 1 = n$, čili $\dim \text{Ker } f = n - 1$. \square

Vraťme se k diskuzi řešení soustavy. Předpokládejme pro přehlednost, že žádná z forem f_1, \dots, f_m není nulová. Každý řádek v takovém případě určuje nadrovinu $\text{Ker } f_i$ a množina řešení je rovna průniku těchto nadrovin. Počítejme průniky postupně: uvažujme posloupnost

$$\mathbf{W}_1 = \text{Ker } f_1, \mathbf{W}_2 = \text{Ker } f_1 \cap \text{Ker } f_2, \dots, \mathbf{W}_m = \text{Ker } f_1 \cap \text{Ker } f_2 \cap \dots \cap \text{Ker } f_m.$$

W_{i+1} je tedy průnikem W_i a nadroviny $\text{Ker } f_{i+1}$. Důsledkem věty o dimenzi součtu a průniku je (viz následující tvrzení 8.44), že \mathbf{W}_{i+1} je buď rovno \mathbf{W}_i (to nastane v případě, že $\text{Ker } f_{i+1} \supseteq W_i$) a nebo má o jedničku menší dimenzi. Další věta pak ukazuje, že první možnost nastane právě tehdy, když je forma f_{i+1} lineární kombinací forem f_1, \dots, f_i . (Ekvivalentně, když je $\tilde{\mathbf{a}}_{i+1}$ lineární kombinací vektorů $\tilde{\mathbf{a}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_i$.)

Tvrzení 8.44. *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor dimenze n , \mathbf{W} je podprostor \mathbf{V} a \mathbf{U} je podprostor \mathbf{V} dimenze $n - 1$. Pokud neplatí $W \subseteq U$, pak $\dim(\mathbf{W} \cap \mathbf{U}) = \dim \mathbf{W} - 1$.*

Důkaz. Pokud neplatí $W \subseteq U$, tak je \mathbf{U} je vlastním podprostorem $\mathbf{W} + \mathbf{U}$, z čehož plyne, že $\mathbf{W} + \mathbf{U}$ má dimenzi alespoň n . Vyšší dimenzi ale mít nemůže jakožto podprostor prostoru \mathbf{V} , který má dimenzi n . Z věty 5.94 o dimenzi součtu a průniku dostáváme

$$\dim(\mathbf{W} \cap \mathbf{U}) = \dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{U} - \dim(\mathbf{W} + \mathbf{U}) = \dim \mathbf{W} + n - 1 - n = \dim \mathbf{W} - 1 .$$

\square

Věta 8.45. *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor dimenze n nad tělesem \mathbf{T} a f_1, f_2, \dots, f_k, g lineární formy na \mathbf{V} . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) $g \in \langle f_1, \dots, f_k \rangle$
- (2) $\text{Ker } g \supseteq \text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_k$

Důkaz. Jednodušší je implikace (1) \Rightarrow (2). Předpokládejme, že $g = t_1 f_1 + \dots + t_k f_k$ pro nějaké skaláry $t_1, \dots, t_k \in T$. Pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_k$ platí $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) = \dots = f_k(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, tedy také $g(\mathbf{x}) = (t_1 f_1 + \dots + t_k f_k)(\mathbf{x}) = t_1 f_1(\mathbf{x}) + \dots + t_k f_k(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$.

Pro důkaz (2) \Rightarrow (1) zvolme nějakou bázi B prostoru \mathbf{V} . Označme C matici (typu $k \times n$) s řádkovými vektory $[f_1]^B, \dots, [f_k]^B$ a D matici (typu $(k+1) \times n$) s řádkovými vektory $[f_1]^B, \dots, [f_k]^B, [g]^B$.

Ukážeme, že $\text{Ker } C = [\text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_k]_B$. Uvažujme libovolný vektor $\mathbf{y} \in T^n$ a vektor $\mathbf{x} \in V$ takový, že $[\mathbf{x}]_B = \mathbf{y}$. Vektor \mathbf{y} leží v $[\text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_k]_B$ právě tehdy, když \mathbf{x} leží v $\text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_k$, neboli $f_1(\mathbf{x}) = \dots = f_k(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$. To nastane právě tehdy, když $[f_1]^B[\mathbf{x}]_B = \dots = [f_k]^B[\mathbf{x}]_B = \mathbf{0}$ (podle tvrzení 8.6). Podle definice matice C , toto je ekvivalentní podmínce $C[\mathbf{x}]_B = \mathbf{o}$, neboli $\mathbf{y} \in \text{Ker } C$.

Podobně se ukáže, že $\text{Ker } D = [\text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_k \cap \text{Ker } g]_B$. Z předpokladu, že $\text{Ker } g$ obsahuje $\text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_k$ ale plyne $\text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_k \cap \text{Ker } g = \text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_k$. Platí proto $\text{Ker } C = \text{Ker } D$.

Podle věty 5.90 o dimenzi jádra a obrazu pak platí $\dim \text{Im } C = \dim \text{Im } D (= n - \dim \text{Ker } C = n - \dim \text{Ker } D)$ a z věty 5.78 o rovnosti dimenze řádkového a sloupcového prostoru dostáváme $\dim \text{Im } C^T = \dim \text{Im } D^T$. Řádkový prostor matice C je podprostorem řádkového prostoru matice D , proto z rovnosti dimenzí vyplývá $\text{Im } C^T = \text{Im } D^T$. Tím pádem je poslední řádek $[g]^B$ matice D lineární kombinací řádků matice C , takže existují skaláry t_1, \dots, t_k takové, že

$$[g]^B = t_1 [f_1]^B + \dots + t_k [f_k]^B = [t_1 f_1 + \dots + t_k f_k]^B$$

Rovnají-li se matice lineárních forem vzhledem k nějaké bázi, pak se lineární formy rovnají, tedy konečně dostáváme

$$g = t_1 f_1 + \dots + t_k f_k \quad .$$

□

Předchozí diskuze nám rovněž umožňuje lépe nahlédnout, proč se dimenze sloupcového prostoru matice A (typu $m \times n$) rovná dimenzi řádkového prostoru matice A .

Vypočítáme dvěma způsoby dimenzi $\text{Ker } A$. Nejprve sloupcově. Podle věty o dimenzi jádra a obrazu platí $\dim \text{Ker } A = n - \dim \text{Im } A$. To si můžeme představovat tak, že každý bázový sloupec nám ubere jeden stupeň volnosti při řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Dimenze množiny řešení této soustavy je tak rovná n minus počet bázových sloupců, čili $n - \dim \text{Im } A$.

Nyní řádkový pohled. Analogicky jako pro sloupce řekneme, že řádek matice A je bázový, pokud není lineární kombinací předchozích řádků. Dimenze $\dim \text{Im } A^T$ řádkového prostoru je rovna počtu bázových řádků. Přechozí diskuze ukazuje, že při postupném přidávání rovnic (=řádků matice A), každý bázový řádek sníží dimenzi prostoru řešení o 1, takže $\dim \text{Ker } A$ je rovno n minus počet bázových řádků, čili $n - \dim \text{Im } A^T$.

Zdůvodnili jsme, že $\dim \text{Ker } A = n - \dim \text{Im } A = n - \dim \text{Im } A^T$. Z toho okamžitě vidíme, že $\dim \text{Im } A = \dim \text{Im } A^T$.

8.5.3. Reprezentace lineárních forem skalárním součinem. Každou formu na konečně generovaném prostoru se skalárním součinem lze jistým způsobem reprezentovat pomocí skalárního součinu. Vysvětlíme si myšlenku na případě aritmetického vektorového prostoru se standardním skalárním součinem.

Uvažujme tedy lineární formu f na aritmetickém vektorovém prostoru \mathbb{R}^n . Víme, že pro každé \mathbf{x} platí $f(\mathbf{x}) = [f]^{K_n} \mathbf{x}$. Označíme-li $\mathbf{u} = ([f]^{K_n})^T \in \mathbb{R}^n$, máme

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} .$$

Obecněji, pro prostor \mathbb{C}^n bychom dostali vztah $f(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$ volbou $\mathbf{u} = ([f]^{K_n})^*$.

Věta 8.46 (O reprezentaci lineárních forem). *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný prostor se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a f je lineární forma na \mathbf{V} . Pak existuje jednoznačně určený vektor $\mathbf{u} \in V$ takový, že pro každé $\mathbf{x} \in V$ platí*

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle$$

Důkaz. Nechť B je nějaká ortonormální báze prostoru \mathbf{V} . Nechť \mathbf{u} je vektor, jehož souřadnice vzhledem k B jsou $[\mathbf{u}]_B = ([f]^B)^*$. Pak pro libovolné $\mathbf{x} \in V$ platí

$$f(\mathbf{x}) = [f]^B [\mathbf{x}]_B = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{x}]_B = \langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle ,$$

kde poslední rovnost plyne z tvrzení 7.21 o výpočtu skalárního součinu pomocí souřadnic vzhledem k ortonormální bázi.

Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou vektory takové, že pro libovolné $\mathbf{x} \in V$ platí

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle .$$

Úpravou dostáváme $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle = 0$. Volbou $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ dostaneme $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 0$, z čehož vyplývá $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. \square

Vztah $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle$ má názornou geometrickou interpretaci. Předpokládejme, že $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ (jinak je $f = 0$). Vzdálenost vektoru \mathbf{x} od nadroviny $U = \mathbf{u}^\perp$ je rovná velikosti ortogonální projekce vektoru \mathbf{x} na $U^\perp = \langle \mathbf{u} \rangle$, což je

$$\left\| \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \right\| = \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{u}\|} .$$

Takže absolutní hodnota skalárního součinu $\langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle$ je rovná $\|\mathbf{u}\|$ -násobku vzdálenosti vektoru \mathbf{x} od nadroviny U .

V reálném případě si ještě uvědomíme, že $\langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle > 0$ právě tehdy, když \mathbf{u} a \mathbf{x} svírají úhel menší než $\pi/2$, takže $\langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \rangle$ udává $\|\mathbf{u}\|$ -násobek „orientované vzdálenosti“ od nadroviny U . Větu o reprezentaci tedy můžeme v reálném případě geometricky interpretovat tak, že každá lineární forma přiřazuje vektoru \mathbf{x} t -násobek jeho orientované vzdálenosti od nadroviny U (kde $t \in \mathbb{R}$ a U závisí na formě f).

8.6. Ortogonální zobrazení. Pojem ortogonální (unitární) matice byl motivován vlastnostmi příslušného zobrazení. Nyní definujeme pojem pro obecné prostory se skalárním součinem.

Definice 8.47. Nechť \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou reálné (resp. komplexní) vektorové prostory se skalárním součinem. Lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ nazýváme *ortogonální* (resp. *unitární*), pokud pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| .$$

Nejprve si všimneme, že unitární zobrazení je nutně prosté.

Pozorování 8.48. *Každé ortogonální (resp. unitární) zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je prosté (tj. monomorfismus).*

Důkaz. Je-li $\mathbf{x} \in \text{Ker } f$, pak $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$. Z unitarity vyplývá $0 = \|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ a tedy $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Proto $\text{Ker } f = \{\mathbf{o}\}$, takže f je prosté podle tvrzení 8.26. \square

Podobně jako pro matice, pojem ortogonálního (unitární) zobrazení má řadu ekvivalentních charakterizací.

Tvrzení 8.49. *Nechť \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou reálné (resp. komplexní) konečně generované vektorové prostory se skalárním součinem, B je ortonormální báze \mathbf{V} , C je ortonormální báze \mathbf{W} a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) f je ortogonální (resp. unitární), tj. pro každé $\mathbf{x} \in V$ platí $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$.
- (2) Pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $\langle f(\mathbf{x}) | f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$.
- (3) f zobrazuje každou ortonormální posloupnost ve \mathbf{V} na ortonormální posloupnost v \mathbf{W} .
- (4) f zobrazuje každou ortonormální bázi ve \mathbf{V} na ortonormální posloupnost v \mathbf{W} .
- (5) Posloupnost sloupcových vektorů matice $[f]_C^B$ je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n).
- (6) f zobrazuje nějakou ortonormální bázi ve \mathbf{V} na ortonormální posloupnost v \mathbf{W} .

Důkaz. Implikace (1) \Rightarrow (2) se dokáže z polarizačních identit, podobně jako implikace (2) \Rightarrow (1) v tvrzení 7.46 charakterizující ortogonální (unitární) matice.

(2) \Rightarrow (3). Je-li $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ortonormální posloupnost, pak $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Z předpokladu máme $\langle f(\mathbf{v}_i) | f(\mathbf{v}_j) \rangle = \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$, tedy posloupnost $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_k))$ je ortonormální v \mathbf{W} .

Implikace (3) \Rightarrow (4) je zřejmá.

(4) \Rightarrow (5). Označme $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Z předpokladu vyplývá, že $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ je ortonormální. Pak je podle tvrzení 7.21 (o výpočtu skalárního součinu z vyjádření vzhledem k ortonormální bázi) posloupnost $([f(\mathbf{v}_1)]_C, \dots, [f(\mathbf{v}_n)]_C)$ ortonormální v příslušném aritmetickém prostoru se standardním skalárním součinem. Tato posloupnost je rovná posloupnosti sloupcových vektorů matice $[f]_C^B$.

(5) \Rightarrow (6). Ukážeme, že lze použít bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Posloupnost sloupcových vektorů $[f]_C^B$ je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu, takže podle tvrzení 7.21 je posloupnost $(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ ortonormální.

(6) \Rightarrow (1). Nechť $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je ortonormální báze taková, že $C = (f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))$ je ortonormální. Vezmeme libovolně $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n \in U$. Pak podle tvrzení 7.21 je $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = \bar{a}_1 a_1 + \dots + \bar{a}_n a_n$. Z linearit f vyplývá $f(\mathbf{x}) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n f(\mathbf{v}_n)$. Protože C je ortonormální báze prostoru $\langle C \rangle$, z tvrzení 7.21 vyplývá, že $\|f(\mathbf{x})\|^2 = \bar{a}_1 a_1 + \dots + \bar{a}_n a_n$, a tedy $\|\mathbf{x}\| = \|f(\mathbf{x})\|$. \square

Tvrzení platí i bez předpokladu konečné generovanosti prostorů \mathbf{V}, \mathbf{W} . Jako cvičení dokažte ty implikace, které nevyžadují pojem báze pro nekonečně generované prostory.

Příklad 8.50. Otočení okolo počátku a osová symetrie určená přímkou procházející počátkem jsou ortogonální lineární operátory na \mathbb{R}^2 .

Otočení kolem osy procházející počátkem a reflexe podle roviny procházející počátkem jsou ortogonální operátory na \mathbb{R}^3 , rovněž tak jejich složení.

Později ukážeme, že jiné ortogonální operátory v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 neexistují.

Cvičení

1. “Být izomorfní” je ekvivalencí.
2. Dokažte pozorování 8.32.
3. ...charakterizace mono/epi/izo pro f_A ... (TODO)
4. Dokažte přímo implikaci (3) \Rightarrow (1) v tvrzení 8.49.

9. VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

V této kapitole pronikneme hlouběji do struktury lineárních operátorů, hlavně na konečně generovaných prostorech. Vyvinutá teorie nám umožní například počítat iterace daného operátoru f , tj. výrazy tvaru

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \times} .$$

V řeči matic, naučíme se počítat n -tou mocninu čtvercové matice A .

9.1. Diferenční a diferenciální rovnice. Začneme několika motivujícími příklady.

9.1.1. *Diferenční rovnice.*

Příklad 9.1. Fibonacciho posloupnost je definovaná vztahy

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{k+2} = a_{k+1} + a_k \text{ pro každé } k = 1, 2, \dots$$

V části 4.5.1 jsme nahlédli, že platí

$$\begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix}, \text{ kde } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a z toho odvodili

$$\begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = C^k \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = C^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

K určení k -tého členu nám tedy stačí umět vypočítat k -tou mocninu matice C .

Příklad 9.2. Pracovní úřad sleduje, kolik lidí v produktivním věku v oblasti s vysokou nezaměstnaností je

- (1) zaměstnaných,
- (2) krátkodobě (tj. méně než 6 měsíců) nezaměstnaných,
- (3) dlouhodobě (tj. aspoň 6 měsíců) nezaměstnaných.

Z dlouhodobých statistik vyplývá, že během měsíce jedna desetina zaměstnaných přijde o místo, dále že z krátkodobě nezaměstnaných během měsíce roku 30% zaměstnání najde, 40% jich zůstane krátkodobě nezaměstnaných, zatímco zbylých 30% jich přejde mezi dlouhodobě nezaměstnané. A z dlouhodobě nezaměstnaných jedna pětina práci najde a zbylých 80% zůstane nezaměstnaných.

V současné době je míra nezaměstnanosti 20%, z toho tři čtvrtiny jsou dlouhodobě nezaměstnaní a jedna čtvrtina přišla o práci v posledním půl roce, patří tedy mezi krátkodobě nezaměstnané. Chceme vědět, jak se bude nezaměstnanost dlouhodobě vyvíjet.

Rozložení nezaměstnanosti po k měsících zapíšeme jako vektor $\mathbf{p}_k = (p_{k1}, p_{k2}, p_{k3})^T$, kde p_{ki} udává podíl skupiny i na celkovém počtu. Počáteční rozložení nezaměstnanosti je tedy

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ p_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,05 \\ 0,15 \end{pmatrix} .$$

Nezaměstnanost \mathbf{p}_k po k -tém měsíci vyjádříme jako součin vhodné matice A s vektorem \mathbf{p}_{k-1} . První sloupcový vektor bude vyjadřovat, jak se na nezaměstnanosti

o měsíc později bude podílet skupina v současné době zaměstnaných, atd.

$$\mathbf{p}_k = A\mathbf{p}_{k-1} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{k-1} .$$

Z toho vidíme

$$\mathbf{p}_k = A\mathbf{p}_{k-1} = A(A\mathbf{p}_{k-2}) = A^2\mathbf{p}_{k-2} = \cdots = A^k\mathbf{p}_0 .$$

K výpočtu \mathbf{p}_k tedy potřebujeme znát k -tou mocninu matice A^k nebo alespoň hodnotu výrazu $A^k\mathbf{p}_0$ pro daný počáteční vektor.

V řeči lineárních zobrazení můžeme vztahy zapsat

$$\mathbf{p}_k = f_A(\mathbf{p}_{k-1}) = f_A^2(\mathbf{p}_{k-2}) = \cdots = f_A^k(\mathbf{p}_0) .$$

K výpočtu \mathbf{p}_k tedy potřebujeme znát k -tou mocnicu lineárního operátoru f_A (nebo aspoň jeho hodnotu na \mathbf{p}_0).

Rovnicím podobného typu říkáme diferenční rovnice nebo diskrétní lineární dynamické systémy. Tzn. je-li A matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} , pak rovnici

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$$

nazýváme *diferenční rovnice*. Obecněji, je-li f lineární operátor na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} , pak

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{v}_{k-1})$$

nazýváme diferenční rovnice.

Vektor \mathbf{x}_k může vyjadřovat stav nějakého systému po k krocích, po uplynutí k časových jednotek, apod. Je-li dán počáteční vektor $\mathbf{x}_0 \in T^m$ (resp. $\mathbf{x}_0 \in V$), pak řešením diferenční rovnice $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$ (resp. $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1})$) je vektor $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ (resp. $\mathbf{x}_k = f^k(\mathbf{x}_0)$). Kromě explicitního vzorce pro vektor \mathbf{x}_k nás může zajímat limitní chování pro $k \rightarrow \infty$, jak rychle se k případné limitě systém blíží, atd.

Nejjednodušší varianta je jednodimenzionální, kdy x_k jsou skaláry splňující $x_k = tx_{k-1}$. Příkladem je úročení půjčky, kdy např. každý měsíc nabíhá úrok 1%, takže výše půjčky po k měsících splňuje vztah $x_k = 1,01x_{k-1}$. Z počátečního stavu x_0 můžeme x_k vyjádřit vztahem $x_k = 1,01^k x_0$.

Nad reálnými čísly je limitní chování posloupnosti $(x_k)_{k=1}^{\infty} = (t^k x_0)_{k=1}^{\infty}$ vidět. Pokud $x_0 = 0$, pak jsou všechny členy nulové. Pokud $x_0 \neq 0$ máme následující možnosti.

- Je-li $|t| < 1$, pak $x_k \rightarrow 0$.
- Je-li $|t| > 1$, pak $|x_k| \rightarrow \infty$.
- Je-li $t = 1$, pak je posloupnost konstantní.
- Je-li $t = -1$, pak posloupnost nabývá střídavě hodnoty x_0 a $-x_0$.

Nad komplexními čísly je situace trochu zajímavější v případě $|t| = 1$. Posloupnost může být konstantní, nebo oscilovat mezi konečně mnoha hodnotami nebo můžou být její prvky po dvou různé. (Jako cvičení si rozmyslete kdy nastane jaká možnost.)

9.1.2. *Diferenciální rovnice*. Situace, kdy se stav systému mění spojitě, vedou často na diferenciální rovnice. Teorie vyvinutá v této kapitole se nám bude hodit i pro některé typy takových rovnic, i když na první pohled není vidět jak s vlastnostmi lineárních operátorů souvisí.

Příklad 9.3. Popíšeme model rozpadu jader atomů radioaktivního materiálu. Rychlost rozpadu (počet rozpadlých jader za sekundu) je přímo úměrná počtu jader, koeficient úměrnosti k závisí na konkrétním materiálu, nazývá se *rozpadová konstanta*. Označíme-li $f(t)$ počet jader v čase t , rychlost rozpadu je rovná $-f'(t)$ (znaménko je minus, protože jádra ubývají). Dostáváme rovnici

$$-f'(t) = kf(t), \text{ neboli } f'(t) = -kf(t) .$$

To je nejjednodušší případ diferenciální rovnice.

Příklad 9.4. Přes buněčnou blánu mezi dvěma buňkami přechází nějaká substance, např. vápník, alkohol, apod. Na počátku v čase $t = 0$ je do jedné buňky injektováno jednotkové množství substance. Víme, že rychlost šíření substance přes buněčnou blánu z jedné buňky do druhé je přímo úměrná množství substance v buňce, ze které se substance šíří, koeficient rychlosti šíření z buňky 1 do buňky 2 je $r > 0$, a z buňky 2 do buňky 1 je koeficient rovný $s > 0$. Máme určit množství substance v obou buňkách v čase t .

OBRAZEK

Označme si $u_1(t)$, resp. $u_2(t)$, množství substance v buňce 1, resp. 2, v čase t . Rychlost změny množství substance v buňce 1 je $su_2(t)$ (šíření z buňky 2) minus $ru_1(t)$ (šíření do buňky 2). Podobně pro druhou buňku. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -ru_1(t) + su_2(t) , \\ u_2'(t) &= ru_1(t) - su_2(t) . \end{aligned}$$

Označíme-li $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$ a $\mathbf{u}'(t) = (u_1'(t), u_2'(t))^T$, můžeme soustavu zapsat

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{pmatrix} -r & s \\ r & -s \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) .$$

Současně víme, že $\mathbf{u}(0) = (1, 0)^T$.

Je-li A matice řádu n nad tělesem \mathbb{R} (nebo \mathbb{C}) a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ (nebo \mathbb{C}^n), pak soustavu

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{b}$$

nazýváme *soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty s počáteční podmínkou* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}$. Také někdy budeme používat pojem *spojitý dynamický systém*.

9.2. Vlastní čísla a vlastní vektory. Pro některé počáteční vektory \mathbf{x}_0 lze diferenciální rovnici $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1})$ vyřešit snadno, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 9.5. Uvažujme operátor f_A na \mathbb{R}^2 určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Protože platí

$$f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

je také

$$f_A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_A \left(3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 3f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a podobně

$$f_A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(Formálně bychom vztah dokázali indukcí.)

Obecněji, diferenční rovnici $\mathbf{x}_k = f_A(\mathbf{x}_{k-1})$ umíme vyřešit pro jakýkoliv počáteční vektor $\mathbf{x}_0 \in \langle (1, 1)^T \rangle$: pro $\mathbf{x}_0 = s(1, 1)^T$ je $\mathbf{x}_k = 3^k s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Řešení příkladu pro počáteční vektor $\mathbf{x}_0 \in \langle (1, 1)^T \rangle$ nám umožnila skutečnost, že $f(\mathbf{x}_0)$ je násobkem vektoru \mathbf{x}_0 . To vede k definici vlastních čísel a vektorů.

Definice 9.6. Je-li $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} , pak skalár $\lambda \in T$ nazýváme *vlastní číslo* operátoru f , pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in V$, pro který platí

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} .$$

Je-li λ vlastní číslo operátoru f , pak libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$, pro který platí $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, nazýváme *vlastní vektor* operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ .

Vlastní čísla a vektory pro čtvercovou matici řádu n nad \mathbf{T} definujeme jako vlastní čísla a vektory příslušného operátoru $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$. Podobně tomu bude i pro další pojmy v této kapitole. Přeložíme si definici pro tento případ:

Definice 9.6*. Je-li A čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} , pak skalár $\lambda \in \mathbf{T}$ nazýváme *vlastní číslo* matice A , pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in T^n$ takový, že

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} .$$

Je-li λ vlastní číslo matice A , pak libovolný vektor $\mathbf{x} \in T^n$, pro který platí $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, nazýváme *vlastní vektor* matice A příslušný vlastnímu číslu λ .

Je důležité uvědomit si geometrický význam definice vlastního čísla operátoru. Číslo $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo operátoru f , pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in V$, který operátor f zobrazí na λ -násobek vektoru \mathbf{x} , tj. do směru vektoru \mathbf{x} . V případě prostoru nad reálnými čísly tak operátor f vektor \mathbf{x} buď „natahuje“ (pokud $|\lambda| > 1$) nebo „smršťuje“ (pokud $|\lambda| < 1$), případně „obrací“ (pokud $\lambda < 0$).

Příklad 9.7. Na obrázku 19 je nakresleno zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ určené maticí

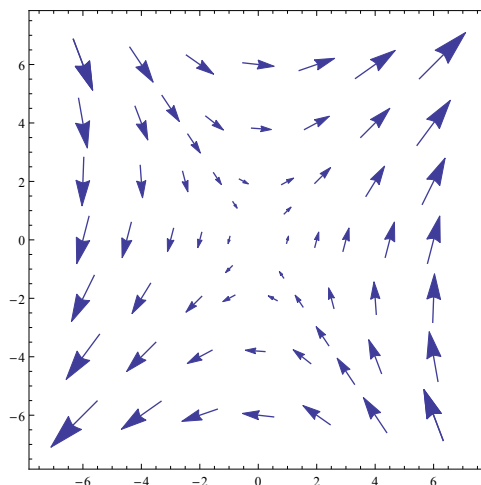
$$A = \begin{pmatrix} 1,035 & 0,09 \\ 0,135 & 0,99 \end{pmatrix}$$

tak, že pro některé body \mathbf{x} je zobrazena šipka z \mathbf{x} do $f_A(\mathbf{x})$.

f_A má dvě vlastní čísla 1,125 a 0,9. Vlastní vektory příslušné 1,125 jsou vektory z $\langle (1, 1)^T \rangle$, což na obrázku vidíme tak, že tyto vektory zobrazení f_A 1,125 \times natáhne. Vlastní vektory příslušné 0,9 jsou vektory z $\langle (-2, 3)^T \rangle$, tyto vektory zobrazení f_A 0,9 \times zkrátí.

Na obrázku je také pěkně kvalitativně vidět chování posloupnosti $(f^k(\mathbf{x}_0))_{k=1}^{\infty}$ pro různé počáteční vektory. Výsledek v příští části odůvodníme algebraicky.

Pro každé číslo $\lambda \in \mathbf{T}$ platí, že $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o} = \lambda \mathbf{o}$. To ale neznamená, že λ je vlastní číslo f . K tomu, aby λ bylo vlastní číslo f , je nutná existence **nenulového** prvku \mathbf{x} , pro který platí $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$. V takovém případě pak i nulový vektor je vlastním vektorem příslušným λ .



OBRÁZEK 19. Obrázek zobrazení f_A . Šipka vede z bodu \mathbf{x} do bodu $f_A(\mathbf{x})$.

Číslo 0 může být vlastním číslem operátoru f , k tomu je ale nutná (a stačí) existence vektoru $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, pro který platí $f(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{o}$, což nastává právě když $\text{Ker}(f) \neq \{\mathbf{o}\}$, neboli když operátor f není prostý (viz tvrzení 8.26). Zformulujeme učiněné pozorování.

Pozorování 9.8. Operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ má vlastní číslo 0 právě tehdy, když f není prostý.

Pro čtvercovou matici A je operátor f_A prostý právě tehdy, když je A regulární, takže maticová verze předchozího pozorování dává další kritérium regularity.

Pozorování 9.8*. Čtvercová matice A má vlastní číslo 0 právě tehdy, když A je singulární.

Příklad 9.9. Identické zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ má jediné vlastní číslo 1. Každý vektor z \mathbf{V} je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 1. Speciálně, identická matice řádu n nad \mathbf{T} má jediné vlastní číslo 1 a každý vektor z \mathbf{T}^n je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 1.

Nulové zobrazení $0 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ má jediné vlastní číslo 0. Každý vektor z \mathbf{V} je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 0. Speciálně, nulová matice řádu n nad \mathbf{T} má jediné vlastní číslo 0 a každý vektor z \mathbf{T}^n je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 0.

Příklad 9.10. V příkladu 9.5 jsem využili toho, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a lineární operátor f_A) má vlastní číslo 3 a každý vektor z $\langle (1, 1)^T \rangle$ je vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu 3.

Příklad 9.11. Osová symetrie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ určená přímkou generovanou nenulovým vektorem $(a, b)^T$ má jedno vlastní číslo 1, neboť všechny vektory na ose symetrie se zobrazí samy do sebe a jsou to tedy vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1. Vektory na přímce kolmé na osu symetrie (generované např. vektorem

$(-b, a)^T$) se zobrazují do vektorů opačných, jsou to tedy vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu -1 .

OBRÁZEK

Příklad 9.12. Ortogonální projekce $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ na přímku generovanou $(a, b)^T$ má také dvě vlastní čísla. Jedno je opět 1 , protože vektory přímky, na kterou projektujeme, se zobrazují na sebe. Druhé vlastní číslo je 0 , protože všechny vektory z přímky kolmé na přímku projekce se zobrazují do nulového vektoru.

OBRÁZEK

Příklad 9.13. Rotace kolem počátku souřadnic o úhel φ nemá žádné reálné vlastní číslo, pokud φ není násobkem π , neboť v takovém případě se žádný nenulový vektor nezobrazí na svůj násobek.

OBRÁZEK

Příklad 9.14. Stejnolehlost s koeficientem k , která zobrazuje každý vektor \mathbf{x} do jeho k -násobku $k\mathbf{x}$, má jediné vlastní číslo k , každý vektor \mathbb{R}^2 je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu k . Mezi stejnolehlosti řadíme i mezní případ $k = 0$ (konstantní zobrazení do nulového vektoru), $k = 1$, což je identické zobrazení, a také rotace o 0° , a $k = -1$ neboli středová symetrie (a také rotace o úhel 180°).

OBRÁZEK

V definici vlastních čísel a vektorů nepředpokládáme, že prostor \mathbf{V} má konečnou dimenzi. Důležitým „nekonečnědimenzionálním“ příkladem je operátor derivace:

Příklad 9.15. Označíme D lineární operátor definovaný předpisem $D(f) = f'$ na prostoru \mathbf{V} všech reálných funkcí reálné proměnné, které mají spojité derivace všech řádů.

Každé reálné číslo λ vlastním číslem operátoru D . Skutečně, funkce $e^{\lambda x}$ je nenulová, má derivace všech řádů, je definovaná na celém \mathbb{R} , a platí

$$D(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} .$$

Každá funkce $f(x) = Ce^{\lambda x}$ je vlastní vektor operátoru D příslušným vlastnímu číslu λ .

V řeči diferenciálních rovnic, každá funkce tvaru $f(x) = Ce^{\lambda x}$ je řešením diferenciální rovnice $f' = \lambda f$. Přidáme-li počáteční podmínku $f(0) = s$, dostaneme řešení $f(x) = se^{\lambda x}$. Ukážeme si, že jiná řešení neexistují (tj. také neexistují jiné vlastní vektory).

Nechť $g(x)$ je diferencovatelná reálná funkce, pro kterou platí $g' = \lambda g$ a $g(0) = s$. Spočítáme derivaci funkce $g(x)e^{-\lambda x}$. Platí

$$(g(x)e^{-\lambda x})' = g'(x)e^{-\lambda x} + g(x)(-\lambda)e^{-\lambda x} = \lambda g(x)e^{-\lambda x} - \lambda g(x)e^{-\lambda x} = 0.$$

Funkce $g(x)e^{-\lambda x}$ je tedy konstantní, a protože nabývá v bodě 0 hodnoty $g(0)e^0 = s$, platí $g(x)e^{-\lambda x} = s$, neboli $g(x) = se^{\lambda x}$.

Příklad 9.3 o rozpadu jader radioaktivní látky vedl na diferenciální rovnici $f'(t) = -kf(t)$. Nyní ji umíme vyřešit:

$$f(t) = f(0)e^{-kt} .$$

9.2.1. *Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů.* Na příkladech jste si mohli všimnout, že množina vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ vždy tvořila podprostor. To není náhoda.

K důkazu použijeme obrat, který se v této kapitole bude často používat. Uvažujme lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, vektor $\mathbf{x} \in V$ a skalár λ . Vztah $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ lze ekvivalentně upravit

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \lambda\mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) &= (\lambda \operatorname{id}_V)(\mathbf{x}) \\ f(\mathbf{x}) - (\lambda \operatorname{id}_V)(\mathbf{x}) &= 0 \\ (f - \lambda \operatorname{id}_V)(\mathbf{x}) &= 0 \\ \mathbf{x} &\in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V) \end{aligned}$$

Z toho vidíme

Tvrzení 9.16. *Nechť f je lineární operátor na prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} . Pak $\lambda \in T$ je vlastním číslem operátoru f právě tehdy, když operátor $(f - \lambda \operatorname{id}_V)$ není prostý.*

Je-li λ vlastním číslem operátoru f , pak množina M_λ všech vlastních vektorů operátoru f příslušných vlastnímu číslu λ je podprostorem \mathbf{V} a platí

$$M_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V) .$$

Důkaz. Podle předchozích úprav, $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ platí právě tehdy, když $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$, takže nenulový vektor \mathbf{x} splňující $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ existuje právě tehdy, když je $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$ netriviální, tedy (viz tvrzení 8.26) právě tehdy, když f není prostý.

Druhá část tvrzení pak plyne ze stejného výpočtu a z toho, že jádro je vždy podprostorem (viz 8.27). \square

Explicitně zformulujeme maticovou verzi. Odvození má v tomto případě podobu:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} &= \lambda I_n \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} - \lambda I_n \mathbf{x} &= 0 \\ (A - \lambda I_n)(\mathbf{x}) &= 0 \\ \mathbf{x} &\in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \end{aligned}$$

Tvrzení 9.16*. *Nechť A je čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} . Pak $\lambda \in T$ je vlastním číslem matice A právě tehdy, když je $A - \lambda I_n$ singulární.*

Je-li λ vlastním číslem matice f , pak množina M_λ všech vlastních vektorů matice A příslušných vlastnímu číslu λ je podprostorem \mathbf{T}^n a platí

$$M_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) .$$

Důkaz. Plyne opět z odvozené formulky, s tím, že $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ je netriviální právě tehdy, když $A - \lambda I_n$ je singulární (viz větu 4.30 charakterizující regulární matice). \square

K výpočtu vlastních čísel matice A si uvědomíme, že matice $A - \lambda I_n$ je singulární právě tehdy, když je její determinant nulový:

Pozorování 9.17*. *Nechť A je čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} . Pak $\lambda \in T$ je vlastním číslem matice A právě tehdy, když $\det(A - \lambda I_n) = 0$.*

Obecněji, k výpočtu vlastních čísel operátoru f na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} zvolíme bázi B prostoru \mathbf{V} . Pro každý skalár $\lambda \in T$ je vyjádření jádra operátoru $f - \lambda \text{id}_V$ vzhledem k B podle tvrzení 8.27 a 8.39 rovno

$$[\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)]_B = \text{Ker}[f - \lambda \text{id}_V]_B^B = \text{Ker}([f]_B^B - \lambda[\text{id}_V]_B^B) = \text{Ker}([f]_B^B - \lambda I_n) .$$

Dostáváme obecnější verzi pozorování.

Pozorování 9.17. *Nechť f je lineární operátor na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} dimenze n nad tělesem \mathbf{T} a B je báze \mathbf{V} . Pak $\lambda \in T$ je vlastním číslem operátoru f právě tehdy, když $\det([f]_B^B - \lambda I_n) = 0$.*

Příklad 9.18. Určíme vlastní čísla a vlastní vektory matice A (= operátoru f_A) z příkladu 9.5.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Vypočteme pro obecný skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ determinant

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 0 \cdot 1 = (3 - \lambda)(2 - \lambda) .$$

Podle pozorování 9.17 má matice A dvě vlastní čísla 2 a 3. Podle tvrzení 9.16* tvoří vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 2 podprostor

$$M_2 = \text{Ker}(A - 2I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 3 tvoří podprostor

$$M_3 = \text{Ker}(A - 3I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Příklad 9.19. Najdeme vlastní čísla a vektory ortogonální projekce v \mathbb{R}^2 na přímku určenou vektorem $(1, 2)^T$. Označme tento operátor f .

Jedna možnost je najít matici A operátoru f vzhledem ke kanonickým bázím. Pak $f = f_A$ a vlastní čísla a vektory f se vypočítají jako v předchozím příkladu (jako vlastní čísla a vektory matice A). Ukážeme nejprve tento, méně efektivní, postup. V příkladu 8.12 jsme odvodili, že f má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$A = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1, 2)}{\|(1, 2)^T\|^2} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Determinant matice $A - \lambda I_2$ je roven

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1/5 - \lambda & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda .$$

Matice A má tedy dvě vlastní čísla 1 a 0. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1 tvoří podprostor

$$M_1 = \text{Ker}(A - I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -4/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0 tvoří podprostor

$$M_0 = \text{Ker}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Výsledek je v souladu z geometrickým náhledem z příkladu 9.12

Početně jednodušší postup je pracovat s maticí vzhledem f vzhledem k jiné bázi. Protože zřejmě $f((1, 2)^T) = (1, 2)^T$ a $f((-2, 1)^T) = 0$ je matice f vzhledem k bázi $B = ((1, 2)^T, (-2, 1)^T)$ a B rovná

$$C = [f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinant matice $C - \lambda I_2$ je $(1 - \lambda)(-\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ a vlastní čísla jsou 0 a 1 podle pozorování 9.17. Podprostory M_1 a M_0 vypočítáme nejprve vzhledem k bázi B

$$[M_1]_B = [\text{Ker}(f - \text{id}_V)]_B = \text{Ker}([f]_B^B - I_n) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$[M_0]_B = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Převodem do kanonické báze dostaneme stejný výsledek jako prvním postupem.

$$M_1 = \left\langle 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$M_0 = \left\langle 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Příklad 9.20. Spočítáme vlastní čísla rotace v \mathbb{R}^2 o úhel $\pi/2$ v kladném směru. Matice této rotace vzhledem ke kanonické bázi se rovná

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

příslušný determinant je $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$. Vidíme, že matice A nemá žádné reálné vlastní číslo a tedy ani žádný vlastní vektor v \mathbb{R}^2 .

Považujeme-li matici A za matici nad komplexními čísly, má dvě vlastní čísla i a $-i$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu i jsou všechny komplexní násobky vektoru $(i, 1)^T$ a vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $-i$ jsou všechny komplexní násobky vektoru $(i, -1)^T$.

9.2.2. *Charakteristický polynom, podobnost.* Z definice determinantu vyplývá, že $\det(A - \lambda I_n)$ je polynom nejvýše n -tého stupně (kde n je řád matice A) v proměnné λ . Nazýváme jej charakteristický polynom matice A . Jeho kořeny jsou podle pozorování 9.17* vlastní čísla matice A .

Definice 9.23* Je-li A čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} , pak *charakteristický polynom matice A* je polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Tvrzení 9.25 ukazuje, že charakteristický polynom má stupeň právě n .

Například charakteristický polynom matice A z příkladů 9.5 a 9.18 je

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Charakteristický polynom lineárního operátoru f na konečně dimenzionálním prostoru \mathbf{V} definujeme jako charakteristický polynom matice $[f]_B^B$, kde B je nějaká báze prostoru \mathbf{V} . Musíme ovšem ověřit, že polynom nezávisí na volbě báze, jak jsme v konkrétní situaci viděli v příkladu 9.19.

Uvažujme tedy dvě různé báze B, C prostoru \mathbf{V} . Podle tvrzení 8.22 je

$$[f]_B^B = R^{-1}[f]_C^C R,$$

kde R je matice přechodu od B k C . Matice svázané takovým vztahem nazýváme podobné.

Definice 9.21. Dvě čtvercové matice X, Y téhož řádu nad tělesem \mathbf{T} se nazývají *podobné*, pokud existuje regulární matice R taková, že $Y = R^{-1}XR$.

Relace podobnosti matic je ekvivalence na množině všech čtvercových matic téhož řádu n nad tělesem \mathbf{T} , důkaz ponecháme jako cvičení. Podle diskuze nad definicí, matice $[f]_B^B$ a $[f]_C^C$ jsou podobné.

Tvrzení 9.22. *Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.*

Důkaz. Jsou-li X, Y dvě podobné matice téhož řádu nad tělesem \mathbf{T} , pak existuje regulární matice R taková, že $Y = R^{-1}XR$. Potom platí

$$\begin{aligned} \det(Y - \lambda I_n) &= \det(R^{-1}XR - \lambda I_n) = \det(R^{-1}XR - R^{-1}\lambda I_n R) \\ &= \det(R^{-1}(X - \lambda I_n)R) = \det(R)^{-1} \det(X - \lambda I_n) \det(R) \\ &= \det(X - \lambda I_n) \end{aligned}$$

podle věty o násobení determinantů a jejím důsledku pro determinant inverzní matice. \square

To opravňuje definici charakteristického polynomu lineární operátoru na konečně generovaném prostoru.

Definice 9.23. Je-li $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} dimenze n , pak *charakteristický polynom operátoru f* je polynom

$$p_f(\lambda) = \det([f]_B^B - \lambda I_n) ,$$

kde B je libovolná báze prostoru \mathbf{V} .

Charakteristický polynom operátoru (na konečně generovaném prostoru) je tedy roven charakteristickému polynomu matice $[f]_B^B$.

Příklad 9.24. V příkladu 9.12 jsme spočetli, že charakteristický polynom ortogonální projekce f na přímku $\langle (1, 2)^T \rangle$ je $p_f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$. Z druhého postupu nahlédněte, že stejně vyjde charakteristický polynom pro ortogonální projekci na libovolnou přímku, dokonce projekci na libovolnou přímku p ve směru přímky q , pokud $p \neq q$.

Následující tvrzení ukazuje, jak rychle spočítat aspoň nějaké koeficienty charakteristického polynomu.

Tvrzení 9.25. *Je-li $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ charakteristický polynom matice $A = (a_{ij})$ řádu n , pak platí*

- (1) *koeficient u λ^n se rovná $(-1)^n$,*
- (2) *koeficient u λ^{n-1} se rovná $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$, tj. rovná se součtu diagonálních prvků matice A vynásobenému koeficientem $(-1)^{n-1}$,*
- (3) *absolutní člen polynomu $p_A(\lambda)$ se rovná $\det(A)$.*

Důkaz. První dva body dokážeme společně. Označme $X = A - \lambda I_n$. Má-li se po roznásobení součinu $\text{sgn}(\pi)x_{\pi(1),1}x_{\pi(2),2} \dots x_{\pi(n),n}$ z definice determinantu vyskytnout mocnina λ^{n-1} nebo mocnina λ^n , musíme vybrat aspoň $n - 1$ prvků z hlavní

diagonály matice X , protože mimo hlavní diagonálu se λ nevyskytuje. To znamená, že permutace π musí být identická permutace se znaménkem 1. Po roznásobení

$$x_{11}x_{22} \cdots x_{nn} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$$

tak dostáváme

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + \cdots,$$

kde další členy obsahují nejvýše mocniny λ^{n-2} . Tím jsou dokázány body (1) a (2).

Absolutní člen, tj. koeficient u λ^0 , se rovná $p_A(0)$. Absolutní člen charakteristického polynomu se tak rovná $\det(X) = \det(A - 0I_n) = \det(A)$. \square

Příklad 9.26. Charakteristický polynom reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

je podle tvrzení roven

$$p_A(\lambda) = (-1)^2 \lambda^2 - (3 + 5)\lambda + (3 \cdot 5 - 7 \cdot 4) = \lambda^2 - 8\lambda - 13.$$

9.2.3. Kořeny polynomů, algebraická násobnost. K určení vlastních čísel potřebujeme najít kořeny charakteristického polynomu. Uvedeme několik pojmů a tvrzení (bez důkazů), které budeme o kořenech polynomů potřebovat. Podrobněji budete polynomy zkoumat v kurzu algebry.

Připomeňme, že polynom stupně n nad tělesem \mathbf{T} je výraz

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \text{ kde } a_0, \dots, a_n \in T, a_n \neq 0.$$

Kořenem takového polynomu je prvek $t \in T$, pro který $p(t) = 0$. Nulovému polynomu $p(x) = 0$ předchází definice nepřidělila stupeň, někdy se říká, že je stupně -1 , jindy se stupeň nedefinuje.

Nyní směřujeme k pojmu násobnosti kořene. Řekneme, že polynom $p(x)$ dělí polynom $s(x)$ (oba polynomy jsou nad tělesem \mathbf{T}), pokud existuje polynom $q(x)$ (nad \mathbf{T}) takový, že $p(x)q(x) = s(x)$. Například reálný polynom $x - 1$ dělí polynom $x^2 - 1$, protože $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$.

Tvrzení 9.27. *Nechť $p(x)$ je polynom nad \mathbf{T} . Prvek $t \in T$ je kořenem polynomu $p(x)$ právě tehdy, když polynom $x - t$ dělí polynom $p(x)$.*

Největší číslo l takové, že $(x - t)^l$ stále dělí polynom $p(x)$ nazýváme násobnost.

Definice 9.28. *Nechť $p(x)$ je polynom nad \mathbf{T} a $t \in T$ je jeho kořen. Násobnost kořene t polynomu $p(x)$ definujeme jako největší přirozené číslo l takové, že polynom $(x - t)^l$ dělí polynom $p(x)$.*

Tvrzení 9.29. *Nechť $p(x)$ je polynom nad \mathbf{T} , $t_1, \dots, t_k \in T$ po dvou různé a $l_1, \dots, l_k \in \mathbb{N}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ je t_i kořen násobnosti l_i .*
- (2) *$p(x) = (x - t_1)^{l_1} \cdots (x - t_k)^{l_k} q(x)$ pro nějaký polynom $q(x)$ takový, že ani jeden z prvků t_1, \dots, t_k není kořen.*

Implikaci (2) \rightarrow (1) můžeme použít k hledání násobnosti kořenů. Uhadneme nějaký kořen t polynomu $p(x)$ a polynom $p(x)$ vydělíme polynomem $x - t$. Dále pokračujeme stejným způsobem s výsledným polynomem. Proces ukončíme, když získáme polynom, který již žádný kořen nemá. Nakonec získáme rozklad jako v části (2) a tvrzení nám dá informace o násobnostech.

Příklad 9.30. Určíme kořeny a jejich násobnosti pro reálný polynom $p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 4$.

Uhádneme kořen $t = 1$ a vydělíme polynom $p(x)$ polynomem $x - 1$.

$$q(x) = (2x^3 - 8x^2 + 10x - 4) : (x - 1) = 2x^2 - 6x + 4 .$$

Hledat kořeny reálného polynomu druhé stupně umíme, kořeny $q(x)$ vyjdou kořeny 1 a 2. Polynom $q(x)$ lze proto zapsat

$$q(x) = 2(x - 1)(x - 2) .$$

Pro původní polynom máme

$$p(x) = (x - 1)q(x) = 2(x - 1)^2(x - 2) .$$

Tedy $p(x)$ má kořen 1 násobnosti 2 a kořen 2 násobnosti 1.

Příklad 9.31. Určíme kořeny a násobnosti kořenů reálného polynomu $p(x) = x^4 + x^2$.

Inhned vidíme, že x^2 dělí polynom $p(x)$. Máme

$$p(x) = x^2(x^2 + 1) ,$$

Polynom $x^2 + 1$ již žádný kořen nemá, tedy $p(x)$ má jediný kořen 0 násobnosti 2.

Chápeme-li ovšem $p(x)$ jako polynom nam komplexními čísly, pak $x^2 + 1$ má dva kořeny i a $-i$ a polynom $p(x)$ lze psát

$$p(x) = x^2(x + i)(x - i)$$

Nad komplexními čísly tedy máme kořen 0 násobnosti 2 a kořeny i a $-i$ násobnosti 1.

Příklad 9.32. Určíme kořeny polynomu $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x$ nad tělesem \mathbb{Z}_3 .

Vidíme, že $t = 0$ je kořen. Dosazením zjistíme, že $t = 1$ je kořenem a $t = 2$ kořenem není. K určení násobností vydělíme polynom $p(x)$ polynomem $x(x - 1) = x^2 - x = x^2 + 2x$.

$$(x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x) : (x^2 + 2x) = x^2 + 1 .$$

Takže

$$p(x) = x(x + 2)(x^2 + 1) .$$

Dosazením zjistíme, že $x^2 + 1$ žádné kořeny nemá, takže oba kořeny 0 i 1 mají násobnost 1.

Důsledkem implikace (1) \Rightarrow (2) v tvrzení 9.25 je, že polynom stupně $n \geq 0$ má nejvýše n kořenů, i když počítáme každé tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Tvrzení 9.33. *Polynom stupně n nad libovolným tělesem má nejvýše n kořenů včetně násobností.*

Obrat „včetně násobností“ budeme používat pro stručnost vyjadřování. Přesný význam je vysvětlený nad tvrzením, tj. pokud každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost, vyjde nejvýše n .

Ze základní věty algebry (věta 1.7) lze odvodit, že nad komplexními čísly je kořenů vždy maximální počet (opět musíme počítat i s násobnostmi).

Věta 9.34. Každý polynom stupně $n \geq 1$ nad tělesem \mathbb{C} lze napsat jako součin lineárních polynomů (tj. polynomů stupně 1).

Speciálně, každý polynom stupně $n \geq 0$ nad tělesem \mathbb{C} má právě n kořenů včetně násobností.

(Na okraj poznamenejme, že pro každé těleso lze rozšířit do tělesa, kde platí obdoba této věty.)

Ještě uvedeme jeden pozitivní výsledek pro polynomy nad reálnými čísly, tentokrát výjimečně i s náznakem důkazem.

Tvrzení 9.35. Polynom lichého stupně nad tělesem \mathbb{R} má alespoň jeden kořen.

Důkaz. Připomeňme, že je-li komplexní číslo z kořenem reálného polynomu $p(x)$, pak je jeho kořenem také číslo \bar{z} komplexně sdružené se z (viz tvrzení 1.5). Kořeny polynomu $p(x)$ tak můžeme uspořádat do dvojic komplexně sdružených kořenů. Protože ale všech kořenů (spolu s násobnostmi) je lichý počet, existuje aspoň jeden kořen z , pro který platí $z = \bar{z}$, tj. aspoň jeden reálný kořen.

Alternativně lze tvrzení dokázat analyticky, bez použití komplexních čísel. Je-li koeficient u x^n kladný, pak pro $x \rightarrow \infty$ je $p(x) \rightarrow \infty$ a pro $x \rightarrow -\infty$ je $p(x) \rightarrow -\infty$. Ze spojitosti funkce $p(x)$ pak vidíme, že nutně existuje číslo z , splňující $p(z) = 0$. (Je-li koeficient u x^n záporný, důkaz je obdobný.) \square

Nyní se vrátíme k vlastním číslům. Ty lze počítat jako kořeny charakteristického polynomu, jejich násobnosti jsou důležitou informací, proto si zaslouží samostatný pojem.

Definice 9.36. Nechť f je lineární operátor na konečně generovaném prostoru a λ je jeho vlastní číslo. *Algebraickou násobností* vlastního čísla λ rozumíme jeho násobnost jako kořene charakteristického polynomu operátoru f .

Definice 9.36*. Nechť A je čtvercová matice a λ je její vlastní číslo. *Algebraickou násobností* vlastního čísla λ rozumíme jeho násobnost jako kořene charakteristického polynomu matice A .

Příklad 9.37. Najdeme vlastní čísla a jejich algebraické násobnosti pro lineární operátor $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definovaný předpisem

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ -3x - 2y + 3z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix}.$$

Matice operátoru f vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = [f]_K^K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom operátoru f se rovná

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2 - \lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Operátor má tedy 2 různá vlastní čísla: vlastní číslo 1 algebraické násobnosti 2 a vlastní číslo -1 algebraické násobnosti 1. (Takže dohromady máme 3 vlastní čísla včetně násobností.)

Zformulujeme důsledky tvrzení 9.33, věty 9.34 a tvrzení 9.35 pro vlastní čísla operátorů.

Důsledek 9.38.

- Každý lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru dimenze n nad tělesem \mathbf{T} má nejvýše n vlastních čísel včetně násobností.
- Lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ má právě n vlastních čísel včetně násobností právě tehdy, když je jeho charakteristický polynom součinem lineárních polynomů.
- Každý lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru dimenze n nad tělesem \mathbb{C} má právě n vlastních čísel včetně násobností.
- Každý lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném vektorovém prostoru liché dimenze nad \mathbb{R} má aspoň jedno (reálné) vlastní číslo.

V řeči matic:

Důsledek 9.38*.

- Každá čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} má nejvýše n vlastních čísel včetně algebraických násobností.
- Čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} má právě n vlastních čísel včetně násobností právě tehdy, když je její charakteristický polynom součinem lineárních polynomů.
- Každá čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbb{C} má právě n vlastních čísel včetně algebraických násobností.
- Každá čtvercová matice lichého řádu nad tělesem \mathbb{R} má alespoň jedno reálné vlastní číslo.

9.3. Diagonalizovatelné operátory. Máme-li „dostatek“ vlastních vektorů operátoru f (resp. matice A), můžeme diferenční rovnici $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1})$ (resp. $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$) již zcela vyřešit. K ilustraci poslouží opět operátor z příkladů 9.5 a 9.18.

V kapitole budeme často používat matici operátoru vzhledem k bázi B a B , tj. matici $[f]_B^B$. Budeme ji proto jednoduše nazývat *matice f vzhledem k B* .

Důležitou roli také budou mít diagonální matice, zavedeme si pro ně speciální označení. Diagonální matici $D = (d_{ij})$ řádu n budeme zapisovat $\text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$. Diagonální matice umíme snadno umocnit.

$$\text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_n)^k = \text{diag}(t_1^k, t_2^k, \dots, t_n^k).$$

Příklad 9.39. Uvažujme operátor f_A na \mathbb{R}^2 určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

V příkladu 9.18 jsme vypočítali, že vlastní čísla tohoto operátoru jsou 2 a 3 a příslušné podprostory vlastních vektorů jsou

$$M_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad M_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Vektory $\mathbf{v}_1 = (0, 1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1)^T$ tvoří lineárně nezávislou posloupnost $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, tedy bázi prostoru \mathbb{R}^2 . (To, že posloupnost je lineárně nezávislá není náhoda, viz věta 9.44.)

Platí $f_A(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1$ a $f_A(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_2$. Z toho vidíme, že matice operátoru f_A vzhledem k bázi B je

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonální matice ale mocnit umíme! Pro libovolné přirozené k tedy umíme vypočítat matici operátoru $(f_A)^k$ vzhledem k B :

$$[(f_A)^k]_B^B = ([f_A]_B^B)^k = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme odpovědět na řadu otázek o operátoru f_A a matici A .

- **Řešení diferenční rovnice $\mathbf{x}_k = f_A(\mathbf{x}_{k-1})$ „v bázi B “.** Platí

$$[\mathbf{x}_k]_B = [(f_A)^k(\mathbf{x}_0)]_B = [(f_A)^k]_B^B [\mathbf{x}_0]_B = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} [\mathbf{x}_0]_B.$$

Jsou-li tedy souřadnice počátečního vektoru \mathbf{x}_0 v bázi B rovny

$$[\mathbf{x}_0]_B = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix},$$

pak souřadnice vektoru \mathbf{x}_k v bázi B jsou

$$[\mathbf{x}_k]_B = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r2^k \\ s3^k \end{pmatrix}.$$

- **Kvalitativní chování diferenční rovnice $\mathbf{x}_k = f_A(\mathbf{x}_{k-1})$.** Pokud $r \neq 0$ a $s \neq 0$, pak se pro $k \rightarrow \infty$ budou obě souřadnice vzhledem k B v absolutní hodnotě blížit nekonečnu. Přitom první složka bude pro velká k zanedbatelná vzhledem ke složce druhé.
- **Řešení diferenční rovnice $\mathbf{x}_k = f_A(\mathbf{x}_{k-1})$ v kanonické bázi.** Z matice $[(f_A)^k]_B^B$ můžeme určit matici $(f_A)^k$ vzhledem ke kanonickým bázím pomocí matic přechodu (opakujeme výpočet v tvrzení 8.22):

$$\begin{aligned} [(f_A)^k]_K^K &= [\text{id}]_K^B [(f_A)^k]_B^B [\text{id}]_B^K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 3^k - 2^k & 2^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z toho

$$\mathbf{x}_k = (f_A)^k(\mathbf{x}_0) = [(f_A)^k]_K^K \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 3^k - 2^k & 2^k \end{pmatrix} \mathbf{x}_0.$$

Tedy pokud $\mathbf{x}_0 = (a, b)^T$, pak

$$\mathbf{x}_k = (f_A)^k(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 3^k a \\ (3^k - 2^k)a + 2^k b \end{pmatrix}.$$

- **Výpočet k -té mocniny A^k matice A pro $k \geq 1$.** Protože $[(f_A)^k]_K^K = [f_{A^k}]_K^K = A^k$ máme z předchozího bodu

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 3^k - 2^k & 2^k \end{pmatrix}.$$

Příklad nás vede k definici diagonalizovatelného operátoru.

Definice 9.40. Lineární operátor $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} nazýváme *diagonalizovatelný*, pokud má vzhledem k nějaké bázi diagonální matici.

Tvrzení 9.41. *Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} a $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze prostoru \mathbf{V} . Pak $[f]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ platí právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je \mathbf{v}_i vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i .*

Důkaz. Vztah $[f]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ platí právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je i -tý sloupec matice $[f]_B^B$ roven i -tému sloupci matice $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, tj. $[f(\mathbf{v}_i)]_B = \lambda_i \mathbf{e}_i$ (podle definice matice lineárního zobrazení). To je ekvivalentní vztahu $f(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$ podle definice vyjádření vzhledem k bázi. Protože $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{o}$, vztah $f(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$ je ekvivalentní tomu, že \mathbf{v}_i je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i . \square

Důsledek 9.42. *Lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} je diagonalizovatelný právě tehdy, když existuje báze prostoru \mathbf{V} tvořená vlastními vektory operátoru f .*

Ekvivalentně můžeme diagonalizovatelnost charakterizovat pomocí podobnosti matice operátoru (vzhledem k libovolné bázi) s diagonální maticí.

Tvrzení 9.43. *Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} a C je báze prostoru \mathbf{V} . Pak operátor f je diagonalizovatelný právě tehdy, když je matice $[f]_C^C$ podobná diagonální matici.*

Důkaz. Je-li f diagonalizovatelný, pak existuje báze B prostoru \mathbf{V} taková, že $[f]_B^B$ je diagonální. Matice $[f]_C^C$ a $[f]_B^B$ jsou podobné (viz tvrzení 8.22).

Naopak, je-li $[f]_C^C$ podobná diagonální matici D , pak existuje regulární matice R taková, že $D = R^{-1}[f]_C^C R$. Zvolíme bázi B prostoru \mathbf{V} tak, aby $[\text{id}]_B^B = R$, tj. $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ a vektory \mathbf{v}_i jsou zvoleny tak, že $[\mathbf{v}_i]_C$ je rovno i -tému sloupci matice R . Pak (opět podle tvrzení 8.22) je $[f]_B^B = R^{-1}[f]_C^C R = D$. \square

Přeformulujeme si definice a tvrzení pro matice.

Definice 9.40* Čtvercová matice A řádu n nad tělesem \mathbf{T} se nazývá *diagonalizovatelná* právě tehdy, když je operátor $f_A : \mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$ diagonalizovatelný.

Pro formulaci tvrzení 9.41 si opět všimneme, že pro čtvercovou matici A řádu n nad \mathbf{T} a bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{T}^n platí

$$[f_A]_B^B = R^{-1}[f_A]_K^K R = R^{-1}AR, \quad \text{kde } R = [\text{id}]_K^K = (\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_n).$$

Tvrzení 9.41* Nechť A čtvercová matice řádu n nad tělesem \mathbf{T} , $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze prostoru \mathbf{T}^n a $R = [\text{id}]_K^K = (\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_n)$. Pak matice $[f_A]_B^B = R^{-1}AR$ je rovná $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je \mathbf{v}_i vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i .

Důsledek 9.42* Čtvercová matice A řádu n nad tělesem \mathbf{T} je diagonalizovatelná právě tehdy, když existuje báze prostoru \mathbf{T}^n tvořená vlastními vektory matice A .

V situaci, kdy $[f]_B^B = R^{-1}AR = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ umíme matici A umocnit jako v příkladu 9.39:

$$A^k = [(f_A)_K^K]^k = [\text{id}]_K^K [(f_A)_B^B]^k [\text{id}]_B^B = R ([f_A]_B^B)^k R^{-1} = R \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) R^{-1}.$$

Tento vztah můžeme nahlédnout také algebraicky: Označíme $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a vztah $R^{-1}AR = D$ přepíšeme na $A = RDR^{-1}$. Pak

$$A^k = \underbrace{(RDR^{-1})(RDR^{-1}) \dots (RDR^{-1})}_{k \times} = R \underbrace{DD \dots D}_{k \times} R^{-1} = RD^k R^{-1} = R \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) R^{-1}.$$

Použitím tvrzení 9.43 na kanonickou bázi dostaneme následující verzi.

Tvrzení 9.43*. Čtvercová matice A řádu n nad tělesem \mathbf{T} je diagonalizovatelná právě tehdy, když je podobná diagonální matici.

9.3.1. *Lineární nezávislost vlastních vektorů.* Chceme nalézt nutné a postačující podmínky pro to, aby byl lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} diagonalizovatelný. Základem je následující věta, která platí obecně i bez předpokladu, že prostor \mathbf{V} má konečnou dimenzi.

Věta 9.44. *Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ je posloupnost nenulových vlastních vektorů operátoru f příslušných navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Potom je posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ lineárně nezávislá.*

Důkaz. Použijeme indukci podle k . Je-li $k = 1$, tvrzení platí, protože $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{o}$. Předpokládejme, že $k > 1$ a tvrzení platí pro $k - 1$, tzn. posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1})$ je lineárně nezávislá. Uvažujme skaláry $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{T}$ takové, že platí

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + a_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o} .$$

Aplikujeme na obě strany operátor $(f - \lambda_k \text{id})$ a upravíme. V prvních dvou úpravách používáme linearitu operátoru $(f - \lambda_k \text{id})$, v další úpravě použijeme výpočet $(f - \lambda_k \text{id})(\mathbf{v}_i) = f(\mathbf{v}_i) - (\lambda_k \text{id})(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i - \lambda_k \mathbf{v}_i = (\lambda_i - \lambda_k) \mathbf{v}_i$.

$$\begin{aligned} (f - \lambda_k \text{id})(a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + a_k \mathbf{v}_k) &= (f - \lambda_k \text{id})(\mathbf{o}) \\ (f - \lambda_k \text{id})(a_1 \mathbf{v}_1) + \dots + (f - \lambda_k \text{id})(a_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}) + (f - \lambda_k \text{id})(a_k \mathbf{v}_k) &= \mathbf{o} \\ a_1 (f - \lambda_k \text{id})(\mathbf{v}_1) + \dots + a_{k-1} (f - \lambda_k \text{id})(\mathbf{v}_{k-1}) + a_k (f - \lambda_k \text{id})(\mathbf{v}_k) &= \mathbf{o} \\ a_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{v}_1 + \dots + a_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{v}_{k-1} &= \mathbf{o} \end{aligned}$$

Posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1})$ je lineárně nezávislá podle indukčního předpokladu. Odtud plyne

$$a_1 (\lambda_1 - \lambda_k) = a_2 (\lambda_2 - \lambda_k) = \dots = a_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0 .$$

Protože vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$ jsou navzájem různá, vyplývá odtud, že $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$. Z rovnosti

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + a_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o}$$

pak plyne rovněž $a_k = 0$, protože $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{o}$. Tím je dokázáno, že posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá. \square

Důsledek 9.45. *Má-li lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n nad tělesem \mathbf{T} n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelný.*

Důkaz. Má-li operátor f celkem n navzájem různých vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, existuje pro každé $i = 1, \dots, n$ nenulový vlastní vektor \mathbf{v}_i příslušný λ_i . Podle předchozí věty je posloupnost vlastních vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ lineárně nezávislá a tedy je to báze prostoru \mathbf{V} . Operátor f má tak bázi složenou z vlastních vektorů operátoru f , je proto diagonalizovatelný podle důsledku 9.42. \square

Důsledek 9.45*. *Má-li matice A řádu n nad tělesem \mathbf{T} celkem n navzájem různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.*

Operátor v příkladu 9.39 a operátory v motivačních příkladech o Fibonacciho posloupnosti a nezaměstnanosti splňují podmínku důsledku 9.45.

Příklad 9.46. Dořešíme příklad 9.1. Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matice C . Charakteristický polynom matice C je (podle tvrzení 9.25 o koeficientech charakteristického polynomu) roven

$$p_C(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Vlastní čísla matice C , neboli kořeny rovnice $p_C(\lambda) = 0$, jsou

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \lambda_1 .$$

Všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_1 jsou právě všechna řešení homogenní soustavy s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & 0 - \lambda_1 \end{pmatrix} ,$$

což jsou všechny vektory v $M_{\lambda_1} = \langle (1/2 + \sqrt{5}/2, 1)^T \rangle = \langle (\lambda_1, 1)^T \rangle$. Podobně jsou všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ právě vektory z lineárního obalu vektoru $(\lambda_2, 1)^T$.

Posloupnost

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

je (i podle věty 9.44) lineárně nezávislá, takže je bází \mathbb{R}^2 , a platí

$$[f_C]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \quad [(f_C)^k]_B^B = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k) .$$

Chceme znát $C^k(a_1, a_2)^T = (f_C)^k(a_1, a_2)^T$. Teď máme více možností, jak výpočet dokončit. Můžeme přejít ke kanonické bázi (tj. spočítat $[(f_C)^k]_K^K = C^k$), nebo pracovat přímo v bázi B . Zvolíme druhý přístup.

Vyjádříme vektor $(a_1, a_2)^T = (1, 1)^T$ vzhledem k bázi B . Vyjde

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} .$$

Odtud dostáváme pro každé celé číslo $k \geq 0$

$$\left[\begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} \right]_B = [(f_C)^k]_B^B \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} \\ -\lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}$$

Z toho

$$\begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^{k+1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_2^{k+1} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+2} - \lambda_2^{k+2} \\ \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}$$

Srovnáním druhých složek a snížením indexu dostáváme

$$a_k = \frac{\lambda_1^k}{\sqrt{5}} - \frac{\lambda_2^k}{\sqrt{5}}$$

pro každé $k > 1$ (přičemž si můžeme všimnout, že vzorec platí i pro $k = 1$).

Všimněte si, že $|\lambda_2^k| < 1$, druhý sčítanec se proto pro $k \rightarrow \infty$ blíží 0, takže

$$a_k \approx \lambda_1^k / \sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k .$$

Příklad 9.47. Vrátime se nyní k příkladu 9.2 o vývoji nezaměstnanosti. Spočítáme vlastní čísla a vektory přechodové matice

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} .$$

Její charakteristický polynom se rovná

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= (0,9 - \lambda)(0,4 - \lambda)(0,8 - \lambda) + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,3 - 0,3 \cdot 0,1 \cdot (0,8 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2,1\lambda^2 - 1,37\lambda + 0,27 . \end{aligned}$$

Charakteristický polynom má kořen 1, takže si jej můžeme rozložit na součin

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1,1\lambda + 0,27) .$$

Vedle vlastního čísla $\lambda_1 = 1$ má matice A ještě další dvě vlastní čísla

$$\lambda_2 = \frac{1,1 + \sqrt{0,13}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1,1 - \sqrt{0,13}}{2} .$$

Máme tři různá vlastní čísla $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, matice A je tedy diagonalizovatelná. Najdeme příslušné vlastní vektory.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ tvoří jádro matice

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I_3 &= \begin{pmatrix} 0,9 - 1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 - 1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,3 & -0,2 \end{pmatrix} \sim \\ &= \begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & -0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & -0,2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & -0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

které se rovná $\langle (4, 2/3, 1)^T \rangle$. Označme $\mathbf{v}_1 = (4, 2/3, 1)^T$.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_2 leží v jádru matice

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 I_3 &= \begin{pmatrix} 0,9 - \lambda_2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 - \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9 - \frac{1,1 + \sqrt{0,13}}{2} & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 - \frac{1,1 + \sqrt{0,13}}{2} & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 - \frac{1,1 + \sqrt{0,13}}{2} \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

které se rovná lineárnímu obalu vektoru

$$\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13}, -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13}, 1 \right)^T .$$

Jeden z vlastních vektorů příslušných třetímu vlastnímu číslu λ_3 se rovná

$$\mathbf{v}_3 = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13}, -\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13}, 1 \right)^T .$$

Posloupnost $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je posloupnost nenulových vlastních vektorů příslušných navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3$ a tvoří tedy bázi prostoru \mathbb{R}^3 .

Vyjádření počáteční rozložení nezaměstnanosti $\mathbf{p}_0 = (0,8, 0,05, 0,15)^T$ v bázi B je $[\mathbf{p}_0]_B = (a_1, a_2, a_3)^T$. Konkrétní přibližná hodnota koeficientů je $a_1 = 0,1181, a_2 = -0,0891, a_3 = -0,0619$, pro dlouhodobý odhad vývoje nezaměstnanosti ale není až tak důležitá.

Rozložení nezaměstnanosti po k měsících bude

$$[\mathbf{p}_k]_B = [(f_A)^k]_B^B [\mathbf{p}_0] = (\lambda_1^k a_1, \lambda_2^k a_2, \lambda_3^k a_3)^T = (a_1, \lambda_2^k a_2, \lambda_3^k a_3)^T .$$

Protože $0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1$, druhý a třetí člen posledního součtu konverguje k 0 pro $k \rightarrow \infty$. Proto $[\mathbf{p}_k]_B$ se pro $k \rightarrow \infty$ blíží k $(a_1, 0, 0)^T$ a

$$\mathbf{p}_k \rightarrow a_1 \mathbf{v}_1 = a_1 (4, 2/3, 1)^T \text{ pro } k \rightarrow \infty$$

Koeficient a_1 nemění poměr mezi souřadnicemi vektoru $(4, 2/3, 1)^T$, poměr mezi zaměstnanými, krátkodobě nezaměstnanými a dlouhodobě nezaměstnanými bude tedy směřovat k $4:(2/3):1$, tj. k $12:2:3$. V dlouhodobém horizontu by se bez vnějšího zásahu rozložení nezaměstnanosti stabilizovalo na přibližně 70,6% zaměstnaných a 29,4% nezaměstnaných, z nichž dvě pětiny by tvořili krátkodobě nezaměstnaní a tři pětiny dlouhodobě nezaměstnaní.

9.3.2. Geometrická násobnost, charakterizace diagonalizovatelných operátorů. Chceme-li operátor f na konečně prostoru dimenze n diagonalizovat, musíme najít n -členou lineárně nezávislou posloupnost B složenou z vlastních vektorů. Každý z vektorů v B musí pro nějaké vlastní číslo λ ležet v podprostoru \mathbf{M}_λ . Z něj může báze B obsahovat nanejvýš $\dim(\mathbf{M}_\lambda)$ vektorů. Této dimenzi říkáme geometrická násobnost vlastního čísla λ .

Definice 9.48. Geometrickou násobností vlastního čísla λ operátoru f na konečně generovaném prostoru (nebo čtvercové matice A) rozumíme dimenzi podprostoru \mathbf{M}_λ vlastních vektorů operátoru f (nebo matice A) příslušných vlastnímu číslu λ .

Geometrická násobnost vlastního čísla je alespoň 1 a je menší nebo rovná jeho algebraické násobnosti:

Tvrzení 9.49. Pro každé vlastní číslo λ lineárního operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} (čtvercové matice A) nad tělesem \mathbf{T} platí, že geometrická násobnost λ je menší nebo rovná algebraické násobnosti λ .

Důkaz. Buď k geometrická násobnost vlastního čísla λ operátoru f . Zvolme nějakou bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ podprostoru \mathbf{M}_λ vlastních vektorů příslušných λ a doplníme ji vektory $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ na bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ celého prostoru \mathbf{V} .

Protože pro každé $i = 1, \dots, k$ platí $[f(\mathbf{v}_i)]_B = [\lambda \mathbf{v}_i]_B = \lambda \mathbf{e}_i$, matice $[f]_B^B$ má blokový tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda I_k & E \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

a charakteristický polynom operátoru f se tedy rovná determinantu matice

$$p_f(t) = [f]_B^B - tI_n = \begin{pmatrix} \lambda - tI_k & E \\ 0 & F - tI_{n-k} \end{pmatrix} .$$

Determinant blokově diagonální matice se rovná součinu determinantů diagonálních bloků (viz tvrzení...DOPLNIT). Proto $p_f(t) = \det((\lambda - t)I_k) \det(F - tI_{n-k}) = (\lambda - t)^k \det(F - tI_{n-k})$. Číslo λ je tedy aspoň k -násobným kořenem charakteristického polynomu operátoru f , jeho algebraická násobnost je tudíž aspoň k . \square

Příkladem, kdy nastane rovnost, je matice I_2 , která má jediné vlastní číslo 1, které má geometrickou i algebraickou násobnost 2. Dále samozřejmě rovnost platí pro každé vlastní číslo algebraické násobnosti 1. V jistém smyslu typický případ, kdy je nerovnost ostrá ukazuje následující příklad.

Příklad 9.50. Reálná, nebo komplexní matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $\det A - \lambda I_2 = (\lambda - 3)^2$ a tedy jediné vlastní číslo 3 algebraické násobnosti 2. Příslušný podprostor vlastních vektorů je

$$M_3 = \text{Ker}(A - 3I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

geometrická násobnost vlastního čísla 3 je 1.

Tato matice není diagonalizovatelná, protože z M_3 zřejmě nelze vybrat dvoučlelou lineárně nezávislou posloupnost.

Nediagonalizovatelnost operátoru nebo matice může mít dvě příčiny: nedostatek vlastních čísel (jako rotace o $\pi/2$ v příkladu 9.20) nebo nedostatek vlastních vektorů, jako v předchozím příkladu. Tím se dostáváme se k charakterizaci diagonalizovatelných operátorů.

Věta 9.51. *Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n (resp. buď A je čtvercová matice řádu n) nad tělesem \mathbf{T} . Pak jsou následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Operátor f je diagonalizovatelný (resp. matice A je diagonalizovatelná).*
- (2) *Operátor f (resp. matice A) má*
 - *n vlastních čísel včetně algebraických násobností a*
 - *geometrická násobnost každého vlastního čísla operátoru f (resp. matice A) je rovná jeho algebraické násobnosti.*

Důkaz. (1) \Rightarrow (2). Předpokládejme, že je f diagonalizovatelný. Existuje tedy báze $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} složená z vlastních vektorů operátoru f . Označme $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru \mathbf{V} , l_1, \dots, l_k jejich algebraické násobnosti a m_1, \dots, m_k jejich geometrické násobnosti. Každý z vektorů v B leží v jednom z podprostorů $\mathbf{M}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{M}_{\lambda_k}$, přičemž z každého podprostoru \mathbf{M}_{λ_i} může v bázi B ležet nejvýše $\dim(\mathbf{M}_{\lambda_i}) = m_i$ vektorů (protože takové vektory tvoří lineárně nezávislou posloupnost v \mathbf{M}_{λ_i}). Z toho vyplývá nerovnost $n \leq m_1 + \dots + m_k$. Podle tvrzení 9.49 je geometrická násobnost menší nebo rovná geometrické násobnosti, tedy $m_i \leq l_i$ (pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$). Součet algebraických násobností je přitom nejvýše n (viz první bod důsledku 9.38). Dohromady máme

$$n \leq m_1 + \dots + m_k \leq l_1 + \dots + l_k \leq n \text{ a } m_1 \leq l_1, \dots, m_k \leq l_k .$$

To znamená, že $l_1 + \dots + l_k = n$ a $l_i = m_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$, jak jsme chtěli dokázat.

(2) \Rightarrow (1). Předpokládejme naopak, že podmínky na násobnosti jsou splněny. Označme $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vlastní čísla operátoru a l_1, \dots, l_k jejich algebraické (= geometrické) násobnosti. Pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ má \mathbf{M}_{λ_i} dimenzi l_i , vezmeme jeho libovolnou bázi

$$B_i = (\mathbf{v}_1^i, \mathbf{v}_2^i, \dots, \mathbf{v}_{l_i}^i)$$

Ukážeme, že posloupnost $B = (\mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_{l_k}^k)$ všech těchto vektorů tvoří bázi prostoru \mathbf{V} .

Počet prvků této posloupnosti je $l_1 + \dots + l_k = n = \dim \mathbf{V}$, stačí proto ukázat, že B je lineárně nezávislá. Zvolme tedy nějaké skaláry a_j^i pro každé $i = 1, \dots, k$ a každé $j = 1, \dots, l_i$ a předpokládejme, že

$$a_1^1 \mathbf{v}_1^1 + a_2^1 \mathbf{v}_2^1 + \dots + a_{l_1}^1 \mathbf{v}_{l_1}^1 + \dots + a_1^k \mathbf{v}_1^k + a_2^k \mathbf{v}_2^k + \dots + a_{l_k}^k \mathbf{v}_{l_k}^k = \mathbf{o}.$$

Pro každé $i = 1, \dots, k$ je vektor

$$\mathbf{w}_i = a_1^i \mathbf{v}_1^i + a_2^i \mathbf{v}_2^i + \dots + a_{l_i}^i \mathbf{v}_{l_i}^i$$

vlastní vektor operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ_i . Dále platí

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \dots + \mathbf{w}_k = \mathbf{o}.$$

Pokud by některý z vektorů \mathbf{w}_i byl nenulový, plynula by z poslední rovnosti lineární závislost posloupnosti nenulových členů. To není možné podle věty 9.44 o lineární nezávislosti vlastních vektorů příslušných různým vlastním číslům. Pro každé $i = 1, \dots, k$ tedy platí $\mathbf{w}_i = \mathbf{o}$, čili

$$\mathbf{o} = a_1^i \mathbf{v}_1^i + a_2^i \mathbf{v}_2^i + \dots + a_{l_i}^i \mathbf{v}_{l_i}^i$$

Posloupnost vektorů $B_i = (\mathbf{v}_1^i, \dots, \mathbf{v}_{l_i}^i)$ je ale lineárně nezávislá, neboť tvoří bázi \mathbf{M}_{λ_i} . Dostáváme tak, že $a_1^i = a_2^i = \dots = a_{l_i}^i = 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$. Posloupnost B je tedy lineárně nezávislá a tvoří proto bázi prostoru \mathbf{V} složenou z vlastních vektorů operátoru f . □

Z důkazu vidíme, že v případě diagonalizovatelných operátorů bude v nalezené bázi B počet vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ roven algebraické (=geometrické) násobnosti λ . Proto $[f]_B^B$ bude mít na diagonále každé vlastní číslo tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost.

Příklad 9.52. V příkladu 9.37 jsme spočítali vlastní čísla a jejich algebraické násobnosti pro operátor $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definovaný předpisem

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ -3x - 2y + 3z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix}.$$

Zjistíme, zda je diagonalizovatelný a najdeme příslušnou bázi z vlastních vektorů.

Operátor f je roven f_A pro matici

$$A = [f]_K^K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom operátoru f vyšel $-(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$, takže operátor f má vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ algebraické násobnosti 1 a vlastní číslo $\lambda_2 = -1$ algebraické násobnosti 2. Splňuje tedy první podmínku pro diagonalizovatelnost. Zbývá ověřit rovnost algebraické a geometrické násobnosti obou vlastních čísel $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$.

Algebraická násobnost vlastního čísla $\lambda_1 = 1$ je 2. Jeho geometrická násobnost se rovná dimenzi jádra matice

$$A - \lambda_1 I_3 = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice se rovná 1, dimenze jádra je proto 2. Geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda_1 = 1$ je rovná jeho algebraické násobnosti.

Algebraická násobnost vlastního čísla $\lambda_2 = -1$ je 1 a rovná se tak jeho geometrické násobnosti, protože ta je aspoň 1 pro jakékoliv vlastní číslo. Operátor f je tedy diagonalizovatelný.

Najdeme ještě bázi \mathbb{R}^3 , vzhledem ke které je matice f diagonální.

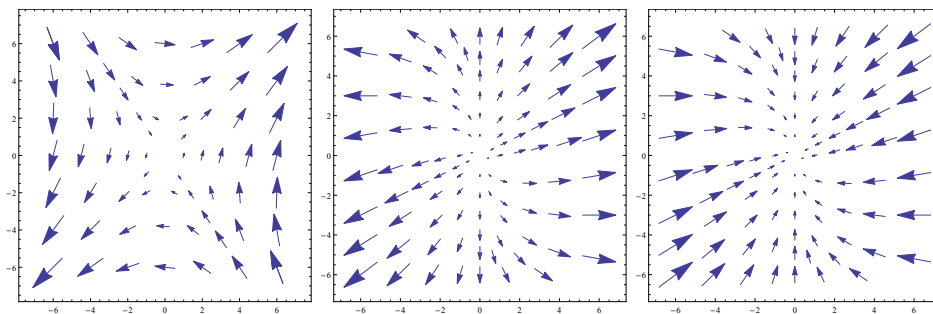
Bázi jádra matice $A - \lambda_1$, které má dimenzi 2, můžeme zvolit například $(1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T$. Bázi jádra matice

$$A - \lambda_2 I_3 = A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

můžeme zvolit například $(1, 3, 2)^T$. Posloupnost $B = ((1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 3, 2)^T)$ tak tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^3 tvořenou vlastními vektory operátoru f a platí $[f]_B^B = \text{diag}(1, 1, -1)$.

9.3.3. Lineární operátory na reálném vektorovém prostoru dimenze 2. Probereme možnosti, které mohou nastat pro lineární operátor f na vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze 2 nad \mathbb{R} .

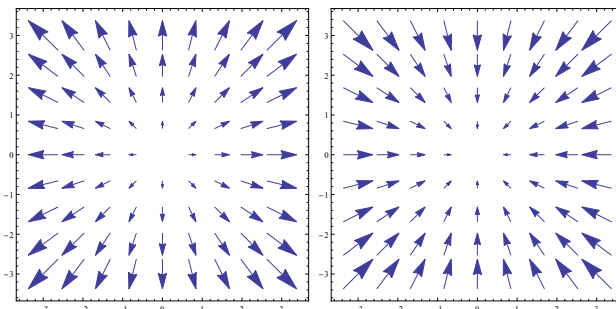
- (1) Operátor f má dvě různá vlastní čísla λ_1, λ_2 . Pak je diagonalizovatelný. Pro představu o chování diferenční rovnice $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1})$ se podívejte na obrázek 20. Jako v příkladu 9.7, šipky vedou z bodu \mathbf{x} do bodu $f(\mathbf{x})$.



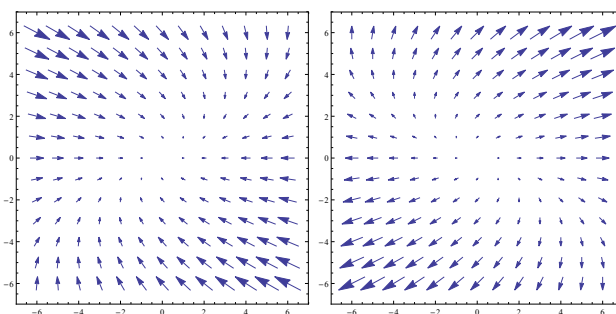
OBRÁZEK 20. Dvě různá vlastní čísla. Vlevo $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$, veprostřed $\lambda_1, \lambda_2 > 1$, vpravo $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$

- (2) Operátor f má jedno vlastní číslo algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 2. Pak je diagonalizovatelný, dokonce M_λ je rovno \mathbf{V} , tj. $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ pro každé \mathbf{x} . Situace je znázorněna na obrázku 21.
- (3) Operátor f má jedno vlastní číslo algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 1. Pak není diagonalizovatelný. Takovými operátory se budeme zabývat v části o Jordanovu tvaru. Ilustrace je na obrázku 22
- (4) Operátor f nemá vlastní čísla. Pak není diagonalizovatelný. V tomto případě si ale můžeme pomoci komplexními čísly, protože charakteristický polynom má dva různá, komplexně sdružená kořeny. Situace je ilustrována na obrázku 23.

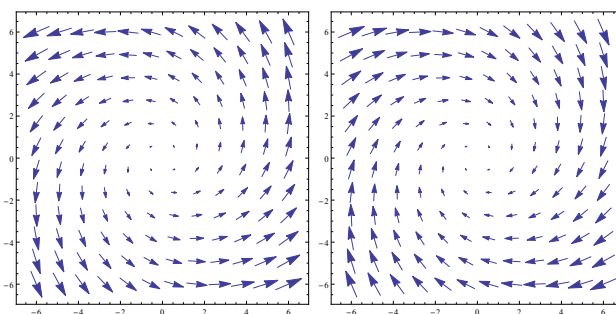
9.3.4. Operátory na prostorech nad \mathbb{R} , které jsou „diagonalizovatelné nad \mathbb{C} “. Rozebereme situaci, kdy reálná matice A řádu n není diagonalizovatelná, ale stejná



OBRÁZEK 21. Jedno vlastní číslo algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 2. Vlevo $\lambda > 1$, vpravo $1 > \lambda > 0$.



OBRÁZEK 22. Jedno vlastní číslo algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 1. Vlevo $\lambda > 1$, vpravo $1 > \lambda > 0$.



OBRÁZEK 23. Dvě komplexně sdružená vlastní čísla. Vlevo $|\lambda| > 1$, vpravo $1 > |\lambda|$.

matice, chápaná jako matice nad \mathbb{C} , již diagonalizovatelná je. (Diskuzi budeme provádět pouze pro matice, nebo operátory f_A , abychom nemuseli rozebírat pojem komplexního rozšíření vektorového prostoru a operátoru.)

Nejprve na konkrétním příkladu ukážeme přímočarý, ale neefektivní, postup pro mocnění.

Příklad 9.53. Najdeme vzorec pro k -tou mocninu reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom matice A je

$$p_A(t) = t^2 - 2t + 2 .$$

Tento polynom nemá reálné kořeny. Budeme proto považovat A za matici nad \mathbb{C} . Nyní má $p_A(t)$ dva komplexně sdružené kořeny $\lambda = 1 + i$, $\bar{\lambda} = 1 - i$, matice je tedy nad \mathbb{C} diagonalizovatelná.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ tvoří podprostor

$$M_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

V případě reálné matice A platí, že \mathbf{v} je vlastní vektor matice A příslušný komplexnímu λ právě tehdy, když je $\bar{\mathbf{v}}$ vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$ (viz další diskuze). Proto bez počítání víme, že

$$M_{\bar{\lambda}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Bázi z vlastních vektorů zvolíme například

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right) .$$

Pak

$$A^k = [(f_A)^k]_K^K = [\text{id}]_K^B [(f_A)^k]_B^B [\text{id}]_B^K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+i)^k & 0 \\ 0 & (1-i)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} .$$

Vyjde

$$A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+i)^k + (1-i)^k & i(1+i)^k - i(1-i)^k \\ -i(1+i)^k + i(1-i)^k & (1+i)^k + (1-i)^k \end{pmatrix} .$$

To je vcelku komplikovaný výraz, navíc obsahuje imaginární čísla, i když výsledek musí zřejmě být reálná matice.

Proto je lepší počítat s goniometrickým tvarem komplexních čísel. Je $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$ a $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4))$. Dosazením a využitím Moivreovy věty vyjde daleko přijatelnější

$$A^k = \sqrt{2}^k \begin{pmatrix} \cos(k\pi/4) & -\sin(k\pi/4) \\ \sin(k\pi/4) & \cos(k\pi/4) \end{pmatrix} .$$

Stejného výsledku bychom docílili, kdybychom si na začátku všimli, že

$$A = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} .$$

Tedy A je matice složení rotace o $\pi/4$ a stejnohlosti s koeficientem $\sqrt{2}$. Mocninu A^k pak vidíme geometricky.

Obecněji, uvažujme reálnou matici A řádu 2 a chápeme ji jako matici nad \mathbb{C} . Předpokládejme, že charakteristický polynom matice A má dva různé, komplexně sdružené kořeny λ , $\bar{\lambda}$, takže operátor f_A má dvě různá vlastní čísla λ , $\bar{\lambda}$. Napíšeme si je v goniometrickém tvaru.

$$\lambda = re^{i\phi} = r(\cos \phi + i \sin \phi), \quad \bar{\lambda} = re^{-i\phi} = r(\cos \phi - i \sin \phi)$$

Ukážeme, že existuje báze B prostoru \mathbb{R}^2 (!) taková, že

$$[f_A]_B^B = r \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

tj., chápáno opět nad \mathbb{R} , „vzhledem k B “ je operátor f_A rovný rotaci o ϕ složené se stejnolehlostí s koeficientem r . (Ve skutečnosti můžeme dokonce nalézt ortogonální bázi B , vzhledem ke které má operátor uvedenou matici, nemůžeme ale obecně požadovat ortonormální bázi. Výpočet je složitější, nebudeme jej provádět.)

Označme $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ nějaký nenulový vlastní vektor operátoru f_A příslušný vlastnímu číslu λ . Ukážeme, že $\bar{\mathbf{v}}$ je vlastní vektor operátoru f_A příslušný vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$:

$$A\bar{\mathbf{v}} = \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}.$$

V první úpravě jsme využili toho, že je matice reálná (matice \bar{A} značí matici vzniklou z A komplexním sdružením všech prvků); v druhém kroku využíváme toho, že pro libovolné dvě matice vhodných typů platí $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ (to plyne z definice násobení matic a vlastností $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ a $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$, podrobně si rozmyslete jako cvičení).

Vzhledem k bázi C máme

$$[f_A]_C^C = \text{diag}(\lambda, \bar{\lambda}).$$

Označme

$$B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2), \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{w}_2 = i(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}).$$

Vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ leží v \mathbb{R}^2 , vektor \mathbf{w}_1 je dvojnásobek reálné části vektoru \mathbf{v} , vektor \mathbf{w}_2 (-2)-násobek jeho imaginární části. Z definice vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ máme $[\mathbf{w}_1]_C = (1, 1)^T$, $[\mathbf{w}_2]_C = (i, -i)^T$. Z toho vidíme, že B je lineárně nezávislá posloupnost (v \mathbb{C}^2 i \mathbb{R}^2), tedy tvoří bázi (prostoru \mathbb{C}^2 i \mathbb{R}^2). Vzhledem k této bázi máme

$$\begin{aligned} [f_A]_B^B &= [\text{id}]_B^C [f_A]_C^C [\text{id}]_C^B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r(\cos \phi + i \sin \phi) & 0 \\ 0 & r(\cos \phi - i \sin \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Výpočtem získáme

$$[f]_B^B = r \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

což jsme chtěli.

Výsledek nyní zobecníme pro matice libovolného řádu. Nechť A je reálná matice řádu n a f_A je příslušný operátor na \mathbb{C}^n . Předpokládejme, že f_A je diagonalizovatelný. Charakteristický polynom $p(t) = p_A(t)$ matice A má pak právě n kořenů včetně násobností. Zobecníme tvrzení 1.5: Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ kořenem násobnosti m polynomu $p(t)$ s reálnými koeficienty, pak je $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ rovněž kořenem násobnosti m . Skutečně, je-li

$$p(t) = (t - \lambda)^m q(t) \quad \text{a } \lambda \text{ není kořenem } q(t),$$

pak

$$p(\bar{t}) = \overline{p(t)} = \overline{(t - \lambda)^m q(t)} = (t - \bar{\lambda})^m \overline{q(t)} \quad \text{a } \bar{\lambda} \text{ není kořenem } q(t)$$

Vytvoříme seznam vlastních čísel operátoru f_A , každé vlastní číslo do něj zařadíme tolikrát, kolik je jeho násobnost. Reálná vlastní čísla $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ napíšeme na začátek a zbylá vlastní čísla seřadíme do párů a napíšeme si je v goniometrickém tvaru:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_l, r_1 e^{i\phi_1}, r_1 e^{-i\phi_1}, \dots, r_l e^{i\phi_l}, r_l e^{-\phi_l}$$

Dohromady máme n kořenů, tj. $k + 2l = n$.

Dále připomeňme, že \mathbf{v} je vlastní vektor operátoru f_A příslušný vlastnímu číslu λ právě tehdy, když $\bar{\mathbf{v}}$ je vlastní vektor stejného operátoru příslušný vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$. Bázi C složenou z vlastních vektorů tak můžeme zvolit

$$C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_1, \bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \bar{\mathbf{v}}_l) ,$$

kde $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$ jsou reálné vlastní vektory příslušné odpovídajícím číslům $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ v seznamu a vektory \mathbf{v}_1, \dots , jsou komplexní. Vzhledem k této bázi máme

$$[f_A]_C^C = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_l, r_1 e^{i\phi_1}, r_1 e^{-i\phi_1}, \dots, r_l e^{i\phi_l}, r_l e^{-\phi_l}) .$$

Pro reálná čísla r, ϕ označme

$$R_{r,\phi} = r \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} .$$

Dále rozšíříme značení diag na blokově diagonální matice: Pro čtvercové matice X_1, \dots, X_m značí $\text{diag}(X_1, \dots, X_m)$ blokově diagonální matici s bloky X_1, \dots, X_m .

Tvrzení 9.54. *Při zavedeném značení je*

$$B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_1 + \bar{\mathbf{v}}_1, i(\mathbf{v}_1 - \bar{\mathbf{v}}_1), \dots, \mathbf{v}_l + \bar{\mathbf{v}}_l, i(\mathbf{v}_l - \bar{\mathbf{v}}_l))$$

báze \mathbb{R}^n a matice operátoru f_A vzhledem k B je rovná

$$[f_A]_B^B = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_k, R_{r_1, \phi_1}, \dots, R_{r_l, \phi_l}) .$$

Důkaz. Napišeme si do sloupců matice R vyjádření vektorů báze B vzhledem k bázi C .

$$R = \text{diag}(1, \dots, 1, X, X, \dots, X), \quad \text{kde } X = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} .$$

Protože X je regulární, je matice R rovněž regulární (například podle tvrzení... o determinantu blokově horní trojúhelníkové matice). Proto je B báze a R je pak matice přechodu od B k C . Vypočteme $[f_A]_B^B$:

$$\begin{aligned} [f_A]_B^B &= [\text{id}]_B^C [f_A]_C^C [\text{id}]_C^B = \text{diag}(1, \dots, 1, X^{-1}, \dots, X^{-1}) \\ &\quad \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_k, r_1 e^{i\phi_1}, r_1 e^{-i\phi_1}, \dots, r_l e^{i\phi_l}, r_l e^{-\phi_l}) \\ &\quad \text{diag}(1, \dots, 1, X, \dots, X) \\ &= \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_k, R_{r_1, \phi_1}, \dots, R_{r_l, \phi_l}) , \end{aligned}$$

kde součin jsme spočítali po blocích využitím výpočtu v dimenzi 2. \square

9.3.5. *Kvalitativní chování diferenční rovnice $f(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{x}_k$.* Uvažujme diagonalizovatelný lineární operátor f na (konečně generovaném) prostoru \mathbf{V} nad \mathbb{R} dimenze n a necht' B je báze taková, že $[f]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, tedy v posloupnosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ je každé vlastní číslo tolikrát, kolik je jeho algebraická (=geometrická) násobnost. Označme $[\mathbf{x}_0]_B = (a_1, \dots, a_n)^T$ vyjádření počátečního vektoru \mathbf{x}_0 v bázi B . Pak

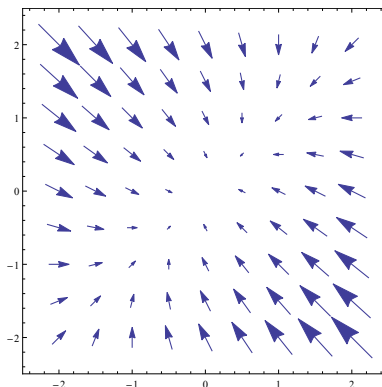
$$[\mathbf{x}_k]_B = ([f]_B^B)^k [\mathbf{x}_0]_B = a_1 \lambda_1^k + \dots + a_n \lambda_n^k .$$

Mohou nastat tři kvalitativně odlišné případy.

- Pro všechna vlastní čísla λ_i platí $|\lambda_i| < 1$. V tom případě $\lambda_i^k \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$ a vektory \mathbf{u}_k tak konvergují k nulovému vektoru \mathbf{o} .

- Pro některé z vlastních čísel platí $|\lambda_i| > 1$. V tom případě normy vektorů \mathbf{x}_k rostou do nekonečna (jako v případě Fibonacciho posloupnosti). Přitom nejvýznamnější se stávají ty souřadnice, pro něž je $|\lambda_i|$ největší (pokud ovšem $a_i \neq 0$). Ilustrativní je obrázek v příkladu 9.7.
- Pro některá z vlastních čísel platí $|\lambda_i| = 1$ a pro zbývající $|\lambda_j| < 1$. V tom případě buď vektory \mathbf{u}_k konvergují k nějakému limitnímu vektoru (jako u vývoje nezaměstnanosti; případ nastává pokud platí $a_i = 0$ kdykoliv $\lambda_i = -1$) nebo oscilují kolem několika „limitních“ vektorů.

9.3.6. *Řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s diagonalizovatelnou maticí.* Uvažujme soustavu lineárních diferenciálních rovnic $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$. Vektor $\mathbf{x}(t)$ může například udávat polohu pohybujícího se objektu v čase t a rovnice pak říká, že vektor rychlosti tohoto objektu je v bodě $\mathbf{x}(t)$ roven $A\mathbf{x}(t)$. Dobrou představu o řešení si můžeme udělat tak, že si do několika bodů \mathbf{x} nakreslíme vektor $A\mathbf{x}$, jako na obrázku 24.



OBRAZEK 24. K příkladu 9.55. Šipky jsou pro přehlednost zkráceny.

Pokud je matice A diagonalizovatelná, můžeme soustavu vyřešit následujícím způsobem. Protože A je diagonalizovatelná, umíme najít diagonální matici D a regulární matici R takovou, že $D = R^{-1}AR$. (Připomeňme, že R je matice přechodu od báze B tvořené vlastními vektory matice A ke kanonické bázi a D je tvořené odpovídajícími vlastními čísly.) Úpravou dostaneme $A = RDR^{-1}$ a rovnici můžeme ekvivalentně přepsat

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= RDR^{-1}\mathbf{x}(t) \\ R^{-1}\mathbf{x}'(t) &= DR^{-1}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

Definujeme $\mathbf{y}(t) = R^{-1}\mathbf{x}(t)$. Snadno se pak ověří, že $\mathbf{y}'(t) = R^{-1}\mathbf{x}'(t)$ (podrobněji je tento krok vysvětlen v příkladu). Dosazením dostáváme

$$\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$$

Tuto soustavu vyřešíme užitím příkladu 9.15 o řešení diferenciální rovnice $f'(t) = \lambda f(t)$. Původní funkce $\mathbf{x}(t)$ dopočteme ze vztahu $\mathbf{x}(t) = R\mathbf{y}(t)$.

Příklad 9.55. Vyřešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

s počáteční podmínkou $x_1(0) = 5, x_2(0) = 7$. Charakteristický polynom matice A je $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$, který má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -3$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1$ tvoří lineární obal $\langle (1, 1)^T \rangle$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ tvoří lineární obal $\langle (1, -1)^T \rangle$. Položíme $B = ((1, 1)^T, (1, -1)^T)$. Pak

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a

$$D = R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Původní soustavu si přepíšeme do tvaru

$$R^{-1} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Označíme

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Obě funkce $y_i(t)$ jsou lineární kombinace funkcí $x_1(t), x_2(t)$ s konstantními koeficienty v i -tém řádku matice R^{-1} . Platí proto

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Dvojice funkcí $y_1(t), y_2(t)$ tak splňuje soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(t) \\ \lambda_2 y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Tu už umíme řešit: $y_1(t) = y_1(0)e^{-2t}$ a $y_2(t) = y_2(0)e^{-3t}$, kde

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

Spočítáme původní funkce:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= R \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \\ &= R \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6e^{-t} - e^{-3t} \\ 6e^{-t} + e^{-3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z postupu vidíme, že obecně je pro matici $A = R(\text{diag } \lambda_1, \dots, \lambda_n)R^{-1}$ řešením soustavy

$$\mathbf{x}(t) = R \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) R^{-1} \mathbf{x}(0).$$

Pro zajímavost uveďme, že matice $R \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) R^{-1}$ je rovna tzv. exponenciále matice tA a značí se e^{tA} . To dává smysl, protože „dosadíme-li“ matici tA do Taylorovy řady funkce e^x máme

$$\begin{aligned} & I_n + tA + t^2 \frac{A^2}{2!} + t^3 \frac{A^3}{3!} + \dots + t^k \frac{A^k}{k!} + \dots \\ = & I_n + tRDR^{-1} + t^2 \frac{RD^2R^{-1}}{2!} + t^3 \frac{RD^3R^{-1}}{3!} + \dots + t^k \frac{RD^kR^{-1}}{k!} + \dots \\ = & R \left(I_n + tD + \frac{(tD)^2}{2!} + \frac{(tD)^3}{3!} + \dots + \frac{(tD)^k}{k!} + \dots \right) R^{-1} \\ = & R \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) R^{-1} . \end{aligned}$$

Řešení soustavy $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ pak můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}(0),$$

zcela analogicky k vyjádření $f(t) = e^{t\lambda} f(0)$ jako řešení diferenciální rovnice $f' = \lambda f$.

Příklad 9.56. Vyřešíme ještě příklad 9.4 o dvou buňkách. Ten vede k soustavě diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -ru_1(t) + su_2(t)h , \\ u_2'(t) &= ru_1(t) - su_2(t) . \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $u_1(0) = 1, u_2(0) = 0$. Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} -r & s \\ r & -s \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + (r+s)\lambda$ a tudíž dvě různá vlastní čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -(r+s)$, odtud plyne její diagonalizovatelnost.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ tvoří jádro matice

$$A - 0I_2 = \begin{pmatrix} -r & s \\ r & -s \end{pmatrix} ,$$

který se rovná lineárnímu obalu $\langle (s, r)^T \rangle$.

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_2 = -(r+s)$ tvoří jádro matice

$$A + (r+s)I_2 = \begin{pmatrix} s & s \\ r & r \end{pmatrix} ,$$

který se rovná lineárnímu obalu $\langle (1, -1)^T \rangle$. Zvolíme bázi $B = ((s, r)^T, (1, -1)^T)$. Pak

$$R = [\operatorname{id}]_K^B = \begin{pmatrix} s & 1 \\ r & -1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{-1}{r+s} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -r & s \end{pmatrix} .$$

Soustava má řešení

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s & 1 \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-(r+s)t} \end{pmatrix} \frac{-1}{r+s} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r+s} \begin{pmatrix} s + re^{-(r+s)t} \\ r - re^{-(r+s)t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Vidíme, že pro $t \rightarrow \infty$ hodnota $u_1(t)$ konverguje k $\frac{s}{r+s}$ a hodnota $u_2(t)$ konverguje k $\frac{r}{r+s}$, což se dalo intuitivně tušit.

9.4. Jordanův kanonický tvar. Jak jsme dokázali ve větě 9.51, lineární operátor na prostoru dimenze n může být nediagonalizovatelný ze dvou důvodů: součet algebraických násobností vlastních čísel je menší než n nebo geometrická násobnost nějakého vlastního čísla je menší než jeho algebraická násobnost. První příčinu lze obejít tím, že pracujeme ve větším tělese (například místo \mathbb{R} v \mathbb{C}). Druhá příčina takto obejít nejde, musíme slevit z požadavku diagonalizovatelnosti. Naštěstí lze v případě splnění první podmínky na algebraické násobnosti vždy najít bázi, vzhledem ke které má operátor „téměř“ diagonální matici, přesněji tzv. matici v Jordanově tvaru. Mocninu takové matice stále lze explicitně vypočítat, tedy lze nalézt mocninu operátoru.

9.4.1. *Nediagonalizovatelné operátory v dimenzi 2.* V odstavci 9.3.3 jsme probrali možnosti, jaké mohou nastat pro operátory na reálném vektorovém prostoru dimenze 2. Zbývá jediný případ, který nyní podrobně rozebereme. Diskuze také snad poslouží k orientaci v obecnějších pojmech a tvrzeních.

Uvažujme tedy operátor f na vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze 2 nad tělesem \mathbf{T} , který má jedno vlastní číslo λ algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 1. Ukážeme, že v takovém případě existuje báze $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ prostoru \mathbf{V} , vzhledem ke které má operátor f matici

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

To je nejjednodušší příklad matice v tzv. Jordanově tvaru, která není diagonální. Takovou matici umíme umocnit, platí totiž

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ 0 & \lambda^m \end{pmatrix}.$$

Když takovou bázi B najdeme, budeme umět spočítat $[f^m]_B^B = ([f]_B^B)^m$ a tím pádem například vyřešit diferenční rovnici $\mathbf{x}_m = f(\mathbf{x}_{m-1})$. Obecně je Jordanův tvar a mocnění rozebráno v odstavci 9.4.2.

Hledání báze B začneme přeformulováním podmínky na matici $[f]_B^B$. Podle definice matice f vzhledem k B a B potřebujeme, aby platilo

$$[f(\mathbf{u})]_B = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(\mathbf{v})]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Podle definice souřadnic vzhledem k bázi tedy chceme, aby

$$f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}, \quad f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}.$$

Označíme-li g operátor $g = f - \lambda \text{id}$ můžeme tyto podmínky zapsat

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad g(\mathbf{v}) = \mathbf{u},$$

schematicky

$$\mathbf{v} \xrightarrow{g} \mathbf{u} \xrightarrow{g} \mathbf{0}.$$

Potřebujeme tedy, aby \mathbf{u} byl vlastní vektor operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ a aby $g(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$. Obecně je toto přeformulování provedeno v odstavci 9.4.3.

Dále ukážeme, že kdykoliv máme vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} splňující podmínky $g(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$, $g(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ a vektor \mathbf{u} je nenulový, pak $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je lineárně nezávislá posloupnost, tedy báze \mathbf{V} . Skutečně, je-li

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

pak aplikací operátoru g na obě strany dostaneme

$$\begin{aligned} g(av + bu) &= g(\mathbf{o}) \\ ag(\mathbf{v}) + bg(\mathbf{u}) &= \mathbf{o} \\ a\mathbf{u} &= \mathbf{o} . \end{aligned}$$

Protože je \mathbf{u} nenulový vektor, plyne odsud $a = 0$. Dosazením do původního vztahu získáme $b\mathbf{u} = \mathbf{o}$, takže i $b = 0$. Obecné tvrzení je dokázáno v odstavci 9.4.4

V odstavci 9.4.5 probereme, jak takové vektory obecně hledat za předpokladu, že existují (v odstavcích 9.4.6, 9.4.7, 9.4.8, 9.4.9 ukážeme postup na řadě příkladů). Důkaz, že skutečně existují, využívá pojem invariantního podprostoru diskutovaného v odstavci 9.4.10, samotný důkaz je pak obsažen v odstavci 9.4.11.

V našem případě označme $\mathbf{W} = \text{Im } g$. Tento prostor je invariantní ve smyslu, že $g(\mathbf{x}) \in W$ kdykoliv $\mathbf{x} \in W$. Skutečně: Je-li $\mathbf{x} \in W$, pak z definice W existuje vektor $\mathbf{y} \in V$ takový, že $g(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Pak $g(\mathbf{x}) = g(g(\mathbf{y})) \in \text{Im } g$.

Podprostor $\text{Ker } g \leq \mathbf{V}$ je tvořen všemi vlastními vektory operátoru f příslušnými vlastnímu číslu λ . Protože geometrická násobnost vlastního čísla λ je podle předpokladu 1, je $\dim \text{Ker } g = 1$. Podle věty o dimenzi jádra a obrazu je $\dim \text{Im } g = \dim W = 1$. Vezmeme libovolný nenulový vektor $\mathbf{u} \in W$. Protože W má dimenzi 1, je vektor $g(\mathbf{u}) \in W$ násobkem vektoru \mathbf{u} , tj. $g(\mathbf{u}) = a\mathbf{u}$ pro nějaký skalár $a \in T$. Pak ale $(f - \lambda \text{id})\mathbf{u} = a\mathbf{u}$, takže $f(\mathbf{u}) = (\lambda + a)\mathbf{u}$. Protože f má jediné vlastní číslo λ , musí být nutně $a = 0$, platí tedy $g(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$. Vektor \mathbf{u} leží v $W = \text{Im } g$, existuje proto vektor $\mathbf{v} \in V$ takový, že $g(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$, a důkaz je hotov – našli jsme vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ takové, že $g(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$, $g(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ a $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, což stačí podle jednoho z pozorování výše.

9.4.2. Matice v Jordanově tvaru. Matice v Jordanově tvaru je blokově diagonální matice, jejíž bloky tvoří Jordanovy buňky. Jordanova buňka je matice, která má všechny diagonální prvky rovny nějakému $\lambda \in T$ a všechny prvky o jednu pozici nad diagonálou rovny 1.

Definice 9.57. *Jordanova buňka* nad tělesem \mathbf{T} řádu $k \geq 1$ příslušná prvku $\lambda \in T$ je čtvercová matice

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

Příklad 9.58. Reálné matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

jsou Jordanovy buňky $J_{2,2}$, $J_{0,2}$, $J_{3,3}$, $J_{4,1}$ (příslušné pořadě číslům 2, 0, 3, 4).

Definice 9.59. Matice J nad tělesem \mathbf{T} je v *Jordanově kanonickém tvaru* (nebo stručněji v *Jordanově tvaru*), pokud J je blokově diagonální matice, jejíž každý

blok je Jordanova buňka (nějakého řádu s nějakým vlastním číslem), tj.

$$J = \text{diag}(J_{\lambda_1, k_1}, \dots, J_{\lambda_s, k_s}) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2, k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_s, k_s} \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in T$ a k_1, \dots, k_s jsou kladná celá čísla. (Nuly v matici v tomto případě značí nulové matice vhodných typů.)

Příklad 9.60. Diagonální matice $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ je v Jordanově tvaru. Je složena z Jordanových buněk $J_{\lambda_1, 1}, \dots, J_{\lambda_n, 1}$ řádu 1.

Příklad 9.61. Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je v Jordanově tvaru. Je složena z Jordanových buněk $J_{0,2}, J_{0,1}, J_{2,3}$.

Nyní najdeme vzorec pro mocninu Jordanovy matice. Matici

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$

v blokově diagonálním tvaru můžeme mocnit po diagonálních blocích:

$$J^m = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s^m \end{pmatrix}.$$

Stačí se proto zaměřit pouze na mocnění Jordanových buněk.

Jednoduchý je speciální případ Jordanových buněk příslušných prvku 0.

Tvrzení 9.62. Pro libovolná přirozená čísla $m < k$ platí

$$J_{0,k}^m = \underbrace{(\mathbf{o} \mid \dots \mid \mathbf{o})}_{m \times} \mid \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \dots \mid \mathbf{e}_{k-m}$$

Pro $m \geq k$ je $J_{0,k}^m = 0$.

Důkaz. Indukcí podle $m < k$, případ $m = 1$ je zjevný. Platí-li tvrzení pro nějaké m menší než k , máme ze sloupcového pohledu na násobení

$$\begin{aligned} J_{0,k}^{m+1} &= J_{0,k}^m J_{0,k} = (\mathbf{o} \mid \dots \mid \mathbf{o} \mid \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \dots \mid \mathbf{e}_{k-m}) (\mathbf{o} \mid \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \dots \mid \mathbf{e}_{k-1}) \\ &= (\mathbf{o} \mid \dots \mid \mathbf{o} \mid \mathbf{e}_1 \mid \dots \mid \mathbf{e}_{k-(m+1)}) \end{aligned}$$

Pro $m \leq k$ je indukční krok zřejmý. □

Příklad 9.63.

$$J_{0,4}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{0,4}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Jordanovu buňku $J_{\lambda,k}$ můžeme rozepsat

$$J_{\lambda,k} = \lambda I_k + J_{0,k}$$

Pokud dvě čtvercové matice A, B komutují, tj. platí $AB = BA$, pak pro ně platí obdoba binomické věty (cvičení)

$$(A + B)^m = A^m + \binom{m}{1} A^{m-1} B + \binom{m}{2} A^{m-2} B^2 + \dots + B^m.$$

Použitím na matice λI_k a $J_{0,k}$ dostaneme vzorec v následujícím tvrzení. Používáme konvenci, že binomické číslo $\binom{m}{j} = 0$ pokud $m < j$. Dále pro $i \in \{0, 1, \dots\}$ a prvek t v tělese \mathbf{T} definujeme it jako $\underbrace{t + t + \dots + t}_{i \times}$.

Tvrzení 9.64. *Je-li $J = J_{\lambda,k}$ Jordanova buňka, pak pro každé kladné m platí*

$$J_{\lambda,k}^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & \binom{m}{1} \lambda^{m-1} & \binom{m}{2} \lambda^{m-2} & \dots & \binom{m}{k-1} \lambda^{m-k+1} \\ 0 & \lambda^m & \binom{m}{1} \lambda^{m-1} & \dots & \binom{m}{k-2} \lambda^{m-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^m & \binom{m}{1} \lambda^{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^m \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Jeden z možných výpočtů byl naznačen před tvrzením, ukážeme alternativní důkaz.

Prvek na místě (i, j) v mocnině $J_{\lambda,k}^m$ zapsat jako $\binom{m}{j-i} \lambda^{m-(j-i)}$. K důkazu lze použít indukci podle m , případ $m = 1$ je zjevný. Pokud formulka platí pro $m \geq 1$, spočítáme $J_{\lambda,k}^{m+1} = J_{\lambda,k} J_{\lambda,k}^m$. Obě matice, které násobíme, jsou horní trojúhelníkové, součin je proto také horní trojúhelníkový. Zbývá spočítat prvky na místě (i, j) v součinu $J_{\lambda,k} J_{\lambda,k}^m$ pro $i \leq j$. Prvek na místě (i, j) v matici $J_{\lambda,k}^m$ se podle indukčního předpokladu rovná $\binom{m}{j-i} \lambda^{m-(j-i)}$. Prvek na místě (i, j) v matici $J_{\lambda,k} J_{\lambda,k}^m$ se pak rovná

$$\begin{aligned} & \lambda \binom{m}{j-i} \lambda^{m-(j-i)} + 1 \binom{m}{j-(i+1)} \lambda^{m-(j-i-1)} \\ &= \binom{m}{j-i} \lambda^{m+1-(j-i)} + \binom{m}{j-i-1} \lambda^{m+1-(j-i)} \\ &= \binom{m+1}{j-i} \lambda^{m+1-(j-i)}, \end{aligned}$$

použili jsme vztah mezi kombinačními čísly $\binom{m}{l} + \binom{m}{l-1} = \binom{m+1}{l}$. \square

9.4.3. Operátory s Jordanovým tvarem. Chceme zjistit, zda má daný operátor f na konečně generovaném prostoru vzhledem k nějaké bázi B matici v Jordanově tvaru, jak takovou bázi najít a z jakých buněk se matice $[f]_B^B$ skládá.

Formulujeme obdoba definice 9.40 diagonalizovatelnosti. Pojem „jordanizovatelnost“ se nepoužívá, raději říkáme, že pro operátor existuje Jordanův kanonický tvar.

Definice 9.65. Říkáme, že pro lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} existuje Jordanův kanonický tvar, pokud má vzhledem k nějaké bázi matici v Jordanově kanonickém tvaru.

Odvodíme obdobu tvrzení 9.41. Nejprve pro samotné buňky. Kdy má operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ vzhledem k nějaké bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ matici $[f]_B^B = J_{\lambda, k}$? Podle definice matice operátoru musí platit (a stačí)

$$[f(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, [f(\mathbf{v}_k)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

neboli

$$f(\mathbf{v}_1) = \lambda \mathbf{v}_1, \quad f(\mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1, \quad f(\mathbf{v}_3) = \lambda \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2, \quad \dots, \quad f(\mathbf{v}_k) = \lambda \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}.$$

Úpravou (podobně jako v části 9.2.1) dostaneme ekvivalentně

$$(f - \lambda \text{id})(\mathbf{v}_1) = \mathbf{o}, \quad (f - \lambda \text{id})(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1, \quad (f - \lambda \text{id})(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2, \quad \dots, \quad (f - \lambda \text{id})(\mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_{k-1},$$

schematicky

$$\mathbf{v}_k \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} \mathbf{v}_{k-1} \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} \dots \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} \mathbf{v}_3 \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} \mathbf{v}_2 \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} \mathbf{o}.$$

Vidíme, že λ je vlastní číslo operátoru f , \mathbf{v}_1 je vlastní vektor příslušný λ . Posloupnosti $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ budeme říkat Jordanův řetízek, vektorům $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ se někdy říká *zobecněné vlastní vektory* příslušné vlastnímu číslu λ .

Definice 9.66. Nechť f je lineární operátor na vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} a λ je vlastní číslo operátoru f . Posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ vektorů z \mathbf{V} nazýváme *Jordanův řetízek operátoru f délky k příslušný vlastnímu číslu λ s počátkem \mathbf{v}_1* , pokud platí

$$(f - \lambda \text{id})(\mathbf{v}_1) = \mathbf{o}, \quad (f - \lambda \text{id})(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1, \quad (f - \lambda \text{id})(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2, \quad \dots, \quad (f - \lambda \text{id})(\mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_{k-1},$$

Odvodili jsme následující tvrzení.

Tvrzení 9.67. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} a $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je báze prostoru \mathbf{V} . Pak $[f]_B^B = J_{\lambda, k}$ platí právě tehdy, když $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je Jordanův řetízek příslušný vlastnímu číslu λ operátoru f .

Snadno se tvrzení zobecní na obecné matice v Jordanově tvaru. Budeme říkat, že posloupnost vektorů B je *spojením* posloupností

$$B_1 = (\mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}^1), \dots, B_s = (\mathbf{v}_1^s, \dots, \mathbf{v}_{k_s}^s),$$

pokud

$$B = (\mathbf{v}_2^1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}^1, \mathbf{v}_1^2, \dots, \mathbf{v}_{k_2}^2, \dots, \mathbf{v}_{k_s}^s).$$

Budeme také používat zápis

$$B = B_1, \dots, B_s$$

Tvrzení 9.68. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} a B je báze prostoru \mathbf{V} . Pak $[f]_B^B = \text{diag}(J_{\lambda_1, k_1}, \dots, J_{\lambda_s, k_s})$ platí právě tehdy, když B je spojením B_1, \dots, B_s , kde pro každé $i \in \{1, \dots, s\}$ je B_i Jordanův řetízek délky k_i příslušný vlastnímu číslu λ_i operátoru f .

Důsledek 9.69. Pro lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} existuje Jordanův tvar právě tehdy, když existuje báze prostoru \mathbf{V} vzniklá spojením Jordanových řetízků operátoru f .

Nakonec formulujeme obdobu tvrzení 9.43. Důkaz je stejný.

Tvrzení 9.70. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} a C je báze prostoru \mathbf{V} . Pak pro operátor f existuje Jordanův tvar právě tehdy, když je matice $[f]_C^C$ podobná matici v Jordanově tvaru.

Maticové verze definic a tvrzení přenecháme k rozmyšlení čtenáři.

9.4.4. *Lineární nezávislost zobecněných vlastních vektorů.* Chceme-li najít bázi, vzhledem ke které má operátor na prostoru dimenze n matici v Jordanově tvaru, musíme najít Jordanovy řetízky celkové délky n , tak aby jejich spojení byla lineárně nezávislá posloupnost. Následující věta, která zobecňuje větu 9.44 o lineární nezávislosti vlastních vektorů příslušných různým vlastním číslům, říká, že stačí zaručit, aby pro každé vlastní číslo λ tvořily počáteční vektory řetízků příslušných vlastnímu číslu λ lineárně nezávislou posloupnost.

Věta 9.71. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor a B_1, \dots, B_s Jordanovy řetízky operátoru f příslušné vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Předpokládejme, že pro každé $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ je posloupnost počátečních vektorů těch řetízků z B_1, \dots, B_s , které přísluší vlastnímu číslu λ , lineárně nezávislá. Pak $B = B_1, \dots, B_s$ je lineárně nezávislá posloupnost.

Důkaz. Použijeme indukci podle celkového počtu k vektorů v řetízcích. Pro $k = 1$ je tvrzení zřejmé. Pro indukční krok předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna menší k .

Označíme r počet řetízků příslušných vlastnímu číslu λ_1 a uspořádáme si řetízky tak, že všechny řetízky příslušející vlastnímu číslu λ_1 jsou na začátku, tj. řetízky B_1, \dots, B_r přísluší vlastnímu číslu λ_1 a zbylé přísluší jiným vlastním číslům. Označíme pro $i = 1, \dots, s$

$$B_i = (\mathbf{v}_1^i, \dots, \mathbf{v}_{k_i}^i) .$$

Uvažujme skaláry $a_j^i \in T$ ($i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{1, \dots, k_i\}$) takové, že

$$a_1^1 \mathbf{v}_1^1 + \dots + a_{k_1}^1 \mathbf{v}_{k_1}^1 + a_1^2 \mathbf{v}_1^2 + \dots + a_{k_2}^2 \mathbf{v}_{k_2}^2 + \dots + a_{k_s}^s \mathbf{v}_{k_s}^s = \mathbf{o} .$$

Potřebujeme ukázat, že tyto skaláry jsou všechny nulové. Aplikujeme na obě strany operátor $f - \lambda_1 \text{id}$. Využitím lineariry, jako v důkazu věty 9.44, získáme

$$a_1^1 (f - \lambda_1 \text{id})(\mathbf{v}_1^1) + \dots + a_{k_1}^1 (f - \lambda_1 \text{id})(\mathbf{v}_{k_1}^1) + \dots + \dots + a_{k_s}^s (f - \lambda_1 \text{id})(\mathbf{v}_{k_s}^s) = \mathbf{o} .$$

Rozebereme výraz po částech odpovídající buňkám. Pro $i \in \{1, \dots, r\}$ je z definice Jordanovy buňky

$$a_1^i (f - \lambda_1 \text{id})(\mathbf{v}_1^i) + \dots + a_{k_i}^i (f - \lambda_1 \text{id})(\mathbf{v}_{k_i}^i) = a_2^i \mathbf{v}_1^i + a_3^i \mathbf{v}_2^i + \dots + a_{k_i}^i \mathbf{v}_{k_i-1}^i$$

Pro $i > r$ využijeme úpravy

$$\begin{aligned} (f - \lambda_1 \text{id})(\mathbf{v}_j^i) &= (f - \lambda_i \text{id} + (\lambda_i - \lambda_1) \text{id})(\mathbf{v}_j^i) \\ &= (f - \lambda_i \text{id})(\mathbf{v}_j^i) + (\lambda_i - \lambda_1) \text{id}(\mathbf{v}_j^i) \\ &= \mathbf{v}_{j-1}^i + (\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{v}_j^i . \end{aligned}$$

Přeuspořádáním členů získáme

$$a_1^i(f - \lambda_1 \text{id})(\mathbf{v}_1^i) + \cdots + a_{k_1}^i(f - \lambda_1 \text{id})(\mathbf{v}_{k_1}^i) = b_1^i \mathbf{v}_1^i + b_{k_i-1}^i \mathbf{v}_{k_i-1}^i + \cdots + b_{k_i}^i \mathbf{v}_{k_i}^i ,$$

kde

$$b_1^i = a_2^i + a_1^i(\lambda_i - \lambda_1), \dots, b_{k_i-1}^i = a_{k_i}^i + a_{k_i-1}^i(\lambda_i - \lambda_1), b_{k_i}^i = a_{k_i}^i(\lambda_i - \lambda_1) .$$

Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned} & a_2^1 \mathbf{v}_1^1 + a_3^1 \mathbf{v}_2^1 + \cdots + a_{k_1}^1 \mathbf{v}_{k_1-1}^1 + \cdots + a_2^r \mathbf{v}_1^r + a_3^r \mathbf{v}_2^r + \cdots + a_{k_r}^r \mathbf{v}_{k_r-1}^r + \\ & b_1^{r+1} \mathbf{v}_1^{r+1} + b_2^{r+1} \mathbf{v}_2^{r+1} + \cdots + b_{k_{r+1}}^{r+1} \mathbf{v}_{k_{r+1}}^{r+1} + b_1^s \mathbf{v}_1^s + b_2^s \mathbf{v}_2^s + \cdots + b_{k_s}^s \mathbf{v}_{k_s}^s = \mathbf{o} \end{aligned}$$

Tento výraz je lineární kombinací vektorů v řetězcích $B'_1, \dots, B'_r, B_{r+1}, \dots, B_s$, kde B'_i vznikne z B_i odebráním posledního vektoru v řetězku. Z indukčního předpokladu vyplývá, že všechny koeficienty jsou nutně nulové:

$$a_2^1 = \cdots = a_{k_1}^1 = \cdots = a_2^r = \cdots = a_{k_r}^r = b_1^{r+1} = \cdots = \cdots = b_{k_s}^s = 0$$

Z výrazů pro b_j^i pak (pro každé $i > r$ postupujeme zpětně od $j = k_i$) vyjde $a_j^i = 0$ pro každé $i > r$, $1 \leq j \leq k_i$.

Původní vztah pro lineární kombinaci vektorů z B se tak zjednoduší na

$$a_1^1 \mathbf{v}_1^1 + a_1^2 \mathbf{v}_1^2 + \cdots + a_1^r \mathbf{v}_1^r = \mathbf{o}$$

a z předpokladu o lineární nezávislosti počátků získáme konečně i

$$a_1^1 = a_1^2 = \cdots = a_1^r = 0 .$$

□

9.4.5. *Výpočet řetězků.* Uvažujme operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} dimenze n a bázi $B = B_1, \dots, B_s$ složenou z Jordanových řetězků B_1, \dots, B_s délek k_1, \dots, k_s příslušných vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Pro přehlednost si je uspořádáme tak, aby řetězky příslušné stejným číslům byly pohromadě. Řekněme, že prvních r odpovídá stejnému vlastnímu číslu λ , tj. $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r$ a $\lambda_i \neq \lambda$ pro $i > r$. Označme $B_i = (\mathbf{v}_1^i, \dots, \mathbf{v}_{k_i}^i)$ pro $i \in \{1, \dots, s\}$. Schematicky:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{v}_{k_1}^1 & \xrightarrow{f-\lambda \text{id}} & \mathbf{v}_{k_1-1}^1 & \mapsto \cdots \mapsto & \mathbf{v}_2^1 & \xrightarrow{f-\lambda \text{id}} & \mathbf{v}_1^1 & \xrightarrow{f-\lambda \text{id}} & \mathbf{o} \\ & & & & & & & & \vdots \\ \mathbf{v}_{k_1}^r & \xrightarrow{f-\lambda \text{id}} & \mathbf{v}_{k_1-1}^r & \mapsto \cdots \mapsto & \mathbf{v}_2^r & \xrightarrow{f-\lambda \text{id}} & \mathbf{v}_1^r & \xrightarrow{f-\lambda \text{id}} & \mathbf{o} \\ & & & & & & & & \vdots \\ \mathbf{v}_{k_s}^s & \xrightarrow{f-\lambda_s \text{id}} & \mathbf{v}_{k_s-1}^s & \mapsto \cdots \mapsto & \mathbf{v}_2^s & \xrightarrow{f-\lambda_s \text{id}} & \mathbf{v}_1^s & \xrightarrow{f-\lambda_s \text{id}} & \mathbf{o} \end{array}$$

a

$$[f]_B^B = J = \text{diag}(J_{\lambda_1, k_1}, \dots, J_{\lambda_s, k_s}) .$$

Za této situace spočítáme charakteristický polynom operátoru f , vlastní čísla a vektory, geometrické násobnosti a navíc jádra a obrazy operátorů $(f - \lambda_i \text{id})^l$ pro $l = 1, \dots$ (Zaměříme se na vlastní číslo $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_r$, přičemž výsledky přirozeně budou platit pro každé z vlastních čísel.) Tyto údaje nám pak umožní hledat Jordanovy řetězky, když je předem neznáme.

Charakteristický polynom $p_f(t)$ operátoru f je roven determinantu matice $J - tI_n$. Tato matice je diagonální a na diagonále má postupně k_1 -krát výraz $(\lambda_1 - t)$, k_2 -krát výraz $(\lambda_2 - t)$, atd. Charakteristický polynom je proto roven

$$(\lambda_1 - t)^{k_1} (\lambda_2 - t)^{k_2} \dots (\lambda_s - t)^{k_s} .$$

Důsledkem je, že operátor f má n vlastních čísel včetně násobností a algebraická násobnost vlastního čísla λ je rovna součtu délek Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu λ (to je $k_1 + \dots + k_r$).

Dále vypočítáme jádro a obraz operátoru $f - \lambda \text{id}$. (Pro představu je dobré sledovat výpočet na konkrétním situaci, viz např. příklad 9.72). Jeho matice vzhledem k B je

$$J - \lambda I_n = \text{diag}(J_{0,k_1}, \dots, J_{0,k_r}, J_{\lambda_{r+1}-\lambda, k_{r+1}}, \dots, J_{\lambda_s-\lambda, k_s})$$

Tato matice má nulové řádky odpovídající pozici koncových vektorů řetízků B_1, \dots, B_r v bázi B . Vynecháme-li je, dostaneme matici v řádkově odstupňovaném tvaru s $(n - r)$ nenulovými řádky. Dimenze jádra matice $J - \lambda I_n$ je r a také vidíme, že množina řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $J - \lambda I_n$ je $\text{Ker}(J - \lambda I_n) = \langle \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r} \rangle$, kde indexy i_1, \dots, i_r odpovídají pozicím počátečních vektorů řetízků B_1, \dots, B_r v bázi B , tj. $i_1 = 1, i_2 = 1 + k_1, i_3 = 1 + k_2 + k_3, \dots$. Je tedy

$$[\text{Ker}(f - \lambda \text{id})]_B = \text{Ker}(J - \lambda I_n) = \langle \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_r} \rangle ,$$

takže

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) = \langle \mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \dots, \mathbf{v}_1^r \rangle .$$

Geometrická násobnost vlastního čísla r je tedy rovná počtu řetízků příslušných vlastnímu číslu λ a jádro operátoru $(f - \lambda \text{id})$ je rovno lineárnímu obalu počátečních vektorů těchto řetízků.

Přejdeme k výpočtu obrazu matice $J - \lambda I_n$, ten je rovný lineárnímu obalu sloupcových vektorů. Sloupce odpovídající pozicím počátečních vektorů řetízků B_1, \dots, B_r jsou nulové a v zbylé sloupce příslušné jedné z těchto buněk obsahují vektory kanonické báze – vektor \mathbf{e}_{i-1} v i -tém sloupci. Ostatní buňky jsou horní trojúhelníkové matice s nenulovými prvky na diagonále, můžeme je tedy sloupcovými úpravami (které nemění obraz) převést na jednotkové matice. Obraz matice $J - \lambda I_n$ je tedy roven lineárnímu obalu těch vektorů kanonické báze, které neodpovídají pozicím koncových vektorů řetízků B_1, \dots, B_r . Protože $[\text{Im}(f - \lambda \text{id})]_B = \text{Im}(J - \lambda I_n)$, je obraz operátoru $f - \lambda \text{id}$ roven lineárnímu obalu všech vektorů v B kromě koncových vektorů řetízků B_1, \dots, B_r . Můžeme si představovat, že umažeme jeden vektor z konce každého řetízku příslušnému vlastnímu číslu λ .

Příklad 9.72. Pro $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 7, \lambda_4 = 9, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3, k_4 = 2$ máme řetízky

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & f-7 \text{ id} & \\ & & & & & \longmapsto & \mathbf{o} \\ & & & & \mathbf{v}_1^1 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & f-7 \text{ id} & \\ & & & & \mathbf{v}_2^1 & \longmapsto & \mathbf{o} \\ & & & & \mathbf{v}_2^2 & \longmapsto & \mathbf{o} \\ & & & & & & \\ & & & & & f-7 \text{ id} & \\ & & & & & \longmapsto & \mathbf{o} \\ & & & & \mathbf{v}_3^1 & \longmapsto & \mathbf{o} \\ & & & & \mathbf{v}_3^2 & \longmapsto & \mathbf{o} \\ & & & & \mathbf{v}_3^3 & \longmapsto & \mathbf{o} \\ & & & & & & \\ & & & & & f-9 \text{ id} & \\ & & & & & \longmapsto & \mathbf{o} \\ & & & & \mathbf{v}_2^3 & \longmapsto & \mathbf{o} \\ & & & & \mathbf{v}_2^4 & \longmapsto & \mathbf{o} \end{array}$$

Operátor f má charakteristický polynom $p_f(t) = (7 - t)^6(9 - t)^2$, vlastní číslo 7 algebraické násobnosti 6 a vlastní číslo 9 algebraické násobnosti 2.

Matice operátoru $f - 7\text{id}$ vzhledem k B je

$$J - \lambda I_8 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - 7I_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jádro matice $J - 7I_8$ je

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4 \rangle$$

a tudíž jádro operátoru $f - 7\text{id}$ je $\text{Ker}(f - 7\text{id}) = \langle \mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_1^3 \rangle$ (lineární obal počátečních vektorů příslušných vlastnímu číslu 7), jeho dimenze je 3 a je rovná geometrické násobnost vlastnímu číslu 7, která udává počet řetízků příslušných tomuto vlastnímu číslu.

Obraz matice $J - 7I_8$ je

$$\text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8 \rangle$$

a tudíž obraz operátoru $f - 7\text{id}$ je $\text{Im}(f - 7\text{id}) = \langle \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_1^3, \mathbf{v}_2^3, \mathbf{v}_1^4, \mathbf{v}_2^4 \rangle$ (lineární obal všech vektorů v řetízích kromě koncových vektorů příslušných vlastnímu číslu 7).

Nakonec obecněji vypočteme jádro a obraz operátoru $(f - \lambda\text{id})^l$ pro $l = 2, 3, \dots$. Jeho matice vzhledem k B je

$$(J - \lambda I_n)^l = \text{diag}(J_{0,k_1}^l, \dots, J_{0,k_r}^l, J_{\lambda_{r+1}-\lambda, k_{r+1}}^l, \dots, J_{\lambda_s-\lambda, k_s}^l)$$

Tvar prvních r diagonálních buněk jsme spočítali v tvrzení 9.62, tvar ostatních v tvrzení 9.64, ten ale teď nebudeme potřebovat, stačí vědět, že vyjdou regulární matice.

Matice $(J - \lambda I_n)^l$ má nulové řádky odpovídající pozici l koncových vektorů řetízků B_1, \dots, B_r v bázi B (pokud je nějaký řetízek kratší, pak uvažujeme všechny). Vynecháme-li je, dostaneme matici v řádkově odstupňovaném tvaru a jádro matice $\text{Ker}(J - \lambda I_n)^l$ je rovno lineárnímu obalu $\langle \mathbf{e}_{i_1}, \dots \rangle$, kde indexy i_1, \dots , odpovídají pozicím l počátečních vektorů řetízků B_1, \dots, B_r v bázi B . Takže

$$\text{Ker}(f - \lambda\text{id})^l = \langle \mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_1^l, \mathbf{v}_2^1, \dots, \mathbf{v}_2^l, \dots, \mathbf{v}_r^1, \dots, \mathbf{v}_r^l \rangle.$$

(Pro řetízky B_i délky menší než l musíme z obalu vynechat vektory $\mathbf{v}_{k_i+1}^i, \dots, \mathbf{v}_l^i$, které nemáme.) Jádro operátoru $(f - \lambda\text{id})^l$ je rovno lineárnímu obalu l počátečních

vektorů z každého řetízku příslušnému vlastnímu číslu λ (z řetízků délky menší než l bereme všechny vektory.)

Z toho také vyplývá důležité pozorování: Počet řetízků příslušných vlastnímu číslu λ délky alespoň l je roven $\dim \text{Ker}(f - \lambda \text{id})^l - \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{id})^{l-1}$.

Obraz rovněž spočteme obdobně jako v případě $l = 1$.

Příklad 9.73. Vráťme se k příkladu 9.72. Operátory $(f - 7\text{id})^2$, $(f - 7\text{id})^3$ mají vzhledem k B matici

$$(J - 7I_8)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, (J - 7I_8)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Jádra jsou

$$\text{Ker}(J - 7I_8)^2 = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5 \rangle, \text{Ker}(J - 7I_8)^3 = \text{Ker}(J - 7I_8)^4 = \dots = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6 \rangle$$

a proto

$$\text{Ker}(f - 7\text{id})^2 = \langle \mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2, \mathbf{v}_1^3, \mathbf{v}_2^3 \rangle, \text{Ker}(f - 7\text{id})^3 = \langle \mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2, \mathbf{v}_1^3, \mathbf{v}_2^3, \mathbf{v}_3^3 \rangle.$$

Obrazy jsou

$$\text{Im}(J - 7I_8)^2 = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8 \rangle, \text{Im}(J - 7I_8)^3 = \text{Im}(J - 7I_8)^4 = \dots = \langle \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8 \rangle$$

a proto

$$\text{Im}(f - 7\text{id})^2 = \langle \mathbf{v}_1^3, \mathbf{v}_1^4, \mathbf{v}_2^4 \rangle, \text{Im}(f - 7\text{id})^3 = \langle \mathbf{v}_1^4, \mathbf{v}_2^4 \rangle.$$

Shrneme nabyté poznatky.

Tvrzení 9.74. *Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je operátor na prostoru \mathbf{V} dimenze n a B je báze vzniklá spojením Jordanových řetízků operátoru f . Pak platí:*

- (1) *Operátor f má n vlastních čísel včetně násobnosti.*
- (2) *Pro libovolné vlastní číslo λ operátoru f je jeho algebraická násobnost rovna součtu délek Jordanových řetízků v B příslušných vlastnímu číslu λ .*
- (3) *Pro libovolné vlastní číslo λ operátoru f a libovolné $l \in \mathbb{N}$ je jádro operátoru $(f - \lambda \text{id})^l$ rovno lineárnímu obalu l počátečních vektorů z každého řetízku v B příslušnému vlastnímu číslu λ (z řetízků délky menší než l bereme všechny vektory.)*
- (4) *Pro libovolné vlastní číslo λ operátoru f a libovolné $l \in \mathbb{N}$ je obraz operátoru $(f - \lambda \text{id})^l$ roven lineárnímu obalu všech vektorů v B kromě l koncových vektorů z řetízků příslušných vlastnímu číslu λ (z řetízků příslušných vlastnímu číslu λ délky menší než l nebereme žádný vektor).*

Speciálně pro libovolné vlastní číslo λ operátoru f platí:

- (5) *Geometrická násobnost vlastního čísla λ je rovná počtu řetízků v B příslušných vlastnímu číslu λ a prostor $M_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ je roven lineárnímu obalu počátečních vektorů těchto řetízků.*

(6) Počet řetízků příslušných vlastnímu číslu λ délky alespoň l je roven

$$z_l = \dim \operatorname{Ker} (f - \lambda \operatorname{id})^l - \dim \operatorname{Ker} (f - \lambda \operatorname{id})^{l-1} .$$

(Aby měl výraz smysl i pro $l = 1$ definujeme $(f - \lambda \operatorname{id})^0 = \operatorname{id}$.)

(7) Počet řetízků příslušných vlastnímu číslu λ délky právě l je $z_l - z_{l+1}$.

Z prvního bodu vyplývá nutná podmínka pro existenci Jordanova kanonického tvaru – operátor musí mít dostatek vlastních čísel (včetně násobností). Tato podmínka je i dostačující podle následující důležité věty.

Věta 9.75 (o Jordanově kanonickém tvaru). *Buď $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n . Pak jsou následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) Pro operátor f existuje Jordanův kanonický tvar.
- (2) Operátor f (resp. matice A) má n vlastních čísel včetně algebraických násobností.

Důsledek 9.76. *Pro každý operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na konečně dimenzionálním prostoru \mathbf{V} nad tělesem komplexních čísel \mathbb{C} existuje Jordanův kanonický tvar.*

Důkaz chybějící implikace odložíme na později. Poznamenejme, že Jordanův tvar operátoru je určen jednoznačně ve smyslu, že jsou-li matice $[f]_B^B$ a $[f]_C^C$ obě v Jordanově tvaru, pak se mohou lišit pouze pořadím Jordanových buněk. To vyplývá z tvrzení 9.74, protože matice je určena vlastními čísly λ operátoru, jejich algebraickou násobností, a dimenzemi podprostorů $\operatorname{Ker} (f - \lambda \operatorname{id}_{\mathbf{V}})^l$. Těmto číselným charakteristikám operátoru f říkáme *algebraické invarianty operátoru f* .

Algoritmus pro hledání Jordanova tvaru je možné odvodit z tvrzení 9.74. Obecná diskuze by byla dost nepřehledná, proto ukážeme postup na příkladech.

9.4.6. *Jordanův tvar v dimenzi 2.* Jediný případ, kdy má operátor f na prostoru dimenze 2 dvě vlastní čísla včetně násobností a není diagonalizovatelný je situace, kdy f má vlastní číslo λ algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 1. V tom případě máme jeden Jordanův řetízek délky 2.

Příklad 9.77. Uvažujme operátor f_A na \mathbb{R}^2 určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} .$$

Charakteristický polynom je $p_A(t) = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$. Operátor f_A má vlastní číslo -1 algebraické násobnosti 2, existuje pro něj proto Jordanův kanonický tvar.

Spočítáme $M_{-1} = \operatorname{Ker} (f_A + \operatorname{id})$.

$$M_{-1} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Geometrická násobnost vlastního čísla -1 je 1. Operátor není diagonalizovatelný a budeme hledat Jordanův řetízek délky 2:

$$\mathbf{v}_2 \xrightarrow{f_A + \operatorname{id}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{f_A + \operatorname{id}} \mathbf{0} .$$

Vektor \mathbf{v}_1 zvolíme jako libovolný nenulový vlastní vektor, například $\mathbf{v}_1 = (1, 2)^T$.

Podle tvrzení 9.74 je $\text{Im}(f_A + \text{id}) = \text{Ker}(f_A + \text{id}) = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$, takže speciálně $\mathbf{v}_1 \in \text{Im}(f_A + \text{id})$, proto můžeme vždy počáteční vektor \mathbf{v}_1 doplnit vektorem \mathbf{v}_2 , aby platilo $(f_A + \text{id})(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$. Najdeme takový vektor \mathbf{v}_2 :

$$(A + \text{id})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{např. } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podle věty 9.71 o lineární nezávislosti zobecněných vlastních vektorů je $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ báze (v takto malém případě to vidíme okamžitě, ve větších dimenzích už ne nutně). Matice f_A vzhledem k B je

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9.4.7. *Jordanův tvar v dimenzi 3.* Pro nedagonalizovatelný operátor na prostoru dimenze 3 s třemi vlastními čísly včetně násobností můžou nastat následující možnosti.

- (1) Operátor f má dvě různá vlastní čísla λ_1, λ_2 , kde λ_1 má algebraickou (i geometrickou) násobnost 1 a λ_2 má algebraickou násobnost 2 a geometrickou násobnost 1, v tom případě máme jeden řetízek délky 1 příslušný λ_1 a jeden řetízek délky 2 příslušný λ_2 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_1^1 & \xrightarrow{f - \lambda_1 \text{id}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_2^2 & \xrightarrow{f - \lambda_2 \text{id}} & \mathbf{v}_1^2 & \xrightarrow{f - \lambda_2 \text{id}} & \mathbf{0} \end{array}$$

- (2) Operátor f má vlastní číslo λ algebraické násobnosti 3 a geometrické násobnosti 2. Pak máme dva řetízky příslušné vlastnímu číslu λ a tím pádem nutně jeden z nich má délku 1 a druhý má délku 2:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_1^1 & \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_2^2 & \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} & \mathbf{v}_1^2 & \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} & \mathbf{0} \end{array}$$

- (3) Operátor f má vlastní číslo λ algebraické násobnosti 3 a geometrické násobnosti 1. Pak máme jede řetízek délky 3:

$$\mathbf{v}_3 \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} \mathbf{v}_3 \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} \mathbf{v}_3 \xrightarrow{f - \lambda \text{id}} \mathbf{0}$$

Příklad 9.78. Uvažujme operátor $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom operátoru f_A je $p_A(t) = -t^3 + t^2 + t - 1 = -(t-1)^2(t+1)$. Vlastní čísla operátoru A jsou 1 (algebraická násobnost je 2) a -1 (s algebraickou násobností 1), existuje pro něj Jordanův tvar. Příslušné prostory vlastních vektorů jsou

$$M_1 = \text{Ker}(f_A - \text{id}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad M_{-1} = \text{Ker}(f_A + \text{id}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geometrická násobnost vlastního čísla 1 je 1, takže operátor není diagonalizovatelný a Jordanovy řetízky budou tvaru

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_1^1 & \xrightarrow{f_A + \text{id}} & \mathbf{o} \\ \mathbf{v}_2^2 & \xrightarrow{f_A - \text{id}} & \mathbf{v}_1^2 \xrightarrow{f_A - \text{id}} \mathbf{o} \end{array}$$

Za vektor \mathbf{v}_1^1 zvolíme libovolný nenulový vektor z M_{-1} , např. $\mathbf{v}_1^1 = (0, 1, 0)^T$. Za vektor \mathbf{v}_1^2 zvolíme libovolný nenulový vektor z M_1 , např. $\mathbf{v}_1^2 = (1, 0, 2)^T$, protože (podobně jako v příkladu 9.77) z tvrzení 9.74 plyne, že $\mathbf{v}_1^2 \in \text{Im}(f_A - \text{id})$, takže řetízky můžeme doplnit. Řešením soustavy

$$(A - I_3)\mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_1^1, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

najdeme například vektor $\mathbf{v}_2^2 = (0, 0, 1)^T$. Podle věty 9.71 je $B = (\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2)$ bází prostoru \mathbb{R}^3 . Matice operátoru f_A vzhledem k B je

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9.79. Uvažujme operátor $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom operátoru f_A vyjde $p_A(t) = -t^3$. Operátor f_A má vlastní číslo 0 algebraické násobnosti 3, existuje pro něj Jordanův tvar. Prostor vlastních vektorů příslušných nule je

$$M_0 = \text{Ker}(f_A - 0 \text{id}) = \text{Ker } f_A = \text{Ker } A = \left\langle \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle.$$

Geometrická násobnost vlastního čísla 0 je 2, proto operátor není diagonalizovatelný, budeme mít dva Jordanovy řetízky tvaru

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_1^1 & \xrightarrow{f_A} & \mathbf{o} \\ \mathbf{v}_2^2 & \xrightarrow{f_A} & \mathbf{v}_1^2 \xrightarrow{f_A} \mathbf{o} \end{array}$$

Podle tvrzení 9.74 je $\text{Im } f_A = \langle \mathbf{v}_1^2 \rangle$ a $\text{Ker } f_A = \langle \mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2 \rangle$. Při hledání vektorů v řetízku postupujeme od počátku nejdelšího řetízku. Vektor \mathbf{v}_1^2 zvolíme v $\text{Im } f_A$, např. $\mathbf{v}_1^2 = (2, 0, 1)^T$. Pak je $\mathbf{v}_1^2 \in \text{Ker } f_A$. Doplníme \mathbf{v}_1^2 na bázi $(\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_1^1)$ prostoru $\text{Ker } f_A$, třeba vektorem $\mathbf{v}_1^1 = (-1, 1, 0)^T$. Nakonec najdeme \mathbf{v}_2^2 tak, aby $f_A(\mathbf{v}_2^2) = \mathbf{v}_1^2$. To musí jít, protože $\mathbf{v}_1^2 \in \text{Im } f_A$. Řešením rovnice $A\mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_1^2$ je například vektor $\mathbf{v}_2^2 = (1, 0, 0)^T$.

Počátky řetízku tvoří z konstrukce lineárně nezávislou posloupnost, takže podle věty 9.71 je $B = (\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2)$ báze prostoru \mathbb{R}^3 . Matice operátoru f_A vzhledem k B

je

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9.80. Uvažujme operátor $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom operátoru f_A je $p_A(t) = -(t+1)^3$, máme jedno vlastní číslo -1 algebraické násobnosti 3.

$$M_{-1} = \text{Ker}(f_A + \text{id}) = \text{Ker}(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Geometrická násobnost vlastního čísla -1 je 1. Operátor f_A není diagonalizovatelný, existuje pro něj Jordanův tvar a příslušná báze B bude obsahovat jeden řetízek

$$\mathbf{v}_3 \xrightarrow{f_A + \text{id}} \mathbf{v}_2 \xrightarrow{f_A + \text{id}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{f_A + \text{id}} \mathbf{0}.$$

Podle tvrzení 9.74 je $\text{Ker}(f_A + \text{id}) = \text{Im}(f_A + \text{id})^2 = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$, takže za počátek můžeme zvolit libovolný nenulový vektor v tomto prostoru, například $\mathbf{v}_1 = (0, 2, 1)^T$. Vektor \mathbf{v}_2 musíme zvolit tak, aby $(f_A + \text{id})(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$ a aby ležel v $\text{Im}(f_A + \text{id})$, abychom pak mohli nalézt vektor \mathbf{v}_3 . První podmínka je

$$(A + \text{id})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy je $(0, 1, 0)^T + \langle (0, 2, 1)^T \rangle = (0, 1, 0)^T + \text{Ker}(A + \text{id})$. Některý z takových vektorů leží v $\text{Im}(f_A + \text{id})$, protože ale $\text{Ker}(f_A + \text{id}) \subseteq \text{Im}(f_A + \text{id})$ (viz opět tvrzení 9.74), každý z těchto vektorů leží v $\text{Im}(f_A + \text{id})$. Druhá podmínka je splněná v tomto případě automaticky a můžeme zvolit třeba $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)^T$. (Pokud bychom měli více řetízků, neplatilo by $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \subseteq \text{Im}(f - \lambda \text{id})$, takže volba by nemohla být libovolná.) Nakonec najdeme vektor \mathbf{v}_3 , aby $(f_A + \text{id})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$. Můžeme vzít například $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 0)^T$.

Podle věty 9.71 je $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ báze prostoru \mathbb{R}^3 . Matice operátoru f_A vzhledem k B je

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9.4.8. *Jordanův tvar ve vyšších dimenzích.* Do dimenze 3 je možné o počtu a délkách řetízků rozhodnout pouze z algebraických a geometrických násobností. Stejně je tomu v dimenzi 4 kromě případu, že má operátor vlastní číslo λ algebraické násobnosti 4 a geometrické násobnosti 2. Pak má bázi ze dvou Jordanových řetízků, nevíme ale, jsou-li oba délky 2, nebo jeden z nich délky 1 a druhý délky 3.

Příklad 9.81. Uvažujme operátor $f_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem charakteristického polynomu zjistíme, že f_A má jediné vlastní číslo algebraické násobnosti 4. Prostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 0 je

$$M_0 = \left\langle \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle.$$

Geometrická násobnost nuly je 2, takže hledaná báze B , vzhledem ke které je $[f]_B^B$ v Jordanově tvaru, bude spojením dvou řetízků příslušných vlastnímu číslu 0. Nevíme, ale zda délky budou 1, 3 nebo 2, 2. Vypočteme proto ještě jádro operátoru $(f_A - 0 \text{id})^2$.

$$\text{Ker}(f_A - 0 \text{id})^2 = \text{Ker} A^2 = \text{Ker} 0_{4 \times 4} = \mathbb{R}^4.$$

Dimenze jádra operátoru $(f_A + 0 \text{id})^2$ je o 2 vyšší než dimenze jádra operátoru $(f_A + 0 \text{id})$, takže podle tvrzení 9.74 budou v B právě 2 řetízky délky alespoň 2. Tím pádem je B složením řetízků

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{v}_2^1 & \xrightarrow{f_A} & \mathbf{v}_1^1 & \xrightarrow{f_A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_2^2 & \xrightarrow{f_A} & \mathbf{v}_1^2 & \xrightarrow{f_A} & \mathbf{0} \end{array}$$

Protože (opět podle tvrzení 9.74) je $\text{Im} f_A = \text{Ker} f_A = \langle \mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2 \rangle$, můžeme za $\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2$ zvolit libovolnou bázi $\text{Ker} f_A$, například $\mathbf{v}_1^1 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_1^2 = (1, 0, 1, 0)$, a pak nalézt vektory \mathbf{v}_2^1 a \mathbf{v}_2^2 tak, aby $f_A(\mathbf{v}_2^1) = \mathbf{v}_1^1$ a $f_A(\mathbf{v}_2^2) = \mathbf{v}_1^2$, třeba $\mathbf{v}_2^1 = (0, 1, 0, 0)^T$ a $\mathbf{v}_2^2 = (1, 0, 0, 0)^T$. Pak $B = (\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2)$ je podle věty 9.71 báze a platí

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9.82. Uvažujme operátor $f_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom vyjde $p_A(t) = (t - 4)^4$, operátor f_A má vlastní číslo 4 algebraické násobnosti 4.

$$M_2 = \text{Ker}(f_A - 4 \text{id}) = \text{Ker}(A - 4I_4) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle.$$

Geometrická násobnost vlastního čísla 4 je 2. Operátor bude mít dva řetízky. Abychom zjistili jejich délky spočítáme $\text{Ker}(f_A - 4\text{id})^2$.

$$\text{Ker}(f_A - 4\text{id})^2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dimenze je o 1 vyšší než dimenze $\text{Ker}(A - 4I_4)$, takže počet řetízků délky alespoň 2 je 1. Hledaná báze B je tedy spojením řetízku délky 1 a řetízku délky 3.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathbf{v}_1^1 & \xrightarrow{f_A - 4\text{id}} & \mathbf{o} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \mathbf{v}_3^2 & \xrightarrow{f_A - 4\text{id}} & \mathbf{v}_2^2 & \xrightarrow{f_A - 4\text{id}} & \mathbf{v}_1^2 & \xrightarrow{f_A - 4\text{id}} & \mathbf{o} \end{array}$$

Protože $\text{Im}(f - 4\text{id})^2 = \langle \mathbf{v}_1^2 \rangle$ vektor \mathbf{v}_1^2 zvolíme v tomto prostoru, např. $\mathbf{v}_1^2 = (1, 1, 1, 1)^T$. Je $\text{Ker}(f - 4\text{id}) = \langle \mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2 \rangle$, doplníme vektor \mathbf{v}_1^2 na bázi prostoru $\text{Ker}(f - 4\text{id})$, například vektorem $\mathbf{v}_1^1 = (1, 0, 0, 1)^T$.

Vektor \mathbf{v}_2^2 musíme zvolit tak, aby $(f_A - 4\text{id})(\mathbf{v}_2^2) = \mathbf{v}_1^2$ a aby $\mathbf{v}_2^2 \in \text{Im}(f_A - 4\text{id})$ (druhou podmínku již nemůžeme ignorovat jako v příkladu...). Množina všech řešení soustavy $(A - 4I_4)\mathbf{v}_2^2 = (1, 1, 1, 1)^T$ je

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Obraz operátoru $f_A - 4\text{id}$ je lineární obal sloupců matice $A - 4I_4$, což je $\langle (1, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 1)^T \rangle$. Oběma podmínkám vyhovuje například vektor $\mathbf{v}_2^2 = (1, 1, 0, 0)^T$. Nyní už stačí vzít libovolný vektor \mathbf{v}_3^2 , aby $(f_A - 4\text{id})\mathbf{v}_3^2 = \mathbf{v}_2^2$, např. $\mathbf{v}_3^2 = (1, 0, 0, 0)^T$.

Podle věty 9.71 je $B = (\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^2, \mathbf{v}_3^2)$ báze. Vzhledem k B má operátor f matici

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Na příkladu si rozmyslíme postup v ještě vyšší dimenzi.

Příklad 9.83. Operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ na prostoru \mathbf{V} dimenze 15 splňuje následující podmínky:

- (1) f má vlastní číslo 31 algebraické násobnosti 11 a vlastní číslo 47 algebraické násobnosti 4,
- (2) $\dim \text{Ker}(f - 31\text{id}) = 4$, $\dim \text{Ker}(f - 47\text{id}) = 2$
- (3) $\dim \text{Ker}(f - 31\text{id})^2 = 7$, $\dim \text{Ker}(f - 47\text{id})^2 = 3$
- (4) $\dim \text{Ker}(f - 31\text{id})^3 = 9$.
- (5) $\dim \text{Ker}(f - 31\text{id})^4 = 11$.

Rozmyslíme si, že existuje báze B , pro které je $[f]_B^B$ v Jordanově tvaru, z jakých bloků se $[f]_B^B$ skládá a jak bychom takovou bázi hledali.

Z prvních podmínek vidíme, že pro f existuje Jordanův kanonický tvar, celkový počet vektorů v řetízcích příslušným vlastnímu číslu 31 je 11 a celkový počet vektorů v řetízcích příslušných vlastnímu číslu 47 je 4.

spojením Jordanových řetízků matice A ke kanonické bázi a $J = [f_A]_B^B$.) Úpravou dostaneme $A = RJR^{-1}$ a rovnici můžeme ekvivalentně přepsat

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= RJR^{-1}\mathbf{x}(t) \\ R^{-1}\mathbf{x}'(t) &= JR^{-1}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

Definujeme $\mathbf{y}(t) = R^{-1}\mathbf{x}(t)$ a dostaneme

$$\mathbf{y}'(t) = J\mathbf{y}(t)$$

Původní funkce $\mathbf{x}(t)$ dopočteme ze vztahu $\mathbf{x}(t) = R\mathbf{y}(t)$.

Stačí tedy umět řešit diferenciální rovnice tvaru $\mathbf{y}'(t) = J\mathbf{y}(t)$, kde J je v Jordanově tvaru. Pro diagonální matici J jsem v 9.3.6 ukázali, že řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

funkce

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(0)e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ y_n(0)e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{pmatrix}.$$

Pro Jordanovu buňku řádu 2 potřebujeme vyřešit soustavu

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

neboli soustavu

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= \lambda y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= \lambda y_2(t).\end{aligned}$$

(V řeči operátorů: $y_2(t)$ je vlastním vektorem operátoru derivování, $y_1(t)$ je zobecněným vlastním vektorem.) Z druhé rovnice máme $y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda t}$. Dosazením do první rovnice dostáváme

$$y_1'(t) = \lambda y_1(t) + y_2(0)e^{\lambda t}.$$

Uhádneme, že řešení bude tvaru $y_1(t) = cte^{\lambda t} + de^{\lambda t}$ (jak na to přijít přenecháme do kurzu analýzy). Zderivováním a dosazením vyjde

$$\begin{aligned}ce^{\lambda t} + c\lambda te^{\lambda t} + d\lambda e^{\lambda t} &= \lambda(cte^{\lambda t} + de^{\lambda t}) + y_2(0)e^{\lambda t} \\ (c - y_2(0))e^{\lambda t} &= 0.\end{aligned}$$

Z toho plyne, že pro $c = y_2(0)$ je funkce $y_1(t)$ skutečně řešením. Dosazením $t = 0$ do $y_1(t) = cte^{\lambda t} + de^{\lambda t}$ dostaneme $d = y_1(0)$. Řešením soustavy jsou tedy funkce

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(0)te^{\lambda t} + y_1(0)e^{\lambda t} \\ y_2(0)e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

Podobně jako v příkladu 9.15 lze odvodit, že jiná řešení neexistují (ukáže se, že derivace funkce $(f - cte^{\lambda t})e^{-\lambda t}$ je rovna 0).

Příklad 9.84. Vyřešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

s počáteční podmínkou $x_1(0) = 3, x_2(0) = 4$. V příkladu 9.77 jsme vypočetli, že vzhledem k bázi $B = ((1, 2)^T, (0, -1)^T)$ je $[f]_B^B = J_{-1,2}$, tj. platí

$$J = RAR^{-1}, \text{ kde } J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ a } R = [\text{id}]_K^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Původní soustavu si přepíšeme do tvaru

$$R^{-1} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Označíme-li

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

platí

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

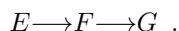
Řešením je

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix},$$

takže

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= R \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \\ &= R \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3e^{-t} + 2te^{-t} \\ 4e^{-t} + 4te^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Příklad 9.85. Tři chemikálie E, F, G spolu reagují podle schématu



To znamená, že E se při reakci mění na F a F se mění na G . Rychlost přeměny je přímo úměrná koncentraci, pro jednoduchost bude v naší reakci koeficient úměrnosti rovný 1. Na začátku, v čase $t = 0$, bude přítomná pouze chemikálie E . Zajímá nás, jak se budou koncentrace vyvíjet

Označme $\mathbf{x}(t) = (x_E(t), x_F(t), x_G(t))^T$ vektor koncentrací v čase t . Z popisu reakce vyplývá, že koncentrace splňují

$$\begin{aligned} x_E'(t) &= -x_E(t) \\ x_F'(t) &= x_E(t) - x_F(t) \\ x_G'(t) &= x_F(t). \end{aligned}$$

Navíc víme, že $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)^T$. Maticově zapsáno máme

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \text{kde } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nyní již stačí aplikovat probraný postup. Zjistíme, že matice A je rovná

$$A = RJR^{-1}, \quad \text{kde } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(R je matice přechodu od báze B tvořené spojením Jordanových řetízků a $J = [f_A]_B^B$.) Označíme $\mathbf{y}(t) = R\mathbf{x}(t)$ a původní soustava se přepíše na

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= J\mathbf{y}(t) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0t} \end{pmatrix} \mathbf{y}(0). \end{aligned}$$

Z toho

$$\mathbf{x}(t) = R^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0t} \end{pmatrix} R\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \\ -e^{-t} - te^{-t} + 1 \end{pmatrix}$$

Koncentrace chemikálií E, F, G v čase t tedy bude $x_E(t) = e^{-t}$, $x_F(t) = te^{-t}$, $x_G(t) = -e^{-t} - te^{-t} + 1$.

OBRAZEK

Poznamme, že obecněji pro Jordanovu buňku $J_{\lambda, n}$ jsou řešením soustavy $\mathbf{y}'(t) = J_{\lambda, n}\mathbf{y}(t)$ funkce

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_{n-1}(0) \\ y_n(0) \end{pmatrix}.$$

9.4.10. *Invariantní podprostory.* Invariantní podprostory operátoru f jsou podprostory, které operátor f zachovává v následujícím smyslu.

Definice 9.86. Je-li $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na vektorovém prostoru \mathbf{V} , pak podprostor $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ nazýváme *invariantní podprostor operátoru f* , pokud platí pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, že také $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}$.

Invariantní podprostor čtvercové matice A definujeme jako invariantní podprostor operátoru f_A určeného maticí A .

Příklad 9.87. Každý operátor má dva triviální invariantní podprostory $\{\mathbf{o}\}$ a \mathbf{V} .

Z geometrického náhledu vidíme, že rotace v \mathbb{R}^2 má pouze triviální invariantní podprostory.

Osová souměrnost v \mathbb{R}^2 podle přímky $\langle \mathbf{v} \rangle$ má kromě triviálních podprostorů ještě dva invariantní podprostory: $\langle \mathbf{v} \rangle$ a \mathbf{v}^\perp (ortogonální doplněk je vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.)

Pro rotaci v \mathbb{R}^3 kolem přímky $\langle \mathbf{p} \rangle$ jsou $\langle \mathbf{p} \rangle$ a \mathbf{p}^\perp invariantní podprostory. Rotace o π má ještě další invariantní podprostory.

Každý podprostor prostoru \mathbf{V} je invariantním podprostorem operátoru id a také operátoru t id pro libovolný skalár t .

Tvrzení 9.88. *Pro každý lineární operátor $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ jsou následující podprostory \mathbf{V} invariantní podprostory operátoru f :*

- (1) $\text{Ker}(f)$,
- (2) $\text{Im}(f)$,
- (3) podprostor $\langle \mathbf{u} \rangle$ generovaný libovolným nenulovým vlastním vektorem \mathbf{u} operátoru f ,
- (4) obecněji, podprostor $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ generovaný Jordanovým řetízkem $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ operátoru f příslušným vlastním číslu λ .

Důkaz. Bod (1) je triviální.

Pro důkaz (2) uvažujme libovolný vektor $\mathbf{x} \in \text{Im}(f)$. Pak existuje vektor $\mathbf{y} \in \text{Im}(f)$ takový, že $f(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Obrazem vektoru \mathbf{x} je vektor $f(\mathbf{x}) = f(f(\mathbf{y}))$, takže $f(\mathbf{x}) \in \text{Im} f$.

Bod (3) je speciálním případem bodu (4).

Pro důkaz (4) uvažujme libovolný vektor $\mathbf{x} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_k \mathbf{v}_k$. Jeho obraz je po úpravě

$$f(\mathbf{x}) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + a_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + a_k f(\mathbf{v}_k) = a_1 \lambda \mathbf{v}_1 + a_2 (\lambda \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) + \dots + a_k (\lambda \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}).$$

Výraz na pravé straně jde vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, takže skutečně $f(\mathbf{x}) \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$. \square

Další invariantní podprostory můžeme získat průniky a součty invariantních podprostorů.

Tvrzení 9.89. *Jsou-li \mathbf{U} a \mathbf{W} dva invariantní podprostory operátoru $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, pak jsou podprostory $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ a $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ rovněž invariantními podprostory operátoru f .*

Důkaz. Je-li $\mathbf{x} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, pak $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{U}$, protože \mathbf{U} je invariantní, a $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}$, protože \mathbf{W} je invariantní. Z toho plyne $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

Je-li $\mathbf{x} \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$, pak existují vektory $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ takové, že $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Z invariance \mathbf{U} a \mathbf{W} víme, že $f(\mathbf{u}) \in \mathbf{U}$ a $f(\mathbf{w}) \in \mathbf{W}$, proto $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{w}) \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$. \square

Z předchozích dvou tvrzení vyplývá, že lineární obal spojení libovolného počtu Jordanových řetízků nějakého operátoru je jeho invariantním podprostorem.

Je-li \mathbf{W} invariantní podprostor operátoru f , pak zúžení $g = f|_{\mathbf{W}}$ operátoru f na podprostor \mathbf{W} je lineární operátor na prostoru \mathbf{W} . Je zřejmé, že každé vlastní číslo operátoru $g = f|_{\mathbf{W}}$ je vlastním číslem operátoru f a každý vlastní vektor operátoru g je také vlastním vektorem operátoru f (příslušný stejnému vlastnímu číslu). Dokážeme silnější tvrzení. Metodu důkazu jsme použili už v důkazu věty o tom, že geometrická násobnost libovolného vlastního čísla operátoru f je nejvýše rovná jeho algebraické násobnosti.

Tvrzení 9.90. *Bud' $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně dimenzionálním prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} a $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ invariantní podprostor operátoru f . Potom charakteristický polynom zúžení $g = f|_W$ operátoru f na podprostor \mathbf{W} dělí charakteristický polynom operátoru f .*

Důkaz. Zvolme nějakou bázi $C = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ podprostoru \mathbf{W} a doplňme ji na bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} . Pro každý vektor \mathbf{v}_j , $j = 1, \dots, k$ platí $f(\mathbf{v}_j) \in W$, neboť \mathbf{W} je invariantní podprostor operátoru f . Vyjádření $[f(\mathbf{v}_j)]_B$ vektoru $f(\mathbf{v}_j)$ v bázi B proto bude mít složky $k+1, \dots, n$ nulové a vektor tvořený prvními k složkami bude rovný $[g(\mathbf{v}_j)]_C$. Matice $[f]_B^B$ operátoru f vzhledem k bázi B má potom blokový tvar

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & F \end{pmatrix},$$

kde $A = [g]_C^C$, F je nějaká čtvercová matice řádu $n-k$ a E je matice typu $k \times (n-k)$. Potom

$$[f]_B^B - \lambda I_n = \begin{pmatrix} A - \lambda I_k & E \\ 0 & F - \lambda I_{n-k} \end{pmatrix},$$

$p_f(\lambda) = \det([f]_B^B - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_k) \det(F - \lambda I_{n-k})$ a $p_g(\lambda) = \det([f]_C^C - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_k)$. Takže $p_g(\lambda)$ skutečně dělí $p_f(\lambda)$. \square

Formulujeme důležitý důsledek.

Důsledek 9.91. *Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je operátor na prostoru \mathbf{V} dimenze n a \mathbf{W} je invariantní podprostor operátoru f dimenze k . Pokud má operátor f právě n vlastních čísel včetně násobností, pak má operátor $g = f|_W : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ právě k vlastních čísel včetně násobností.*

Důkaz. Bez důkazu použijeme tvrzení, které dokážete v kurzu algebry: pokud se polynom rozkládá na lineární faktory, pak se na lineární faktory rozkládá i libovolný jeho dělitel.

Pokud má operátor f právě n vlastních čísel včetně násobností, pak se jeho charakteristický polynom $p_f(\lambda)$ rozkládá na lineární faktory. Polynom $p_g(\lambda)$ podle předchozího tvrzení dělí polynom $p_f(\lambda)$, z toho vyplývá, že se $p_g(\lambda)$ rovněž rozkládá na lineární faktory, operátor g má tedy k vlastních čísel včetně násobností. \square

Příklad 9.92. Uvažujme operátor $f = f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ukážeme, že $\mathbf{W} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (0, 1, 0)^T, (1, 1, 2)^T \rangle$ je jeho invariantní podprostor. Platí $f(\mathbf{u}) = (0, -1, 0)^T$ a $f(\mathbf{v}) = (1, -1, 2)^T$. Obrazy obou generátorů jsou lineární kombinace vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} :

$$f(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}, \quad f(\mathbf{v}) = -2\mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

Z toho vyplývá, že každý vektor z W se zobrazí do W : Je-li totiž $\mathbf{x} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, pak $f(\mathbf{x}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v})$. Podprostor \mathbf{W} je tedy invariantní podprostor operátoru f . (Operátor f_A je shodný s operátorem v příkladu 9.78, podprostor \mathbf{W} je rovný lineárnímu obalu vlastních vektorů.)

Podívejme se ještě na operátor $g = f|_W$. Jeho matice vzhledem k bázi $C = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je

$$[g]_C^C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom operátoru g je $p_g(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ a příslušné vlastní podprostory jsou

$$[M_1]_C = \left\langle \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle, \quad [M_{-1}]_C = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle,$$

neboli

$$M_1 = \langle -u + v \rangle = \langle (1, 0, 2)^T \rangle, \quad M_{-1} = \langle u \rangle = \langle (0, 1, 0)^T \rangle$$

Matice operátoru g vzhledem k bázi $D = ((1, 0, 2)^T, (0, 1, 0)^T)$ je

$$[g]_D^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geometricky, operátor g je reflexe podle přímky $\langle (1, 0, 2)^T \rangle$ ve směru přímky $\langle (0, 1, 0)^T \rangle$. To nám dává představu, jak operátor f „vypadá“ v rovině \mathbf{W} .

Pro ilustraci předchozího tvrzení ještě uveďme, že $p_f(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. Polynom $p_g(\lambda)$ skutečně tělí polynom $p_f(\lambda)$.

Na závěr si ještě všimneme, že množina operátorů, pro které je daný podprostor \mathbf{W} prostoru \mathbf{V} invariantní, je uzavřená na sčítání a násobení skalárem, neboli tato množina operátorů tvoří podprostor prostoru $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$.

Tvrzení 9.93. *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor, \mathbf{W} jeho podprostor, f, g lineární operátory na \mathbf{V} a $t \in T$. Pak platí:*

- (1) *Je-li \mathbf{W} invariantní podprostor operátorů f i g , pak je \mathbf{W} invariantní podprostor operátoru $f + g$.*
- (2) *Je-li \mathbf{W} invariantní podprostor operátoru f , pak je \mathbf{W} invariantní podprostor operátoru tf .*

Důkaz. (1). Je-li $\mathbf{x} \in W$ a $f(\mathbf{x}) \in W$, $g(\mathbf{x}) \in W$, pak $(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \in W$.
 (2). Je-li $\mathbf{x} \in W$ a $f(\mathbf{x}) \in W$, pak $(tf)(\mathbf{x}) = t(f(\mathbf{x})) \in W$. \square

Například, je-li \mathbf{W} invariantní podprostor operátoru f , pak je také invariantním podprostorem operátoru $f - \lambda \text{id}$ pro libovolné $\lambda \in T$.

9.4.11. *Důkaz věty o Jordanově kanonickém tvaru.* Nyní dokážeme chybějící implikaci ve větě 9.75 o Jordanově kanonickém tvaru. Předpokládejme, že \mathbf{V} je konečně generovaný prostor dimenze n a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární operátor, který má n vlastních čísel včetně algebraických násobností. Chceme dokázat, že pro operátor f existuje Jordanův kanonický tvar.

Větu dokážeme tak, že najdeme bázi \mathbf{V} , která je spojením Jordanových řetízků operátoru \mathbf{V} . Postupovat budeme indukcí podle dimenze n .

Je-li $n = 1$, matice f vzhledem k jakékoliv bázi B prostoru \mathbf{V} má řád 1 a je tedy Jordanovo buňkou a báze B je tvořena jedním Jordanovým řetízkem délky 1. Předpokládejme, že $n > 1$ a že tvrzení platí pro všechna menší n .

Označme λ libovolné vlastní číslo operátoru f a pro přehlednost označme $g = f - \lambda \text{id}$. Pak $\dim(\text{Ker } g) > 0$ (protože prostor $\text{Ker } g$ je tvořen vlastními vektory operátoru f příslušnými vlastními čísly λ) a podle věty o dimenzi jádra a obrazu je $\dim(\text{Im } g) = n - \dim(\text{Ker } g) < n$.

Podprostor $\text{Im } g$ je podle tvrzení 9.88 invariantním podprostorem operátoru g , takže také operátoru $f = g + \lambda \text{id}$ (viz tvrzení 9.93). Charakteristický polynom zúžení h operátoru f na $\text{Im } g$ dělí charakteristický polynom operátoru f , a ten má n vlastních čísel včetně násobností. Podle důsledku 9.91 má operátor h $\dim \text{Im } g$ vlastních čísel včetně násobností, takže na prostor $\text{Im } g$ můžeme použít indukční předpoklad. Existuje tedy báze C prostoru $\text{Im } g$, která je složením Jordanových řetízků operátoru h (ty jsou samořejmě rovněž Jordanovými řetízky operátoru f). Jordanovy řetízky příslušné vlastnímu číslu λ označíme podle schématu

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{v}_{k_1}^1 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \mathbf{v}_2^1 & \xrightarrow{g} & \mathbf{v}_1^1 & \xrightarrow{g} & \mathbf{o} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & \mathbf{v}_{k_r}^r & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \mathbf{v}_2^r & \xrightarrow{g} & \mathbf{v}_1^r & \xrightarrow{g} & \mathbf{o} \end{array}$$

(V bázi C mohou být ještě řetízky příslušné jiným vlastním číslům.) Počáteční vektory $\mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_1^r$ tvoří lineárně nezávislou posloupnost v $\text{Ker } g$, doplníme tyto vektory na bázi $(\mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_1^s)$ prostoru $\text{Ker } g$. Pro každé $i = 1, \dots, r$ leží koncový vektor $\mathbf{v}_{k_i}^i$ v prostoru $\text{Im } g$, existují proto vektory $\mathbf{v}_{k_i+1}^i$ takové, že $g(\mathbf{v}_{k_i+1}^i) = \mathbf{v}_{k_i}^i$. Tím nám vznikne soubor řetízků

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{v}_{k_1+1}^1 & \xrightarrow{g} & \mathbf{v}_{k_1}^1 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \mathbf{v}_2^1 & \xrightarrow{g} & \mathbf{v}_1^1 & \xrightarrow{g} & \mathbf{o} \\ & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & \mathbf{v}_{k_r+1}^r & \xrightarrow{g} & \mathbf{v}_{k_r}^r & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \mathbf{v}_2^r & \xrightarrow{g} & \mathbf{v}_1^r & \xrightarrow{g} & \mathbf{o} \\ & \mathbf{v}_1^{r+1} & \xrightarrow{g} & \mathbf{o} \\ & \vdots \\ & \mathbf{v}_1^s & \xrightarrow{g} & \mathbf{o} \end{array}$$

plus řetízky v bázi C , které přísluší jiným vlastním číslům. Zkonstruovali jsme novou posloupnost B , která je spojením Jordanových řetízků operátoru f . Zbývá ukázat, že B je báze.

Podle věty 9.71 je B lineárně nezávislá, protože počáteční vektory příslušné vlastnímu číslu λ tvoří z konstrukce lineárně nezávislou posloupnost a pro jiná vlastní čísla jsme nic nezměnili. Nyní stačí spočítat, že počet vektorů v B je n . V bázi C je $\dim \text{Im } g$ vektorů k nim jsme doplnili $\dim \text{Ker } g - r$ vektorů z $\text{Ker } g$ a poté jsme k existujícím řetízkům doplnili r vektorů, ke každému z r řetízků jeden. Dohromady je v B $\dim \text{Im } g + (\dim \text{Ker } g - r) + r = \dim \text{Im } g + \dim \text{Ker } g = n$ vektorů. Tím je důkaz ukončen.

9.4.12. *Cayleyho-Hamiltonova věta.* Uvažujme čtvercovou matici A řádu n nad tělesem \mathbf{T} (nebo operátor f na prostoru \mathbf{V} dimenze n). Posloupnost matic

$$(I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2})$$

(resp. operátorů $(\text{id}, f, f^2, \dots, f^{n^2})$) je lineárně závislá posloupnost v prostoru $\mathbf{T}^{n \times n}$ (resp. $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$), protože tento prostor má dimenzi n^2 . Existují proto skaláry

a_0, a_1, \dots takové, že

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = 0_{n \times n}$$

(resp. $a_0 \text{id} + a_1 f + \dots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$). Cayleyho-Hamiltonova věta říká, že taková závislost existuje mnohem dříve – stačí prvních $n + 1$ členů posloupnosti, přičemž za koeficienty lze vzít koeficienty charakteristického polynomu matice A (resp. polynomu f). Zhruba řečeno, každá matice (resp. každý operátor) je „kořenem“ svého charakteristického polynomu.

Definujeme dosazení matice (operátoru) do polynomu.

Definice 9.94. Nechť \mathbf{T} je těleso, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$ polynom s koeficienty a_0, \dots, a_n v \mathbf{T} , A čtvercová matice řádu k nad \mathbf{T} a f lineární operátor na prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} . *Dosazením matice A do polynomu $p(t)$ rozumíme matici*

$$p(A) = a_0 I_k + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n .$$

Dosazením operátoru f do polynomu $p(t)$ rozumíme operátor

$$p(f) = a_0 \text{id}_V + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n .$$

Příklad 9.95. Je-li f operátor na \mathbf{V} , pak dosazením operátoru f do polynomu $p(t) = t - 3$ je operátor $p(f) = f - 3 \text{id}$.

Příklad 9.96. Uvažujme reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Její charakteristický polynom je

$$p_A(t) = t^2 - 5t - 2 .$$

Dosazením matice A do tohoto polynomu získáme matici

$$p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ -10 & -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0_{2 \times 2} .$$

Před důkazem Cayleyho-Hamiltonovy věty si všimneme, že dosazování do součinu polynomů lze provádět po činitelích: Je-li $p(t) = p_1(t)p_2(t) \dots p_i(t)$, pak $p(A) = p_1(A)p_2(A) \dots p_i(A)$. Důvodem je, že při roznásobení maticového výrazu $p_1(A) \dots p_i(A)$ je koeficient u A^j stejný jako koeficient u t^j při roznásobování výrazu $p_1(t)p_2(t) \dots p_i(t)$ (pro každé $j \in \{0, \dots, i\}$). Podobně pro operátory $p(f) = p_1(f)p_2(f) \dots p_i(f)$.

Věta 9.97 (Cayleyho-Hamiltonova věta). *Je-li f lineární operátor na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} dimenze n nad tělesem \mathbf{T} (resp. je-li A čtvercová matice řádu n nad \mathbf{T}), pak $p_f(f) = 0$ (resp. $p_A(A) = 0$).*

Důkaz. Dokážeme si operátorovou verzi, maticovou přenecháme čtenáři. Větu dokážeme pouze v případě, že f má n vlastních čísel včetně násobností. V případě, že tomu tak není, je nutné napřed rozšířit těleso \mathbf{T} do většího tělesa tak, aby v tom větším tělese měl charakteristický polynom dostatek kořenů. To lze udělat vždy a bude to v kursu algebry ve druhém ročníku.

Označme $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ vlastní čísla operátoru f a l_1, \dots, l_m jejich násobností. Podle předpokladu je $l_1 + \dots + l_m = n$ a charakteristický polynom je proto

$$p_f(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{l_1} (t - \lambda_2)^{l_2} \dots (t - \lambda_m)^{l_m}$$

Podle věty 9.75 o Jordanově kanonickém tvaru existuje báze B taková, že $J = [f]_B^B$ je v Jordanově tvaru. Podle pozorování nad větou platí

$$p_f(f) = (-1)^n (f - \lambda_1 \text{id})^{l_1} (f - \lambda_2 \text{id})^{l_2} \cdots (f - \lambda_m \text{id})^{l_m}$$

a tedy

$$\begin{aligned} [p_f(f)]_B^B &= [(-1)^n (f - \lambda_1 \text{id})^{l_1} (f - \lambda_2 \text{id}) \cdots (f - \lambda_m \text{id})^{l_m}]_B^B \\ &= (-1)^n ([f - \lambda_1 \text{id}]_B^B)^{l_1} \cdots ([f - \lambda_m \text{id}]_B^B)^{l_m} \\ &= (-1)^n (J - \lambda_1 I_n)^{l_1} \cdots (J - \lambda_m I_n)^{l_m} \end{aligned}$$

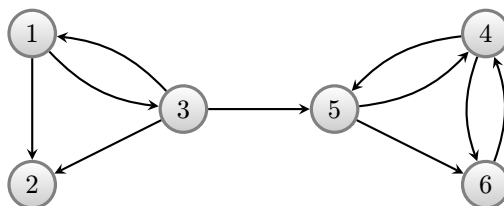
Matice v součinu jsou blokově diagonální (bloky odpovídají Jordanovým buňkám matice J), můžeme je násobit po blocích. Uvažujme libovolný blok K . Ten odpovídá nějaké Jordanově buňce $J_{\lambda_i, k}$, přičemž k je nejvýše l_i , protože velikost žádné buňky příslušné vlastnímu číslu λ_i nemůže být větší než jeho algebraická násobnost (viz tvrzení 9.74). Pak je ale $(J - \lambda_i I_n)^{l_i} = J_{0, k_i}^{l_i}$ nulová matice podle tvrzení 9.62, takže v celém součinu bude blok K nulový. Dokázali jsme, že $[p_f(f)]_B^B = 0_{n \times n}$, takže $p_f(f) = 0$. \square

9.5. Google. Ukážeme si jednu moderní aplikaci vlastních čísel a vlastních vektorů. Myšlenku uspořádání webových stránek podle důležitosti si napřed předvedeme na jednoduchém příkladu. Poté odvodíme obecnou formulaci problému.

Představme si malou síť šesti webových stránek, které na sebe odkazují. Odkazy si zapíšeme do matice $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 1$ právě když stránka j odkazuje na stránku i . Naše síť je zadána maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože $a_{21} = 1$, stránka 1 odkazuje na stránku 2. Dále $a_{23} = 1$, také stránka 3 odkazuje na stránku 2. Žádná jiná stránka na stránku 2 neodkazuje. Takto si můžeme nakreslit graf sítě.



OBRÁZEK 25. Google

Z vrcholu j vede šipka do i právě když stránka j odkazuje na stránku i . Matice A je tak maticí incidence grafu sítě. Z prvního semestru víme, že prvek na místě (i, j) v mocnině A^k říká, kolik orientovaných cest délky k vede z vrcholu j do vrcholu i .

Základní myšlenka vyhledávače Google spočívá v tom, že měří důležitost stránky pravděpodobností, s jakou se na stránku dostaneme náhodným klikáním. Důležitosti stránky se dopracujeme tak, že na začátku přiřadíme všem stránkám stejnou důležitost $1/6$. Počáteční aproximací vektoru důležitosti stránek tak bude vektor $\mathbf{r}_0 = (1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)^T$, i -tá složka je důležitost i -té stránky.

Nyní musíme matici incidence webu upravit tak, aby její hodnoty říkali, s jakou pravděpodobností klikneme na link ze stránky j na stránku i . Pokud ze stránky j vede více odkazů, řekněme k , pak na každý z nich klikneme s pravděpodobností $1/k$. Matici A si upravíme tak, že každou jednotku v j -tém sloupci nahradíme číslem $1/k$, kde k je počet prvků rovných 1 v j -tém sloupci matice A . Dostaneme tak matici

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všechny prvky matice H jsou nezáporné a součet každého sloupce se rovná buď 1 nebo 0. Druhá možnost nastane v případě, že z příslušné stránky nevede žádný odkaz. Jako třeba ze stránky s pdf souborem těchto přednášek.

První iteraci vektoru důležitosti stránek v naší síti pak získáme jako $\mathbf{r}_1 = H\mathbf{r}_0$. Složka i tohoto vektoru říká, s jakou pravděpodobností se na stránku i dostaneme z náhodně vybrané stránky po jednom kliknutí. Platí

$$\mathbf{r}_1 = H\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/18 \\ 5/36 \\ 1/12 \\ 1/4 \\ 5/36 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

Druhou iteraci vektoru důležitosti \mathbf{r}_2 dostaneme jako $H\mathbf{r}_1$. Můžeme ji slovně popsat tak, že uvádí, s jakou pravděpodobností se na i -tou stránku dostaneme jedním kliknutím z nějaké stránky, přičemž počáteční stránky volíme s pravděpodobnostmi danými vektorem \mathbf{r}_1 . Stránka je tedy tím „důležitější“, čím „důležitější“ stránky na ni odkazují. Vyjde

$$\mathbf{r}_2 = H\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/18 \\ 5/36 \\ 1/12 \\ 1/4 \\ 5/36 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/36 \\ 1/18 \\ 1/36 \\ 17/72 \\ 11/72 \\ 14/72 \end{pmatrix}.$$

Hledání vektoru důležitosti jednotlivých stránek tak vede na diferenční rovnici $\mathbf{r}_k = H\mathbf{r}_{k-1}$, která jak víme má řešení $\mathbf{r}_k = H^k\mathbf{r}_0$. Tento vektor můžeme interpretovat tak, že udává, s jakou pravděpodobností se dostaneme na danou stránku po k náhodných kliknutích.

Pro porovnávání důležitosti všech webových stránek bychom museli uvažovat matici celého webu, tedy matici řádu n , kde n je číslo v současnosti větší než třicet miliard. Každá iterace navíc vyžaduje spočítat součin matice tohoto řádu s jedním

n -složkovým vektorem, počet aritmetických operací je tak řádu n^2 . To všechno se zdá být zřehla nemožné. Nicméně matice H je velmi řídká, naprostá většina jejích prvků se rovná 0. Pro ty jsou vypracované efektivní metody ukládání. Dále v každém sloupci matice H je v průměru 10 odkazů na jiné stránky, aspoň tak je jejich počet odhadován. Takže součin matice s vektorem vyžaduje pouze $10n$ operací. A to už je v současnosti výpočetně zvládnutelné.

Popsaná diferenční rovnice vyvolává řadu důležitých otázek:

- Konverguje posloupnost vektorů \mathbf{r}_k k nějakému vektoru nebo je celý proces nestabilní?
- Může se stát, že posloupnost vektorů osciluje kolem několika různých limitních vektorů?
- Za jakých podmínek na matici H proces konverguje k jedinému vektoru?
- Pokud konverguje, dává výsledný limitní vektor dobrou míru důležitosti jednotlivých webových stránek?
- Závise konvergence na počáteční aproximaci \mathbf{r}_0 ?
- Pokud proces konverguje, kolik iterací musíme provést, abychom dostali dobrou aproximaci limitního vektoru?

Už při prvním hraní si s naším malých příkladem zjistíme jeden problém tohoto přístupu. Díky tomu, že v našem příkladu ze stránky 2 nevede žádný odkaz, důležitost této stránky se nijak neprojeví na důležitosti jiných stránek. Na druhou stranu při každé iteraci do sebe nasaje něco z důležitosti jiných stránek a celková suma důležitostí všech stránek se postupně snižuje. Stránkou 2 tak důležitost „odtéká“. Mnohem závažnější je skutečnost, že klastr stránek 4,5,6 odkazuje pouze na stránky 4,5,6, a žádná z nich neodkazuje na žádnou ze stránek 1,2,3, zatímco stránka 3 odkazuje na stránku 5 z tohoto klastru. Klastr stránek 4,5,6 tak bude akumulovat důležitost stránek z celé sítě. Skutečně, již třináctá iterace \mathbf{r}_{13} má první tři složky zanedbatelně malé a zbylé tři složky v poměru $(2/3) : (1/3) : (1/5)$.

Problém se stránkami, ze kterých nevede žádný odkaz, vyřešíme předpokladem, že z takové stránky můžeme náhodně přeskočit na jakoukoliv jinou stránku, na všechny se stejnou pravděpodobností. V našem malém příkladu je takovou stránkou stránka 2, nulový sloupec v matici H nahradíme sloupcem ze samých hodnot $1/6$. Dostaneme tak matici

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

V obecném případě bychom matici H nahradili maticí

$$S = H + \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{a}^T,$$

kde \mathbf{e} je sloupcový vektor se všemi složkami rovnými 1 a \mathbf{a} je vektor, jehož j -tá složka je rovna 1, pokud z j -té stránky nevede žádný odkaz, a rovná se 0, pokud z j -té stránky nějaký odkaz na jinou stránku vede. Matice S je markovovská matice, to znamená, že její prvky jsou nezáporné a každý sloupec má součet rovný 1. O takových maticích už víme, že číslo 1 je jejich vlastním číslem.

Problém klastru stránek, které akumulují důležitost všech ostatních stránek, touto úpravou nevyřešíme. V našem příkladu bude pořád platit, že mezi klastrem stránek 1,2,3 a klastrem stránek 4,5,6 vedou odkazy pouze jednosměrně, ze stránek 1,2,3 na stránky 4,5,6. Naše brouzdání po webu upravíme ještě jedním způsobem. Zvolíme si nějaké číslo $\alpha \in (1/2, 1)$. Toto číslo je pravděpodobnost, se kterou volíme následující krok při prohlížení webu tak, že klikneme na nějaký odkaz. Pravděpodobnost $1 - \alpha$ je pak pravděpodobnost, že skočíme náhodně na jakoukoliv jinou stránku webu. Dostaneme tak další matici

$$G = \alpha S + \frac{1}{n}(1 - \alpha)\mathbf{e}\mathbf{e}^T .$$

Tato **Google matice** je matice, kterou zakladatelé firmy Google Larry Page a Sergey Brin uvedli ve svém prvním článku o jejich algoritmu PageRank na porovnávání důležitosti webových stránek. Všimněme si, že všechny prvky matice G jsou kladné a součet prvků v každém sloupci zůstává rovný 1.

Náš malý příklad vede při volbě $\alpha = 0,9$ na matici

$$G = 0,9 \cdot S + 0,1 \cdot \frac{1}{6}\mathbf{e}\mathbf{e}^T = \begin{pmatrix} 1/60 & 1/6 & 19/60 & 1/60 & 1/60 & 1/60 \\ 7/15 & 1/6 & 19/60 & 1/60 & 1/60 & 1/60 \\ 7/15 & 1/6 & 1/60 & 1/60 & 1/60 & 1/60 \\ 1/60 & 1/6 & 1/60 & 1/60 & 7/15 & 11/12 \\ 1/60 & 1/6 & 19/60 & 7/15 & 1/60 & 1/60 \\ 1/60 & 1/6 & 1/60 & 7/15 & 7/15 & 1/60 \end{pmatrix} .$$

Diferenční rovnice $\mathbf{r}_k = G\mathbf{r}_{k-1}$ s počátečním vektorem \mathbf{r}_0 má pak řešení $\mathbf{r}_k = G^k\mathbf{r}_0$, které konverguje k jednoznačně určenému vektoru

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0,03721 \\ 0,05396 \\ 0,04151 \\ 0,3751 \\ 0,206 \\ 0,2862 \end{pmatrix} .$$

Tento limitní vektor interpretujeme tak, že náhodný brouzdač po webu řídicí se našimi pravidly stráví v průměru 3,721% času na stránce 1, 5,396% času na stránce 2, 37,51% času na stránce 4, atd.

Vlastnosti vlastních čísel matice G plynou z **Perronovy věty**, kterou dokázal již v roce 1907 německý matematik Oskar Perron. Uvedeme si bez důkazu její důsledky pro Google matici G .

Věta 9.98. *Pro Google matici G platí*

- (1) Číslo 1 je vlastním číslem matice G ,
- (2) geometrická i algebraická násobnost vlastního čísla 1 se rovná jedné,
- (3) existuje vlastní vektor \mathbf{r} příslušný vlastnímu číslu 1, který má všechny složky kladné,
- (4) pro jakékoliv jiné vlastní číslo λ matice G platí $|\lambda| < 1$.

Pokud kladný vlastní vektor \mathbf{r} splňuje navíc podmínku $\|\mathbf{r}\| = 1$, nazývá se **Perronův vektor** matice G . První vlastnost jsme si už ukázali dříve, protože matice G je markovovská (tj. nezáporná a součet každého sloupce se rovná 1) a 1 je proto vlastní číslo G . Můžeme si také ověřit, že z dalších uvedených vlastností matice G plyne konvergence vektorů $\mathbf{r}_k = G^k\mathbf{r}_0$. Pokud si matici G převedeme

do Jordanova kanonického tvaru $J = R^{-1}GR$ pomocí nějaké regulární matice R , můžeme předpokládat, že první Jordanova buňka $J_1 = J_{1,1}$ odpovídá vlastnímu číslu 1 a Perronův vektor \mathbf{r} je prvním sloupcem matice R , jejíž sloupce tvoří bázi $B = (\mathbf{r} = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ aritmetického prostoru \mathbb{R}^n složenou ze Jordanových řetízků. Potom pro matici $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$ platí

$$\mathbf{r}_k = RJ^k R^{-1} \mathbf{r}_0 = R \text{diag}(J_1^k, J_2^k, \dots, J_s^k) R^{-1} \mathbf{r}_0 .$$

Protože $|\lambda| < 1$ pro jakékoliv vlastní číslo matice G různé od 1, platí $J_i^k \rightarrow O$ pro jakoukoliv Jordanovu buňku různou od J_1 . Matice J^k tak konverguje k matici, která má na místě $(1, 1)$ prvek 1 a všechny ostatní prvky nulové. Odtud plyne, že posloupnost vektorů

$$\mathbf{r}_k = RJ^k R^{-1} \mathbf{r}_0 = R \text{diag}(J_1^k, J_2^k, \dots, J_s^k) R^{-1} \mathbf{r}_0$$

konverguje k nějakému skalárnímu násobku vektoru \mathbf{r} . Protože začínáme s vektorem \mathbf{r}_0 , který má součet složek rovný 1, a násobíme jej markovovskou maticí, každý vektor \mathbf{r}_k má součet složek rovný 1 a tedy jej má rovný 1 i limita posloupnosti vektorů \mathbf{r}_k . Posloupnost vektorů \mathbf{r}_k tak konverguje k nějakému kladnému násobku Perronova vektoru \mathbf{r} , který má všechny složky kladné.

Tento výpočet ukazuje, že vhodný násobek Perronova vektoru odpovídá na všechny otázky spojené s řešením diferenční rovnice $\mathbf{r}_k = G^k \mathbf{r}_{k-1}$ s výjimkou rychlosti konvergence. Rychlost konvergence posloupnosti \mathbf{r}_k závisí na tom, jak rychle konvergují k O mocniny Jordanovy buňky příslušné vlastním číslům $\lambda \neq 1$. Nejpomaleji z nich konvergují buňky odpovídající vlastnímu číslu $\lambda \neq 1$, který má co největší absolutní hodnotu $|\lambda|$. Rychlost konvergence tak závisí nejvíce na $|\lambda_2|$, kde λ_2 je druhé největší (pokud jde o absolutní hodnotu) vlastní číslo matice G .

Pokud jde o volbu parametru α , autoři algoritmu uvádějí $\alpha = 0,85$. Na volbě α závisí rychlost konvergence a numerická stabilita výpočtů. Z odhadů absolutní hodnoty druhého největšího vlastního čísla matice G vyplývá, že při této volbě α stačí k přesnosti na tři desetinná místa zhruba 50 iterací, tj. stačí spočítat vektor \mathbf{r}_{50} . Rychlost konvergence výpočtu také závisí na volbě počátečního vektoru \mathbf{r}_0 . Otázka volby \mathbf{r}_0 je teoreticky podrobně zkoumána, žádné definitivní výsledky zatím nejsou. Firma Google uvádí, že každý výpočet začíná vždy od stejného počátečního vektoru $\mathbf{r}_0 = (1/n)\mathbf{e}$. Zatím se nepodařilo najít způsob, jak využít předchozích masivních výpočtů při výpočtu nové aktualizace vektoru důležitosti stránek.

Uvedené použití Jordanova kanonického tvaru pro důkaz konvergence posloupnosti vektorů \mathbf{r}_k dobře ilustruje význam teoretických výsledků. Při vlastním výpočtu iterací $\mathbf{r}_k = G\mathbf{r}_{k-1}$ jej nepotřebujeme, součin počítáme přímo. Jordanův kanonický tvar nám umožňuje dokázat, že uvedený numerický postup vede k očekávanému výsledku.

Poslední poznámka se týká rychlosti násobení matice s vektorem. Matice G už není řídká, všechny její prvky jsou nenulové. Její tvar je

$$G = \alpha S + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{e}^T = H + \alpha \mathbf{e} \mathbf{a}^T + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{e}^T .$$

Matice H je řídká, s naprostou většinou prvků rovných 0. Matice G se od ní liší přičtením dvou matic s hodnotí rovnou 1. Násobíme-li maticí G libovolný vektor \mathbf{x} , počítáme

$$G\mathbf{x} = (\alpha S + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{e}^T) \mathbf{x} = H\mathbf{x} + \alpha \mathbf{e} \mathbf{a}^T \mathbf{x} + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{x} .$$

Člen $\alpha \mathbf{e} \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ vyžaduje pouze výpočet standardního skalárního součinu $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$, což je n násobení, doplněného o jedno další násobení $\alpha(\mathbf{a}^T \mathbf{x})$. Stejný počet násobení vyžaduje výpočet třetího členu. Celá složitost výpočtu $G\mathbf{x}$ tak závisí na složitosti výpočtu součinu velmi řídké matice H s vektorem \mathbf{x} .

Tento tvar matice G tak stále umožňuje řadu optimalizací výpočtů vytvořených pro počítání s řídkými maticemi.

Označíme-li $E = \frac{1}{n} \mathbf{e} \mathbf{e}^T$ matici, jejíž všechny prvky jsou rovné $1/n$, můžeme rovnici definující vektor \mathbf{r} napsat ve tvaru

$$(\alpha S + (1 - \alpha)E)\mathbf{r} = \mathbf{r} .$$

Její jednoduchost a elegance vede některé autory k názoru, že by měla být zařazena do příštího vydání knihy *It Must Be Beautiful: Great Equations of Modern Science*, jejíž první vydání vyšlo v roce 2002.

9.6. Unitární diagonalizovatelnost. Má-li operátor f vzhledem k nějaké bázi diagonální matici, máme docela dobrou představu, co operátor “dělá”. Víme-li například, že operátor f na prostoru \mathbb{R}^2 má vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ matici $D = \text{diag}(1, 2)$, víme, že f zachovává vektor \mathbf{v}_1 a dvakrát prodlužuje vektor \mathbf{v}_2 . Tím je díky linearitě operátor f zcela určen.

Informace, že matice f je vzhledem k nějaké bázi diagonální, ale není úplně uspokojivá. Nelze například snadno odpovědět na otázku, jaký je obraz jednotkové kružnice. Na obrázku... je znázorněn obraz pro $\mathbf{v}_1 = \dots$ a $\mathbf{v}_2 = \dots$ (připomeňme znovu, že ztotožňujeme bod a jeho polohový vektor). Z obrázku odhadujeme, že jde o elipsu, směr poloos a jejich velikosti ale nejsou v jednoduchém vztahu s bázi B a maticí D .

OBRÁZEK

S tím souvisí problém numerické stability výpočtů. Báze, kde některé vektory jsou „téměř rovnoběžné“, vedou na numerickou nestabilitu (jak jsme viděli u soustav lineárních rovnic), jsou totiž příliš blízko lineárně závislým množinám.

Ideální je, když je báze B ortonormální. Pak v případě $[f]_B^B = \text{diag}(1, 2)$ vidíme, že obraz jednotkové kružnice je elipsa s osami $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{v}_2 \rangle$ a velikostmi poloos 1, 2.

OBRÁZEK

V této části se budeme zabývat otázkou, kdy pro operátor f na prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem existuje ortonormální báze B taková, že $[f]_B^B$ je diagonální, tj. B je ortonormální báze z vlastních vektorů. Takovým operátorům říkáme unitárně diagonalizovatelné. Protože na \mathbf{V} máme skalární součin, bude \mathbf{V} vždy reálný nebo komplexní vektorový prostor.

Definice 9.99. Necht \mathbf{V} je konečně generovaný vektorový prostor nad \mathbb{C} (resp. \mathbb{R}) se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a f je lineární operátor na \mathbf{V} . Říkáme, že f je *unitárně diagonalizovatelný* (resp. *ortogonálně diagonalizovatelný*), pokud existuje ortonormální báze B prostoru \mathbf{V} taková, že $[f]_B^B$ je diagonální.

Následující tvrzení je obdobou věty 9.51 charakterizující unitárně diagonalizovatelné operátory. Formulaci uvedeme v operátorové verzi, maticovou verzi přenecháme čtenáři.

Věta 9.100. *Bud $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ lineární operátor na konečně generovaném vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n se skalárním součinem nad tělesem \mathbb{C} (resp. \mathbb{R}). Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

- (1) Operátor f je unitárně diagonalizovatelný (resp. ortogonálně diagonalizovatelný).
- (2) Operátor f
- má n vlastních čísel včetně algebraických násobností,
 - geometrická násobnost každého vlastního čísla operátoru f je rovná jeho algebraické násobnosti a
 - pro libovolná dvě různá vlastní čísla λ_1, λ_2 operátoru f platí $M_{\lambda_1} \perp M_{\lambda_2}$.

Důkaz. Důkaz je podobný jako ve větě 9.51. Pro důkaz (2) \Rightarrow (1) vybereme v každém z prostorů M_{λ_i} ortonormální bázi a vzniklá báze bude z předpokladů ortonormální.

Předpokládejme naopak, že B je ortonormální báze prostoru \mathbf{V} taková, že $[f]_B^B$ je diagonální. Z důkazu implikace (1) \Rightarrow (2) ve větě 9.51 vyplývá, že báze B je složená z bází prostorů $M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_k}$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechna navzájem různá vlastní čísla. Protože všechny vektory v B jsou navzájem kolmé, jsou navzájem kolmé i podprostory M_{λ_i} (viz pozorování 7.24 o kolmosti lineárního obalu). \square

Jinými slovy věta říká, že operátor je unitárně diagonalizovatelný právě tehdy, když je diagonalizovatelný a vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Je-li f operátor na \mathbf{V} , $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze prostoru \mathbf{V} a $[f]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ je podle tvrzení 7.19

$$[\mathbf{x}]_B = (\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{x} \rangle, \dots, \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{x} \rangle)^T .$$

Obrazem vektoru \mathbf{x} je vektor

$$[f(\mathbf{x})]_B = (\lambda_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{x} \rangle, \dots, \lambda_n \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{x} \rangle)^T$$

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{x} \rangle \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{x} \rangle \mathbf{v}_n$$

Vektor $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{x} \rangle \mathbf{v}_i$ je roven ortogonální projekci vektoru \mathbf{x} na přímku $\langle \mathbf{v}_i \rangle$. Označíme-li p_i ortogonální projekci na $\langle \mathbf{v}_i \rangle$ chápanou jako lineární zobrazení, tj. $p_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\langle \mathbf{v}_i \rangle}$, můžeme psát

$$f = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n .$$

Unitárně diagonalizovatelný operátor lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci projekcí na vzájemně kolmé jednodimenzionální podprostory.

Hlavní výsledky v této části jsou, že tzv. hermitovské operátory (resp. symetrické) a unitární operátory (resp. ortogonální) jsou unitárně diagonalizovatelné. Tyto výsledky vyplynou z charakterizace unitárně diagonalizovatelných operátorů jako tzv. operátorů normálních.

Pojmy hermitovský (symetrický), unitární (ortogonální) a normální používáme také pro čtvercové matice, kromě normálních matic jsme již dokonce všechny definovali. Předem poznamejme, že matice A je hermitovská, ... právě tehdy, když je operátor f_A na prostoru \mathbb{C}^n (resp. \mathbb{R}^n) se standardním skalárním součinem hermitovský, ...

9.6.1. *Sdružené lineární zobrazení.* Pro komplexní matice (ne nutně čtvercové) jsme v kapitole o skalárním součinu definovali matici hermitovsky sdruženou jako matici komplexně sdruženou k transponované. Pro reálné matice tento pojem splývá s transponovanou maticí. Nyní obecněji definujeme pojem sdruženého lineárního

zobrazení mezi prostory se skalárním součinem. Tím také ukážeme geometrický význam hermitovskey sdružené matice.

Reálná matice A typu $m \times n$ a příslušná transponovaná matice A^T splňují pro libovolné vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vztah

$$A^T \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} .$$

(Na levé straně značí \cdot standardní skalární součin v \mathbb{R}^n , na pravé straně v \mathbb{R}^m .) Skutečně, $A^T \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (A^T \mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y}$. Tento vztah transponovanou matici k A charakterizuje – A^T je jediná taková matice B , pro kterou platí formulka $B\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y}$, jak se přesvědčíme dosazením všech dvojic vektorů kanonické báze.

Pro komplexní matici A je obdobně

$$A^* \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} ,$$

protože $A^* \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (A^* \mathbf{x})^* \mathbf{y} = \mathbf{x}^* A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y}$.

Tento pohled na hermitovské sdružování využijeme k definici sdruženého operátoru.

Tvrzení 9.101. *Nechť \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou konečně generované vektorové prostory nad \mathbb{C} (nebo \mathbb{R}) se skalárními součiny (které jsou jako obvykle značeny $\langle | \rangle$) a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $g : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ splňující pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ rovnost $\langle g(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle$.*

Důkaz. Dokážeme nejprve existenci. Zvolíme libovolnou ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} a ortonormální bázi $C = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ prostoru \mathbf{W} . Každé lineární zobrazení z \mathbf{W} do \mathbf{V} můžeme zadat maticí vzhledem k bázím C a B . Definujeme operátor g tak, aby $[g]_B^C = ([f]_C^B)^*$. Ověříme, že g splňuje pro libovolné vektory $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ vztah $\langle g(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle$. Skutečně, užitím tvrzení 7.21 o skalárním součinu vzhledem k ortonormální bázi dostáváme

$$\begin{aligned} \langle g(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle &= [g(\mathbf{x})]_B^* [\mathbf{y}]_B = ([g]_B^C [\mathbf{x}]_C)^* [\mathbf{y}]_B = [\mathbf{x}]_C^* ([g]_B^C)^* [\mathbf{y}]_B \\ &= [\mathbf{x}]_C^* [f]_C^B [\mathbf{y}]_B = [\mathbf{x}]_C^* [f(\mathbf{y})]_C = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle . \end{aligned}$$

Jednoznačnost ukážeme dosazením dvojic vektorů bází B, C do rovnosti $\langle g(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle$. Pro libovolné $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ je $\langle g(\mathbf{w}_i) | \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{w}_i | f(\mathbf{v}_j) \rangle$. Úpravou obou stran dostaneme

$$\begin{aligned} [\mathbf{w}_i]_C^* ([g]_B^C)^* [\mathbf{v}_j]_B &= [\mathbf{w}_i]_B^* [f]_C^B [\mathbf{v}_j]_B \\ \mathbf{e}_i ([g]_B^C)^* \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_i [f]_C^B \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Na pravé straně je prvek na místě (i, j) v matici $[f]_C^B$, na levé straně je prvek na místě (i, j) v matici $([g]_B^C)^*$. Platí tedy $([g]_B^C)^* = [f]_C^B$, neboli $[g]_B^C = ([f]_C^B)^*$. Ukázali jsme, že pro g splňující rovnost $\langle g(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle$ musí nutně platit $[g]_B^C = ([f]_C^B)^*$. Protože operátor $\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ je jednoznačně určen svou maticí vzhledem k C a B , důkaz je ukončen. \square

Alternativně jde tvrzení dokázat použitím věty 8.46 o reprezentaci lineárních forem skalárním součinem, viz cvičení.

Definice 9.102. V situaci tvrzení 9.101 nazýváme g *sdružené lineární zobrazení k lineárnímu zobrazení f* a značíme $f^* = g$.

Definující vztah pro f^* je tedy

$$\langle f^*(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle$$

Příklad 9.103. Platí $\text{id}^* = \text{id}$, $0^* = 0$.

Protože $\langle \bar{a}\mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = a \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | a\mathbf{y} \rangle$, je sdružené zobrazení k $a \text{id}$ rovno $(a \text{id})^* = \bar{a} \text{id}$.

Sdružené zobrazení k rotaci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o úhel α je rotace o úhel $-\alpha$, jak je vidět na obrázku (v prostorech \mathbb{R}^2 bereme standardní skalární součin):

OBRÁZEK

Příklad 9.104. Na prostoru, který není konečně generovaný, nemusí sdružené lineární zobrazení obecně existovat (lze ukázat, že pokud existuje, je určené jednoznačně). Ukážeme, že operátor derivování na vhodném prostoru sdružený operátor má.

Označme \mathbf{V} vektorový prostor všech hladkých reálných funkcí f na nějakém intervalu, např. $[0, 1]$, takových, že $f(0) = f(1) = 0$, se skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 fg .$$

Uvažujme operátor D , který každé funkci f přiřazuje její derivaci $D(f) = f'$. Pomocí integrace per partes vypočítáme, že sdružený operátor k D existuje a je roven $-D$:

$$\langle -D(f) | g \rangle = \langle -f' | g \rangle = \int_0^1 -f'g = \int_0^1 fg' - [fg]_0^1 = \int_0^1 fg' = \langle f | D(g) \rangle$$

Z důkazu tvrzení 9.101 vyplývá, že matice lineárního zobrazení f^* vzhledem k bázím C a B je hermitovsky sdružená k matici lineárního zobrazení f vzhledem k B a C :

Důsledek 9.105. *Nechť f je lineární zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, kde \mathbf{V} a \mathbf{W} jsou konečně generované komplexní (resp. reálné) vektorové prostory se skalárním součinem, B je ortonormální báze prostoru \mathbf{V} a C je ortonormální báze prostoru \mathbf{W} . Pak*

$$[f^*]_B^C = ([f]_C^B)^* .$$

Tímto vztahem by také bylo možné sdružené lineární zobrazení definovat, museli bychom ale ukázat, že f^* nezávisí na volbě ortonormálních bází.

Ujasníme si vztah hermitovsky sdružené matice k matici A a sdruženého lineárního zobrazení k lineárnímu zobrazení f_A .

Pozorování 9.106. *Pro libovolnou komplexní (resp. reálnou) matici A typu $m \times n$ platí*

$$(f_A)^* = f_{A^*} ,$$

kde sdružování na levé straně je vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Důkaz. Plyne z důsledku 9.105 volbou kanonických bází: Protože $[(f_A)^*]_K^K = ([f_A]_K^K)^* = A^*$, je $(f_A)^* = f_{A^*}$. \square

V reálném případě tedy $(f_A)^* = f_{A^T}$.

Příklad 9.107. Sdružené lineární zobrazení k lineárnímu zobrazení $f_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (na obou prostorech uvažujeme standardní skalární součin), kde

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 3 & 2 \\ 3-2i & 4+4i & 1 \end{pmatrix}$$

je lineární zobrazení $(f_A)^* = f_{A^*}$ určené maticí.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 3+2i \\ 3 & 4-4i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Následující tvrzení shrnuje některé jednoduché vlastnosti sdružování, které budeme používat automaticky.

Tvrzení 9.108. *Nechť \mathbf{V} , \mathbf{W} jsou konečně generované vektorové prostory se skalárním součinem nad \mathbb{C} (resp. \mathbb{R}), f, g jsou lineární zobrazení $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, a $a \in \mathbb{C}$ (resp. $a \in \mathbb{R}$). Pak platí*

- (1) $f^{**} = f$,
- (2) $(f+g)^* = f^* + g^*$,
- (3) $(af)^* = \bar{a}f^*$,
- (4) $(fg)^* = g^*f^*$,
- (5) je-li f izomorfismus, pak je f^* izomorfismus a platí $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

Důkaz. Všechny uvedené vlastnosti můžeme dokázat porovnáním matic operátorů vzhledem k nějakým ortonormálním bázím B, C , využitím důsledku 9.105 a vlastností hermitovského sdružování (resp. transponování) matic. Lepší možnost je vyjít přímo z definice.

Například pro důkaz (2) můžeme počítat

$$[(f+g)^*]_B^C = ([f+g]_C^B)^* = ([f]_C^B + [g]_C^B)^* = ([f]_C^B)^* + ([g]_C^B)^* = [f^*]_B^C + [g^*]_B^C = [f^* + g^*]_B^C,$$

tedy $(f+g)^* = f^* + g^*$. Pro ověření z definice spočítáme

$$\begin{aligned} \langle (f^* + g^*)(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle &= \langle f^*(\mathbf{x}) + g^*(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle = \langle f^*(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle + \langle g^*(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle + \langle \mathbf{x} | g(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x} | (f+g)(\mathbf{y}) \rangle, \end{aligned}$$

takže platí $(f+g)^* = f^* + g^*$.

Ostatní vlastnosti přenecháme jako cvičení čtenáři. \square

Opustíme obecná lineární zobrazení a vrátíme se zpět k operátorům. Důležitou vlastností sdružených operátorů je, že jejich vlastní čísla jsou komplexně sdružená k vlastním číslům původního operátoru.

Tvrzení 9.109. *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný komplexní (resp. reálný) vektorový prostor se skalárním součinem a f je lineární operátor na \mathbf{V} . Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{R}$) je vlastní číslo operátoru f právě tehdy, když je $\bar{\lambda}$ (resp. λ) vlastní číslo operátoru f^* .*

Důkaz. Díky vlastnosti $f^{**} = f$ stačí dokázat jednu implikaci. Předpokládejme, že λ je vlastní číslo operátoru f . Pak operátor $f - \lambda \text{id}$ není prostý, tedy není to izomorfismus. Pak ani $(f - \lambda \text{id})^* = f^* - \bar{\lambda} \text{id}^* = f^* - \bar{\lambda} \text{id}$ není izomorfismem, takže není prostý (připomeňme, že pro operátory na konečně generovaném platí „prostý \Leftrightarrow na \Leftrightarrow izo“). Z toho vyplývá, že $\bar{\lambda}$ je vlastní číslo operátoru f^* . \square

Pomocí pozorování 9.106 můžeme tvrzení přeformulovat pro matice: λ je vlastní číslo komplexní čtvercové matice A právě tehdy, když je $\bar{\lambda}$ vlastní číslo matice A^* . Speciálně, reálná čtvercová matice A a transponovaná matice A^T mají stejná vlastní čísla.

Jako cvičení dokažte, že charakteristický polynom operátoru f je „komplexně sdružený polynom“ k charakteristickému polynomu operátoru f^* . To dává alternativní důkaz předchozího tvrzení.

Tvrzení nedává žádnou informaci o příslušných vlastních vektorech, žádný jednoduchý vztah totiž obecně neplatí.

Příklad 9.110. Reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla 1 a -2 a příslušné podprostory vlastních čísel $M_1 = \langle (-1, 4)^T \rangle$, $M_{-2} = \langle (-1, 1)^T \rangle$. Matice transponovaná má stejná vlastní čísla a $M_1 = \langle (1, 1)^T \rangle$, $M_{-2} = \langle (4, 1)^T \rangle$.

9.6.2. Normální operátory.

Definice 9.111. Operátor na komplexním (resp. reálném) prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem se nazývá *normální*, pokud $f^*f = ff^*$.

Definice 9.111*. Komplexní (resp. reálná) čtvercová matice A se nazývá *normální*, pokud $A^*A = AA^*$ (v reálném případě můžeme psát $A^T A = AA^T$).

Pojem normální matice je zaveden v souladu s pojmem normální operátor – matice A je normální právě tehdy, když je normální operátor f_A na prostoru \mathbb{C}^n (resp. \mathbb{R}^n) se standardním skalárním součinem.

Příklady normálních operátorů zahrnují operátory unitární (v reálném případě ortogonální) a operátory hermitovské, kterými se budeme zabývat v dalším odstavci. Příklady normálních matic jsou tedy unitární matice (ortogonální matice) a hermitovské matice (symetrické matice). Dále také například diagonální matice a antihermitovské (antisymetrické) matice, tj. matice splňující $-A^* = A$.

Příklad 9.112. Reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je normální, protože

$$A^T A = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice A není symetrická, antisymetrická, ani ortogonální.

Skalární násobek normálního operátoru je rovněž normální a sdružený operátor k normálnímu operátoru je normální (cvičení). Součet ani složení dvou normálních operátorů ale normální být nemusí, stačí ale, aby operátory komutovaly. Budeme potřebovat pouze speciální případ:

Tvrzení 9.113. *Je-li f normální operátor na komplexním (reálném) vektorovém prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem a $t \in \mathbb{C}$ ($t \in \mathbb{R}$), pak je operátor $f - t \text{id}_{\mathbf{V}}$ také normální.*

Důkaz. Je $(f - t \text{id})^*(f - t \text{id}) = (f^* - (t \text{id})^*)(f - t \text{id}) = (f^* - \bar{t} \text{id})(f - t \text{id}) = f^*f - tf^* - \bar{t}f + t\bar{t} \text{id}$. Stejně vyjde i $(f - t \text{id})(f - t \text{id})^*$. \square

Normální operátory se vyznačují tím, že se normy f -obrazu a f^* -obrazu libovolného vektoru rovnají.

Tvrzení 9.114. *Nechť f je normální operátor na komplexním (resp. reálném) vektorovém prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem a $\mathbf{v} \in V$. Pak platí*

$$\|f(\mathbf{v})\| = \|f^*(\mathbf{v})\| \quad .$$

Důkaz. Protože norma je vždy nezáporné reálné číslo, stačí dokázat rovnost druhých mocnic norem.

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{v})\|^2 &= \langle f(\mathbf{v}) | f(\mathbf{v}) \rangle = \langle f^* f(\mathbf{v}) | \mathbf{v} \rangle = \langle f f^*(\mathbf{v}) | \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle f^{**} f^*(\mathbf{v}) | \mathbf{v} \rangle = \langle f^*(\mathbf{v}) | f^*(\mathbf{v}) \rangle = \|f^*(\mathbf{v})\|^2 \end{aligned}$$

□

Jako cvičení dokažte, že vlastnost v předchozím tvrzení normální operátory charakterizuje.

Z tvrzení 9.109 víme, že λ je vlastní číslo operátoru f právě tehdy, když je $\bar{\lambda}$ vlastní číslo operátoru f^* . Příslušné vlastní vektory ale nejsou obecně v jednoduchém vztahu. Pro normální operátory je situace daleko přehlednější.

Tvrzení 9.115. *Nechť f je normální operátor na komplexním (resp. reálném) vektorovém prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem, $\lambda \in \mathbb{C}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{R}$) a $\mathbf{v} \in V$. Pak \mathbf{v} je vlastní vektor operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ právě tehdy, když je \mathbf{v} vlastní vektor operátoru f^* příslušný vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že \mathbf{v} je vlastní vektor operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ . Z tvrzení 9.109 již víme, že $\bar{\lambda}$ je vlastní číslo operátoru f^* , zbývá dokázat, že \mathbf{v} je příslušný vlastní vektor. Platí $(f - \lambda \text{id})(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, tedy také $\|(f - \lambda \text{id})\mathbf{v}\| = 0$. Protože f je normální, je podle tvrzení 9.113 normální také operátor $f - \lambda \text{id}$. Z tvrzení 9.114 o normách vyplývá $\|(f - \lambda \text{id})^*(\mathbf{v})\| = \|(f^* - \bar{\lambda} \text{id})\mathbf{v}\| = 0$. Z toho $(f^* - \bar{\lambda} \text{id})(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, tedy \mathbf{v} je skutečně vlastní vektor operátoru f^* příslušný vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$.

Pro důkaz druhé implikace stačí připomenout, že f^* je normální operátor a $f^{**} = f$. □

Dostáváme se k hlavní větě o normálních operátorech.

Věta 9.116 (Spektrální věta pro normální operátory). *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný vektorový prostor nad \mathbb{C} se skalárním součinem a f lineární operátor na \mathbf{V} (resp. nechť A je čtvercová matice nad \mathbb{C}). Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Operátor f (resp. matice A) je unitárně diagonalizovatelný (-á).*
- (2) *Operátor f (resp. matice A) je normální.*

Důkaz. (1) \Rightarrow (2). Je-li B ortonormální báze taková, že $[f]_B^B = D = \text{diag}(t_1, \dots, t_n)$ je diagonální, pak

$$[f^* f]_B^B = [f^*]_B^B [f]_B^B = ([f]_B^B)^* [f]_B^B = D^* D$$

a podobně $[f f^*]_B^B = D D^*$. Protože $D^* D = D D^* = \text{diag}(|t_1|^2, \dots, |t_n|^2)$, platí $[f^* f]_B^B = [f f^*]_B^B$, tedy také $f^* f = f f^*$.

(2) \Rightarrow (1). Tvrzení dokážeme indukcí podle dimenze n prostoru \mathbf{V} . Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že f je normální a každý normální operátor na prostoru dimenze $n - 1$ je unitárně diagonalizovatelný. Chceme ukázat, že f je

unitárně diagonalizovatelný, ekvivalentně, pro f existuje ortonormální báze složená z vlastních vektorů.

Každý operátor na konečně generovaném prostoru nad \mathbb{C} má vlastní číslo λ (viz důsledek 9.38). Vezmeme libovolný nenulový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ , znormujeme jej a označíme \mathbf{v}_n .

Ukážeme, že $\mathbf{W} = \mathbf{v}_n^\perp$ je invariantní prostor operátoru f . Nechť tedy $\mathbf{x} \in W$ je libovolný vektor. Protože \mathbf{x} je kolmý na \mathbf{v}_n , platí $\langle \mathbf{v}_n | \mathbf{x} \rangle = 0$. Pak také

$$\langle \mathbf{v}_n | f(\mathbf{x}) \rangle = \langle f^*(\mathbf{v}_n) | \mathbf{x} \rangle = \langle \bar{\lambda} \mathbf{v}_n | \mathbf{x} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{x} \rangle = 0 ,$$

kde v druhé úpravě jsme využili tvrzení 9.115 o vlastních vektorech normálního operátoru. Takže skutečně je $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{v}_n^\perp = W$.

Prostor \mathbf{W} je ortogonální doplněk jednodimenzionálního prostoru, má tedy dimenzi $n-1$ (viz větu 7.29). Na zúžení $f|_W$ použijeme indukční předpoklad a získáme ortonormální bázi $C = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ prostoru \mathbf{W} tvořenou vlastními vektory operátoru f . Pak je posloupnost $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)$ tvořená vlastními vektory operátoru f , je ortonormální (protože C je ortonormální, \mathbf{v}_n je jednotkový a kolmý na všechny vektory z C), takže B je ortonormální báze prostoru \mathbf{V} tvořená vlastními vektory operátoru f .

Alternativně lze větu dokázat užitím Jordanova kanonického tvaru, viz cvičení. \square

Speciálně, normální reálná matice je unitárně diagonalizovatelná, **chápe-li ji jako matici nad \mathbb{C}** . Není pravda, že je nutně ortogonálně diagonalizovatelná nad \mathbb{R} ! Reálné matice, které jsou ortogonálně diagonalizovatelné, charakterizujeme v důsledku 9.120 – jsou to přesně symetrické matice.

Příklad 9.117. V příkladu 9.112 jsme viděli, že reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je normální. Její charakteristický polynom je

$$p_A(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 2 = -(t-2)(t^2 - t + 1) .$$

Tento polynom má pouze jeden reálný kořen $\lambda = 2$ násobnosti 1, matice A tedy není ortogonálně diagonalizovatelná.

Chápejme nyní A jako matici nad \mathbb{C} . Podle spektrální věty je unitárně diagonalizovatelná. Má tři vlastní čísla

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i ,$$

prostory vlastních vektorů mají tedy dimenzi 1 a stačí v každém z nich zvolit jednotkový vektor.

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \bar{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je matice operátoru $f_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ rovná

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}.$$

To nám také dává maticový rozklad

$$\begin{aligned} A &= [f_A]_K^K = [\text{id}]_K^B [f_A]_B^B [\text{id}]_B^K = [\text{id}]_K^B [f_A]_B^B ([\text{id}]_K^B)^{-1} = [\text{id}]_K^B [f_A]_B^B ([\text{id}]_K^B)^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9.6.3. Hermitovské a symetrické operátory. Důležitou podtřídou normálních operátorů jsou operátory hermitovské (v reálném případě symetrické).

Definice 9.118. Operátor na komplexním (resp. reálném) prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem se nazývá *hermitovský* (resp. *symetrický*), pokud $f^* = f$.

Pojem hermitovského (symetrického) operátoru je zaveden v souladu s pojmem hermitovské (symetrické) matice – matice A je hermitovská (symetrická) právě tehdy, když je hermitovský (symetrický) operátor f_A na prostoru \mathbb{C}^n (resp. \mathbb{R}^n) se standardním skalárním součinem.

Hermitovské operátory jsou přesně ty normální operátory, jejichž vlastní čísla jsou reálná.

Věta 9.119 (Spektrální věta pro hermitovské operátory). *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný vektorový prostor nad \mathbb{C} se skalárním součinem a f je lineární operátor na \mathbf{V} (resp. nechť A je čtvercová matice nad \mathbb{C}). Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) Operátor f (resp. matice A) je unitárně diagonalizovatelný (-á) a všechna jeho (její) vlastní čísla jsou reálná.
- (2) Operátor f (resp. matice A) je hermitovský (-á).

Důkaz. (1) \Rightarrow (2). Je-li f unitárně diagonalizovatelný a všechna jeho vlastní čísla jsou reálná, pak existuje ortonormální báze B prostoru \mathbf{V} taková, že $[f]_B^B = D$ je reálná diagonální matice. Platí tedy

$$[f^*]_B^B = ([f]_B^B)^* = D^* = D = [f]_B^B,$$

neboli $f^* = f$.

(2) \Rightarrow (1). Protože každý hermitovský operátor je normální, stačí podle spektrální věty o normálních operátorech (věta 9.116) ukázat, že všechna vlastní čísla operátoru f jsou reálná. To nahlédneme z tvrzení 9.115 o vlastních vektorech normálních operátorů: Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo operátoru f a \mathbf{v} nenulový vlastní vektor příslušný λ , pak \mathbf{v} je vlastní vektor operátoru $f^* = f$ příslušný vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$. Jeden nenulový vektor nemůže příslušet více vlastním číslům, platí tedy $\lambda = \bar{\lambda}$, neboli $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Důsledek 9.120 (Spektrální věta pro symetrické operátory). *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný vektorový prostor nad \mathbb{R} se skalárním součinem a f je lineární operátor na \mathbf{V} (resp. nechť A je čtvercová matice nad \mathbb{R}). Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) Operátor f (resp. matice A) je ortogonálně diagonalizovatelný ($-á$).
 (2) Operátor f (resp. matice A) je symetrický ($-á$).

Důkaz. Důkaz (1) \Rightarrow (2) se udělá stejně jako v předchozí větě.

Dokážeme implikaci (2) \Rightarrow (1) v maticové verzi. Předpokládejme tedy, že A je reálná symetrická matice. Chápejme nyní A jako matici nad \mathbb{C} . Protože je A hermitovská, podle předchozí věty je unitárně diagonalizovatelná a všechna vlastní čísla jsou reálná. Z toho vyplývá (viz větu 9.100), že A má n reálných vlastních čísel včetně násobností, geometrická násobnost každého vlastního čísla je rovná jeho algebraické násobnosti a prostory M_λ jsou navzájem kolmé (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu). Algebraická (geometrická) násobnost nad \mathbb{C} je rovná algebraické (geometrické) násobnosti nad \mathbb{R} , takže chápeme-li A opět jako reálnou matici, bude splňovat podmínky z věty 9.100, a bude proto ortogonálně diagonalizovatelná. \square

Příklad 9.121. Jako ilustraci spektrální věty pro reálné symetrické matice najdeme pro operátor f_A určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů.

Operátor f_A má charakteristický polynom $p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1)$ a tedy vlastní čísla 1 a -1 . Příslušné prostory vlastních vektorů jsou

$$\mathbf{M}_1 = \langle (1, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T \rangle, \mathbf{M}_{-1} = \langle (1, -1, 0)^T \rangle$$

V prostoru \mathbf{M}_1 je ortonormální báze například $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, kde

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V prostoru \mathbf{M}_{-1} tvoří ortonormální bázi například vektor

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je ortonormální báze prostoru \mathbf{V} a $[f_A]_B^B = \text{diag}(1, 1, -1)$.

Zapišeme ještě výsledek maticově. Označme

$$Q = [\text{id}]_K^B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice Q je ortogonální, takže $Q^{-1} = Q^T$ a můžeme psát

$$\text{diag}(1, 1, -1) = [f_A]_B^B = [\text{id}]_B^K [f_A]_K^K [\text{id}]_K^B = Q^{-1} A Q = Q^T A Q,$$

nebo ve formě rozkladu matice A

$$A = Q \text{diag}(1, 1, -1) Q^{-1} = Q \text{diag}(1, 1, -1) Q^T.$$

9.6.4. *Pozitivně (semi)definitní operátory.* Je-li f hermitovský operátor na \mathbf{V} , pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\langle \mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \rangle = \langle f^*(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle = \langle f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \rangle} .$$

Z toho plyne, že $\langle \mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \rangle$ je vždy reálné číslo. Pro $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ je rovno 0. Ty operátory, pro které je jinak toto číslo vždy kladné (resp. nezáporné) nazýváme pozitivně definitní (resp. semidefinitní).

Definice 9.122. Operátor f na konečně generovaném komplexním (resp. reálném) prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem se nazývá

- *pozitivně definitní*, pokud je hermitovský (resp. symetrický) a pro všechna $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in V$ platí $\langle \mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \rangle > 0$;
- *pozitivně semidefinitní*, pokud je hermitovský (resp. symetrický) a pro všechna $\mathbf{x} \in V$ platí $\langle \mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \rangle \geq 0$.

Pro matice je pojem jako obvykle definován pomocí příslušného operátoru a standardního skalárního součinu. Explicitně:

Definice 9.122*. Čtvercová matice A nad \mathbb{C} (resp. \mathbb{R}) se nazývá

- *pozitivně definitní*, pokud je hermitovská (resp. symetrická) a pro všechna $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in V$ platí $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} > 0$;
- *pozitivně semidefinitní*, pokud je hermitovská (resp. symetrická) a $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} \geq 0$.

Pozitivně definitní operátory nebo matice lze ekvivalentně definovat tak, že jsou hermitovské (symetrické) a všechna vlastní čísla jsou kladná. Podobně pro semidefinitnost.

Tvrzení 9.123. *Nechť f je hermitovský (symetrický) operátor f na komplexním (reálném) vektorovém prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem. Pak f je pozitivně definitní (resp. semidefinitní) právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla operátoru f kladná (resp. nezáporná).*

Důkaz. Dokážeme pouze verzi pro pozitivně definitní operátory. Pro semidefinitní je důkaz téměř totožný.

Je-li f pozitivně definitní a λ je vlastní číslo operátoru f (to je nutně reálné), pak pro nenulový vlastní vektor \mathbf{v} příslušný λ platí $0 < \langle \mathbf{v} | f(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{v} | \lambda \mathbf{v} \rangle = \lambda \|\mathbf{v}\|^2$. Protože norma je kladná, plyne odsud $\lambda > 0$.

Jsou-li naopak všechna vlastní čísla operátoru f kladná, existuje podle spektrální věty pro hermitovské matice (věta 9.119) ortonormální báze B prostoru \mathbf{V} taková, že $[f]_B^B = D = \text{diag}(t_1, \dots, t_n)$, kde t_i jsou vlastní čísla operátoru f , tj. $t_i > 0$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak užitím tvrzení o skalárním součinu vzhledem k ortonormální bázi dostáváme pro libovolný vektor \mathbf{x} vztah

$$\langle \mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \rangle = ([\mathbf{x}]_B)^* [f(\mathbf{x})]_B = ([\mathbf{x}]_B)^* [f]_B^B [\mathbf{x}]_B = ([\mathbf{x}]_B)^* D [\mathbf{x}]_B .$$

Označíme-li $[\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)$ je výraz roven $t_1|x_1|^2 + \dots + t_n|x_n|^2$, což je ostře větší než 0, kdykoliv $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. \square

Všimněte si také, že pozitivně definitní operátor je vždy izomorfismus (a pozitivně definitní matice je regulární), protože nemůže mít vlastní číslo 0.

Příklad 9.124. Reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

není pozitivně definitní ani semidefinitní, protože má záporné vlastní číslo -1 .

Reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $0, 5$, je proto pozitivně semidefinitní, ale není pozitivně definitní.

Reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní. Pro libovolný nenulový vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ je proto číslo

$$(a, b)A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + 4ab + 5b^2$$

kladné.

Mnoho soustav lineárních rovnic vzniklých přeformulováním úloh z přírodních věd má pozitivně (semi)definitní matici. Je to často způsobeno tím, že matice soustavy je tvaru $A^T A$ pro nějakou reálnou obdélníkovou matici, nebo obecněji $A^T D A$ pro matici A typu $m \times n$ a diagonální matici $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$ řádu m s nezápornými prvky na diagonále.

Matice tvaru $A^T A$ jsou skutečně pozitivně semidefinitní, protože jsou symetrické

$$(A^T A)^T = A^T A = A^T A$$

a pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot A^T A \mathbf{x} = A \mathbf{x} \cdot A \mathbf{x} = \|A \mathbf{x}\|^2 .$$

(Stejný výsledek můžeme získat přímo maticovým výpočtem $\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = (A \mathbf{x})^T A \mathbf{x} = \|A \mathbf{x}\|^2$.) Také vidíme, že matice $A^T A$ je pozitivně definitní právě tehdy, když má soustava $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ pouze triviální řešení, tzn. právě tehdy, když má matice A lineární nezávislou posloupnost sloupcových vektorů.

Matice tvaru $A^T D A$, kde $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$, $d_i \geq 0$, lze psát ve tvaru $(\sqrt{D} A)^T (\sqrt{D} A)$, kde \sqrt{D} značí matici $\text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_m})$, jsou tedy také pozitivně semidefinitní.

Podobně, každá komplexní matice tvaru $A^* A$ je pozitivně semidefinitní. Formulujeme verzi pro lineární zobrazení.

Tvrzení 9.125. *Nechť \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou vektorové prostory se skalárními součiny a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak je operátor $f^* f$ pozitivně semidefinitní.*

Důkaz. Operátor $f^* f$ je hermitovský, protože $(f^* f)^* = f^* f^{**} = f^* f$. Pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí $\langle \mathbf{x} | f^* f(\mathbf{x}) \rangle = \langle f(\mathbf{x}) | f(\mathbf{x}) \rangle = \|f(\mathbf{x})\|^2 \geq 0$, takže operátor $f^* f$ je pozitivně semidefinitní. \square

Naopak platí, že každý semidefinitní operátor g lze psát ve tvaru $g = f^* f$ pro nějaký operátor f . Důkaz přecháme čtenáři jako cvičení.

9.6.5. *Unitární operátory.* Další důležitou podtřídou normálních operátorů jsou operátory unitární, v reálném případě ortogonální. Připomeňme, že f je unitární, pokud f zachovává normu. V tvrzení 8.49 jsme uvedli řadu ekvivalentních definic. Pomocí sdruženého operátoru můžeme unitární operátory charakterizovat pomocí vlastnosti $f^* = f^{-1}$, podobně jako unitární matice:

Tvrzení 9.126. *Operátor f na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} nad \mathbb{C} (resp. \mathbb{R}) je unitární (resp. ortogonální) právě tehdy, když $f^* = f^{-1}$.*

Důkaz. Je-li zobrazení f unitární, pak je podle pozorování 8.48 prosté, tedy f je izomorfismus. Inverzní zobrazení f^{-1} proto existuje. Pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$\langle f^{-1}(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle = \langle f(f^{-1}(\mathbf{x})) | f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle .$$

(V první úpravě využíváme toho, že unitární zobrazení zachovává skalární součin, viz tvrzení 8.49.) Z toho vyplývá $f^* = f^{-1}$.

Platí-li naopak $f^* = f^{-1}$, pak

$$\|f(\mathbf{x})\| = \sqrt{\langle f(\mathbf{x}) | f(\mathbf{x}) \rangle} = \sqrt{\langle f^* f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \|\mathbf{x}\| .$$

Zobrazení f je tedy unitární. \square

Z tvrzení také vidíme, že unitární (ortogonální) operátory jsou skutečně normální, protože $f^* f = f f^* = \text{id}$.

Věta 9.127 (Spektrální věta pro unitární operátory). *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný vektorový prostor nad \mathbb{C} se skalárním součinem a f je lineární operátor na \mathbf{V} (resp. nechť A je čtvercová matice nad \mathbb{C}). Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Operátor f (resp. matice A) je unitárně diagonalizovatelný (-á) a pro všechna vlastní čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ platí $|\lambda| = 1$.*
- (2) *Operátor f (resp. matice A) je unitární.*

Důkaz. (1) \Rightarrow (2). Jsou-li splněny předpoklady, pak $[f]_B^B = D$, kde B je ortonormální a na diagonále D jsou komplexní čísla s absolutní hodnotou 1. Sloupce matice D tvoří ortonormální posloupnost vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu, takže f je unitární podle bodu (5) tvrzení 8.49.

(2) \Rightarrow (1). Protože každý unitární operátor je normální, stačí podle věty 9.116 ukázat, že pro všechna vlastní čísla λ operátoru f platí $|\lambda| = 1$. Vezmeme libovolný nenulový vlastní vektor \mathbf{v} příslušný vlastnímu číslu λ . Protože f zachovává normu, platí $\|\mathbf{v}\| = \|f(\mathbf{v})\| = \|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$. Z toho plyne $|\lambda| = 1$, jak jsme chtěli. \square

9.6.6. Ortogonální operátory v dimenzi 2. Jak vypadají ortogonální operátory f na reálném prostoru dimenze 2? Pro zjednodušení zápisu budeme uvažovat prostor \mathbb{R}^2 se standardním skalárním součinem.

Nechť tedy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je ortogonální operátor. Obrazy vektorů nějaké ortonormální báze (např. kanonické) jsou jednotkové a na sebe kolmé. Z toho lze geometricky nahlédnout, že f je buď rotace nebo reflexe (osová souměrnost). Toto pozorování teď dokážeme.

Označme si A matici f vzhledem ke kanonické bázi, tj. $f = f_A$. Někdy budeme A chápat jako komplexní matici a $f = f_A$ jako operátor na \mathbb{C}^2 . Podle charakterizace unitárních operátorů pro všechna vlastní čísla matice A platí $|\lambda| = 1$. Protože má charakteristický polynom matice A reálné koeficienty, jsou obě vlastní čísla buď reálná nebo je tvoří dvojice komplexně sdružených čísel $\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$ a $\cos \phi - i \sin \phi = e^{-i\phi}$. Označme $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ nějakou ortonormální bázi prostoru \mathbb{C}^2 složenou z vlastních vektorů matice A .

Nejdříve probereme případ, kdy vlastní čísla matice A , tj. operátoru f , jsou reálná. Pak můžeme zvolit oba vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ reálné. Zde máme tři možnosti.

- Obě vlastní čísla se rovnají 1. Matice $[f]_C^C$ se pak rovná I_2 a operátor f se rovná identickému zobrazení.

- Obě vlastní čísla se rovnají -1 . Matice $[f]_C^C$ se pak rovná $-I_2$ a operátor f se rovná středové symetrii - stejnolehlosti s koeficientem -1 .
- Jedno vlastní číslo se rovná 1 a druhé -1 . Matice $[f]_C^C$ se pak rovná

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení f je reflexe (osová souměrnost) vzhledem k přímce generované vektorem \mathbf{v}_1 .

Zbývá případ komplexních vlastních čísel, která nejsou reálná. Označme $\mathbf{v} = (a + bi, c + di)$ vlastní vektor příslušný číslu $\lambda = \cos \phi + i \sin \phi$. V části 9.3.4 jsme ukázali, že $\bar{\mathbf{v}}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$ a vzhledem k bázi $C' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}, i(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})) = (2\operatorname{Re}(\mathbf{v}), -2\operatorname{Im}(\mathbf{v}))$ má operátor matici rovnou matici rotace o úhel ϕ .

Protože \mathbf{v} a $\bar{\mathbf{v}}$ jsou na sebe kolmé, platí

$$\mathbf{v}^* \bar{\mathbf{v}} = (a - ib | c - id) \begin{pmatrix} a - ib \\ c - id \end{pmatrix} = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - 2i(ab + cd) = 0.$$

Z imaginární části výrazu vidíme, že $ab + cd = 0$ a reálné vektory $\mathbf{w}_1 = 2\operatorname{Re} \mathbf{v} = (2a, 2c)^T$ a $\mathbf{w}_2 = -2\operatorname{Im} \mathbf{v} = (-2b, -2d)$ jsou na sebe kolmé. Z reálné části výrazu vidíme, že oba vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ mají stejnou normu $e = \sqrt{4a^2 + 4c^2} = \sqrt{4b^2 + 4d^2}$
Báze

$$B = (\mathbf{w}_1/e, \mathbf{w}_2/e)$$

je ortonormální báze prostoru \mathbb{R}^2 . Protože vznikla vynásobením vektorů báze C' stejným skalárem je

$$[f]_B^B = [f]_{C'}^{C'} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

a zobrazení f je tedy rotace.

Pokud vezmeme do úvahy, že středová symetrie je rotace o úhel π a identické zobrazení je rotace o úhel 0 , dokázali jsme následující klasifikaci ortogonálních zobrazení v \mathbb{R}^2 .

Tvrzení 9.128. *Každé ortogonální zobrazení f v prostoru \mathbb{R}^2 se standardním skalárním součinem je buď rotace nebo reflexe. Rotace je to právě když $\det[f]_B^B = 1$ a reflexe je to právě když $\det[f]_B^B = -1$, kde B je libovolná báze \mathbb{R}^2 .*

Protože složení dvou ortogonálních zobrazení je opět ortogonální zobrazení, dostáváme s použitím věty o součinu determinantů tento důsledek.

Důsledek 9.129. *Složení dvou rotací v \mathbb{R}^2 je opět rotace, složení dvou reflexí je rotace a složení rotace s reflexí (v libovolném pořadí) je opět nějaká reflexe.*

9.6.7. *Ortogonální operátory v dimenzi 3.* Rozšíříme klasifikaci ortogonálních zobrazení na reálné prostory dimenze 3.

Nechť $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je ortogonální operátor na prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem a $A = [f]_K^K$ jeho matice vzhledem ke kanonické bázi v \mathbb{R}^3 . Zobrazení $f = f_A$ budeme také chápat jako unitární operátor na \mathbb{C}^3 . Charakteristický polynom má všechna vlastní čísla rovná v absolutní hodnotě 1 a existuje ortonormální báze $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru \mathbb{C}^3 složená z vlastních vektorů matice A . Protože má navíc reálné koeficienty, jsou buď všechna vlastní čísla reálná (rovná ± 1) a nebo je

jedno reálné a zbylá dvě jsou komplexně sdružená čísla $e^{i\phi}$ a $e^{-i\phi}$ pro nějaký úhel ϕ .

Předpokládejme, že pouze jedno vlastní číslo je reálné. K němu příslušný vlastní vektor \mathbf{v}_1 můžeme proto také zvolit reálný. Podprostor $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ prostoru \mathbb{C}^3 (ortonormální doplněk vektoru \mathbf{v}_1) je invariantní podprostor operátoru f . Na tomto podprostoru dimenze 2 je zúžení f také ortogonální operátor a má komplexní vlastní čísla $e^{i\phi}$ a $e^{-i\phi}$. Podle předchozí diskuze je matice zúžení operátoru f na podprostor $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ vzhledem k ortonormální bázi $(a \operatorname{Re} \mathbf{v}_2, -a \operatorname{Im} \mathbf{v}_2)$ tohoto podprostoru, kde $a = \|\operatorname{Re} \mathbf{v}_2\|^{-1}$, rovná

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Je-li reálné vlastní číslo rovné 1, má potom f vzhledem k ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, a \operatorname{Re} \mathbf{v}_2, -a \operatorname{Im} \mathbf{v}_2)$ prostoru \mathbb{R}^3 matici

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

a jde tedy o rotaci kolem osy generované vektorem \mathbf{v}_1 o úhel ϕ .

Je-li jediné reálné vlastní číslo operátoru f rovné -1 , platí

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

a zobrazení f je tedy složením rotace kolem osy generované \mathbf{v}_1 o úhel ϕ s reflexí (zrcadlením) určenou rovinou kolmou na vektor \mathbf{v}_1 .

Jsou-li všechna vlastní čísla operátoru f reálná, můžeme zvolit ortonormální bázi \mathbb{C}^3 složenou z reálných vektorů a matice $[f]_B^B$ má (až na pořadí prvků na hlavní diagonále) jeden ze tvarů

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

V prvním případě jde o identické zobrazení (tj. rotaci o úhel 0), ve druhém případě jde o zrcadlení vzhledem k rovině $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{v}_3\}^\perp$, ve třetím případě jde o rotaci kolem osy generované \mathbf{v}_1 o úhel π a ve čtvrtém případě jde o složení této rotace s reflexí (zrcadlením) určenou rovinou $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$.

Platí proto následující tvrzení.

Tvrzení 9.130. *Každé ortogonální zobrazení v euklidovském prostoru \mathbb{R}^3 je buď rotace kolem nějaké osy, ortogonální reflexe vzhledem k nějaké rovině a nebo složení rotace s ortogonální reflexí. Rotace je to právě tehdy, když determinant matice tohoto zobrazení vzhledem k jakékoliv bázi je rovný 1.*

Důsledek 9.131. *Složení dvou rotací v \mathbb{R}^3 je zase rotace v \mathbb{R}^3 , složení dvou reflexí je rotace (osa rotace je rovná průniku rovin reflexí).*

9.7. Singulární rozklad. Najít ortonormální bázi, vzhledem ke které má daný operátor diagonální matici, jde v komplexním případě pro normální operátory a v reálném případě pro symetrické operátory. Když slevíme z požadavku, že báze pro vzory a obrazy jsou stejné, lze „unitárně diagonalizovat“ každý lineární operátor,

dokonce každé lineární zobrazení (mezi konečně generovanými prostory se skalárním součinem). Navíc na diagonále budou nezáporná reálná čísla.

Začneme ilustrativním příkladem.

Příklad 9.132. Uvažujme „zkosení“ $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Budeme umět spočítat, že vzhledem k bázím B a C , kde

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \approx \left(\begin{pmatrix} 0,526 \\ 0,851 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,851 \\ 0,526 \end{pmatrix} \right),$$

$$C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \approx \left(\begin{pmatrix} 0,851 \\ 0,526 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,526 \\ 0,851 \end{pmatrix} \right),$$

má f matici

$$[f_A]_C^B \approx \begin{pmatrix} 1,618 & 0 \\ 0 & 0,618 \end{pmatrix}.$$

Z toho vidíme, že vektor \mathbf{v}_1 se při zobrazení f_A zobrazí na přibližně 1,618-násobek vektoru \mathbf{u}_1 a vektor \mathbf{v}_2 se zobrazí na přibližně 0,618-násobek vektoru \mathbf{u}_2 . Obecněji, obraz vektoru \mathbf{x} o souřadnicích $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2)^T$ vzhledem k bázi B je vektor $A\mathbf{x}$ o souřadnicích $[A\mathbf{x}]_C \approx (1,618x_1, 0,618x_2)^T$ vzhledem k bázi C .

OBRAZEK

Výhodou matice f_A vzhledem k bázím B a C oproti matici f_A vzhledem ke kanonickým bázím (tj. matici A) je, že snadno určíme obraz jednotkového kruhu $O = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. Protože B je ortonormální báze, platí $\|\mathbf{x}\| = \|[\mathbf{x}]_B\|$. Vektor \mathbf{x} proto leží v O právě tehdy, když jeho souřadnice $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2)^T$ vzhledem k bázi B splňují $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Obrazem vektoru \mathbf{x} je vektor $A\mathbf{x}$ o souřadnicích $[A\mathbf{x}]_C = (y_1, y_2)^T \approx (1,618x_1, 0,618x_2)^T$. V obrazu kruhu O tedy budou právě ty body, jejichž souřadnice vzhledem k C splňují

$$\left(\frac{y_1}{1,618} \right)^2 + \left(\frac{y_2}{0,618} \right)^2 \leq 1$$

Z toho vidíme, že obrazem je elipsa s délkami poloos (přibližně) 1,618, 0,618. Směry poloos jsou určeny vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ báze C .

Užitečná je také maticová verze. Označíme-li $U = [\text{id}]_K^C$ a $V = [\text{id}]_K^B$, dostaneme z $[f_A]_C^B = D$ vztah $A = UDV^{-1}$. Protože V je ortogonální matice, platí $V^{-1} = V^T$, takže také můžeme psát $A = UDV^T$.

$$A = UDV^T = \begin{pmatrix} 0,851 & -0,526 \\ 0,526 & 0,851 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,618 & 0 \\ 0 & 0,618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,526 & 0,851 \\ -0,851 & 0,526 \end{pmatrix}$$

Na tento rozklad se také můžeme dívat tak, že zobrazení f_A vyjadřujeme jako složení $f_A = f_U f_D f_{V^T}$, kde f_U a f_{V^T} jsou ortogonální zobrazení a f_D je zobrazení určené diagonální maticí. Zobrazení f_A je tak v našem případě složením zobrazení f_{V^T} , což je rotace o přibližně $-58,28^\circ$, zobrazení f_D , které natahuje vektory 1,618-krát ve směru první osy a zkracuje 0,618-krát ve směru druhé osy, a zobrazení f_U , což je rotace o přibližně $31,72^\circ$. I z tohoto pohledu vidíme obraz jednotkového kruhu: Zobrazení $f_{V^T} = f_{V^{-1}}$ zobrazí O na O (přičemž vektor \mathbf{v}_1 se zobrazí na \mathbf{e}_1 a vektor \mathbf{v}_2 na \mathbf{e}_2). Zobrazení f_D kružnici deformuje ve směru souřadnicových os, čímž vznikne elipsa s osami $\langle \mathbf{e}_1 \rangle, \langle \mathbf{e}_2 \rangle$. Tuto elipsu zobrazení f_U otočí.

OBRAZEK

Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$, kde \mathbf{V} a \mathbf{U} jsou konečně generované vektorové prostory nad \mathbb{C} (nebo oba nad \mathbb{R}) se skalárními součiny. Chceme najít ortonormální bázi B prostoru \mathbf{V} a ortonormální bázi C prostoru \mathbf{U} tak, že $[f]_C^B$ je “diagonální” s nezápornými reálnými čísly na diagonále.

Tato matice nemusí být čtvercová, pojem diagonální matice proto rozšíříme. Říkáme, že matice $D = (d_{ij})$ typu $m \times n$ je *obdélníková diagonální matice*, pokud $d_{ij} = 0$, kdykoliv $i \neq j$ (kde $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$). Obdélníkovou diagonální matici budeme zapisovat $D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{rr})$ nebo obšírněji

$$D = \text{diag}_{m \times n}(d_{11}, \dots, d_{rr}) ,$$

chceme-li zvýraznit typ matice D . Budeme často vypisovat pouze nenulové prvky, tj. je-li $r < \min(m, n)$, rozumí se, že zbylé diagonální prvky jsou nulové.

Pokud $[f]_C^B = D = \text{diag}_{m \times n}(d_{11}, \dots, d_{rr})$, $d_{ii} \geq 0$, pak podle důsledku 9.105 o hermitovském sdružování vzhledem k ortonormální bázím platí $[f^*]_B^C = D^* = \text{diag}_{n \times m}(d_{11}, \dots, d_{rr})$. Z toho

$$[f^*f]_B^B = [f^*]_B^C [f]_C^B = \text{diag}_{n \times n}(d_{11}^2, \dots, d_{rr}^2) .$$

Vidíme, že na diagonále matice $[f]_C^B$ musí nutně být druhé odmocniny vlastních čísel operátoru f^*f a báze B musí sestávat z vlastních vektorů tohoto operátoru. Navíc ze vztahu $[f]_C^B = D$ vidíme, že obraz i -tého vektoru báze B musí být d_{ii} -násobkem i -tého vektoru v bázi C (pro $i \leq \min(m, n)$). Tato pozorování dávají návod k důkazu věty o singulárním rozkladu.

Věta 9.133. [o singulárním rozkladu] *Nechť \mathbf{V} a \mathbf{U} jsou konečně generované komplexní nebo reálné vektorové prostory a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$ je lineární zobrazení. Pak existují ortonormální báze B, C prostorů \mathbf{V}, \mathbf{U} takové, že $[f]_C^B$ je obdélníková diagonální matice.*

Důkaz. Operátor $f^*f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je podle tvrzení 9.125 pozitivně semidefinitní, takže podle spektrální věty pro hermitovské (resp. v reálném případě symetrické) operátory (věta 9.119 nebo důsledek 9.120) existuje ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} složená z vlastních vektorů operátoru f^*f a $[f^*f]_B^B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou nezáporná reálná vlastní čísla operátoru f^*f . Vektory v bázi B uspořádáme tak, aby $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Řekněme, že prvních r vektorů je nenulových.

Pro $i \in \{1, \dots, r\}$ označíme $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ a $\mathbf{u}_i = \sigma_i^{-1} f(\mathbf{v}_i)$. Pak pro libovolná $i, j \in \{1, \dots, r\}$ platí

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j \rangle &= \langle \sigma_i^{-1} f(\mathbf{v}_i) | \sigma_j^{-1} f(\mathbf{v}_j) \rangle = \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \langle f(\mathbf{v}_i) | f(\mathbf{v}_j) \rangle \\ &= \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \langle f^*f(\mathbf{v}_i) | \mathbf{v}_j \rangle = \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \lambda_i \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle . \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že pro $i \neq j$ jsou vektory $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \in U$ na sebe kolmé a navíc $\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_i \rangle = \sigma_i^{-2} \lambda_i = 1$, takže každý z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ má jednotkovou normu. Můžeme tedy tuto posloupnost doplnit na ortonormální bázi $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ prostoru \mathbf{U} .

Nyní pro $i \in \{1, \dots, r\}$ je $f(\mathbf{v}_i) = \sigma_i \mathbf{u}_i$, neboli $[f(\mathbf{v}_i)]_C = \sigma_i \mathbf{e}_i$, a pro $i > r$ je $[f(\mathbf{v}_i)]_C = \mathbf{o}$. Matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B a C je tedy skutečně

$$[f]_C^B = \text{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) .$$

□

Je zvykem vektory v bázích B a C uspořádat tak, že na diagonále matice $[f]_C^B$ jsou prvky uspořádány sestupně podle velikosti. Tyto prvky jsou podle pozorování nad větou rovný druhým odmocninám vlastních čísel operátoru f^*f , nazývají se *singulární hodnoty* lineárního zobrazení f . Z technických důvodů budeme singulárními hodnotami nazývat pouze nenulové prvky na diagonále.

Definice 9.134. Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$ je lineární zobrazení mezi konečně generovanými komplexními nebo reálnými vektorovými prostory se skalárním součinem, B, C jsou ortonormální báze \mathbf{V}, \mathbf{U} takové, že $[f]_C^B = \text{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, kde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Pak čísla $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ nazýváme *singulární hodnoty* lineárního zobrazení f .

Z pozorování nad větou 9.133 také vyplývá, že nenulová hodnota σ je na diagonále tolikrát, kolik je násobnost σ^2 jako vlastního čísla operátoru f^*f .

Rozmyslíme si podrobněji, co vztah $[f]_C^B = \text{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ říká o lineárním zobrazení f . Označme $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ a $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$. Podle definice matice operátoru je $f(\mathbf{v}_1) = \sigma_1 \mathbf{u}_1, \dots, f(\mathbf{v}_r) = \sigma_r \mathbf{u}_r$. Pro zbylé vektory v bázi B je $f(\mathbf{v}_{r+1}) = \dots = f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{o}$. Obecněji, obraz vektoru \mathbf{x} spočítáme vzorcem $[f(\mathbf{x})]_C = [f]_C^B [\mathbf{x}]_B$, tedy

- (1) Vektor \mathbf{x} vyjádříme v bázi B . Protože B je ortonormální, můžeme explicitně psát

$$[\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)^T, \text{ kde } x_i = \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{x} \rangle.$$

- (2) Vynásobíme zleva maticí $[f]_C^B$.

$$[f(\mathbf{x})]_C = [f]_C^B [\mathbf{x}]_B = \underbrace{(\sigma_1 x_1, \dots, \sigma_r x_r, 0, \dots, 0)^T}_{m \text{ složek}}.$$

Složky vektoru $[\mathbf{x}]_B$ tedy vynásobíme postupně $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ a případně doplníme nulami na m -složkový vektor

- (3) Z toho dostáváme vyjádření pro $f(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sigma_1 x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \sigma_r x_r \mathbf{u}_r \\ &= \sigma_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_1 + \dots + \sigma_r \langle \mathbf{v}_r | \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_r \end{aligned}$$

OBRAZEK

Z vyjádření $[f]_C^B$ také vidíme jádro a obraz operátoru f . Vzhledem k bázi B je $[\text{Ker } f]_B = \langle \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$, takže $\text{Ker } f = \langle \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle^\perp$. Pro obraz máme $[\text{Im } f]_C = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r \rangle$, takže $\text{Im } f = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle = \langle \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m \rangle^\perp$. Speciálně $\dim \text{Im } f = r$.

Příklad 9.135. Předpokládejme $\dim \mathbf{V} = 5$, $\dim \mathbf{U} = 4$, $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5)$, $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4)$ a $[f]_C^B = \text{diag}_{4 \times 5}(10, 9, 0, 1)$.

Vektor \mathbf{x} s vyjádřením $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ se zobrazí na vektor $f(\mathbf{x})$ s vyjádřením $[f(\mathbf{x})]_C = (10x_1, 9x_2, 0, 1x_3, 0)$, čili vektor $f(\mathbf{x}) = 10x_1 \mathbf{u}_1 + 9x_2 \mathbf{u}_2 + 0,1x_3 \mathbf{u}_3$. To lze interpretovat tak, že největší vliv na $f(\mathbf{x})$ mají první dvě složky x_1, x_2 odpovídající vektorům $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Tyto složky se přibližně zdesetinásobí, $f(\mathbf{x})$ bude „blízko“ roviny $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ a bude mít přibližně desetkrát větší normu (pokud není třetí složka příliš velká). Vliv třetí složky x_3 je malý a další složky nemají na výsledek žádný vliv.

Jádrem f je prostor $\text{Ker } f = \langle \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle^\perp$ a obrazem f je prostor $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = \mathbf{u}_4^\perp$.

Jaká je souvislost unitární diagonalizace operátoru a singulárního rozkladu? Uvažujme normální operátor f na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} a ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} takovou, že $[f]_B^B = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Vektory \mathbf{v} v B si uspořádáme tak, aby $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ a $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Singulární hodnoty zobrazení f jsou druhé odmocniny nenulových vlastních čísel operátoru f^*f , které můžeme spočítat jako (nenulová) vlastní čísla matice

$$[f^*f]_B^B = [f^*]_B^B[f]_B^B = D^*D = \text{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) .$$

Proto platí:

Pozorování 9.136. *Singulární hodnoty normálního operátoru jsou rovny absolutním hodnotám jeho nenulových vlastních čísel.*

Z tvaru $[f]_B^B = D$ navíc můžeme snadno získat singulární rozklad. Pro $i \leq r$ položíme $\mathbf{u}_i = (\lambda_i/|\lambda_i|)\mathbf{v}_i$. Posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ je ortonormální, protože vznikla vynásobením vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ komplexními čísly s absolutní hodnotou 1. Tyto vektory doplníme na ortonormální bázi $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Protože pro $i \leq r$ je $f(\mathbf{v}_i) = \lambda_i\mathbf{v}_i = |\lambda_i|\mathbf{u}_i$ a pro $i > r$ je $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0} = \lambda_i\mathbf{u}_i$, platí

$$[f]_C^B = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) .$$

Všimněte si ještě, že pro pozitivně definitní operátory unitární diagonalizace a singulární rozklad splývají.

9.7.1. *Singulární rozklad matice.* Následující věta je maticovou verzí věty 9.133. Poskytne nám také další geometrickou interpretaci.

Věta 9.133*. [singulární rozklad matice] Nechť A je komplexní (resp. reálná) matice typu $m \times n$. Pak existují unitární (resp. ortogonální) matice U, V řádů m, n a obdélníková diagonální matice D typu $m \times n$ takové, že

$$A = UDV^{-1} = UDV^* .$$

Důkaz. Důkaz budeme formulovat pro komplexní případ. Použijeme větu 9.133 na lineární zobrazení $f_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ mezi aritmetickými prostory se skalárním součinem. Existuje ortonormální báze B prostoru \mathbb{C}^n a ortonormální báze C prostoru \mathbb{C}^m tak, že $[f_A]_C^B = D$ je obdélníková diagonální matice. Označme U matici přechodu od C ke kanonické bázi prostoru \mathbb{C}^m a V matici přechodu od B ke kanonické bázi prostoru \mathbb{C}^n . Matice U, V jsou unitární, takže $U^{-1} = U^*$ (a $V^{-1} = V^*$). Pak

$$[f_A]_K^K = [\text{id}]_K^C[f_A]_C^B[\text{id}]_B^K = [\text{id}]_K^C[f_A]_C^B([\text{id}]_K^B)^{-1} = UDV^{-1} = UDV^* .$$

□

Rozklad $A = UDV^T = UDV^{-1}$ můžeme geometricky interpretovat jako $f_A = f_U f_D f_{V^{-1}}$. V případě reálné čtvercové matice řádu n je tedy $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ složením pořadě ortogonálního zobrazení $f_{V^{-1}}$, zobrazení f_D , které natahuje nebo zkracuje souřadnicové osy a ortogonálního zobrazení f_U .

Pro zobrazení $f_A = f_U f_D f_{V^T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sledujme postupně obraz n -dimenzionální koule $O = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. Zobrazení f_{V^T} je ortogonální, proto zobrazí O opět na O . Zobrazení f_D pak sféru O natáhne nebo smrští ve směru souřadnicových os (případně ještě ubere nebo přidá složky pokud $m \neq n$), tím vznikne tzv. *zobecněný elipsoid* s poloosami $\sigma_1\mathbf{e}_1, \sigma_2\mathbf{e}_2, \dots$. Nakonec se na vzniklou množinu aplikuje zobrazení f_U , které vektor \mathbf{e}_i zobrazí na vektor \mathbf{u}_i . Tím vznikne zobecněný elipsoid s polosami $\sigma_1\mathbf{u}_1, \sigma_2\mathbf{u}_2, \dots$ velikostí $\sigma_1, \sigma_2, \dots$.

Příklad 9.137. Spočítáme singulární rozklad zkosení $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diskutovaného v příkladu 9.132 daného maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Postupujeme podle důkazu věty 9.133. Najdeme ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ prostoru \mathbb{R}^2 se standardním skalárním součinem takovou, že matice operátoru $(f_A)^* f_A = f_{A^T A}$ vzhledem k B je diagonální.

Vlastní čísla matice

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou $\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$, singulární hodnoty jsou proto

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}, \quad \sigma_1 \approx 1,618, \quad \sigma_2 \approx 0,618 .$$

Příslušné prostory vlastních vektorů matice $A^T A$ jsou jednodimenzionální, vybereme v nich vektory jednotkové velikosti. Vyjde přibližně

$$\mathbf{v}_1 \approx \begin{pmatrix} 0,526 \\ 0,851 \end{pmatrix} \in M_{\lambda_1}, \quad \mathbf{v}_2 \approx \begin{pmatrix} -0,851 \\ 0,526 \end{pmatrix} \in M_{\lambda_2} .$$

Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ vypočteme ze vzorce $\mathbf{u}_i = \sigma_i^{-1} A \mathbf{v}_i$.

$$\mathbf{u}_1 \approx \begin{pmatrix} 0,851 \\ 0,526 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 \approx \begin{pmatrix} -0,526 \\ 0,851 \end{pmatrix} .$$

Vzhledem k bázím $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ a $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ má f_A matici

$$D = [f_A]_C^B \approx \begin{pmatrix} 1,618 & 0 \\ 0 & 0,618 \end{pmatrix} .$$

Příklad 9.138. Spočítáme singulární rozklad pro reálnou čtvercovou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Tato matice je normální, v příkladu 9.117 jsme ji unitárně diagonalizovali. Pokud by nás zajímali pouze singulární hodnoty, můžeme je spočítat jako absolutní hodnoty vlastních čísel $2, (1 + \sqrt{3}i)/2, (1 - \sqrt{3}i)/2$, tj. $\sigma_1 = 2$ (násobnost 1), $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$ (násobnost 2).

Z unitární diagonalizace lze také určit singulární rozklad, budeme ale postupovat podle důkazu věty 9.133. Najdeme ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem takovou, že matice operátoru $(f_A)^* f_A = f_{A^T A}$ vzhledem k B je diagonální. Matice

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

má vlastní číslo $\lambda_1 = 4$ násobnosti 1 a vlastní číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ násobnosti 2. Singulární hodnoty matice A jsou $\sigma_1 = 2$ a $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$. Příslušné prostory

vlastních vektorů jsou

$$M_4 = \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle, \quad M_1 = \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle,$$

V nich najdeme ortonormální báze. V prostoru M_1 je ortonormální báze třeba

$$(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right),$$

v prostoru M_4

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektory báze $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ vypočteme ze vztahu $\mathbf{u}_i = \sigma_i^{-1} f_A(\mathbf{v}_i)$.

$$\mathbf{u}_1 = 2^{-1} A \mathbf{v}_3 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_2 = A \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = A \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Vzhledem k ortonormálním bázím B a C je

$$[f_A]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To nám dává singulární rozklad matice A .

$$A = [f_A]_K^K = [\text{id}]_K^C [f_A]_C^B [\text{id}]_B^K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Obrazem jednotkové koule při zobrazení f_A je elipsoid s osami $\langle \mathbf{u}_1 \rangle, \langle \mathbf{u}_2 \rangle, \langle \mathbf{u}_3 \rangle$ a velikostí poloos 2, 1, 1. Protože velikosti druhé a třetí poloosy jsou stejné, je tento elipsoid rotačně symetrický podle osy $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$.

OBRAZEK

Příklad 9.139. Spočítáme singulární rozklad pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$$

jsou 30 a 0, singulární hodnota matice A je tedy $\sigma_1 = \sqrt{30}$. Příslušné normované vlastní vektory jsou

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektor

$$\mathbf{u}_1 = \sigma_1^{-1} A \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

doplníme do ortonormální báze \mathbb{R}^3 například vektory

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k bázím $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ a $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ máme

$$[f_A]_C^B = \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

což nám dává rozklad

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Obrazem jednotkového kruhu při zobrazení f_A je „elipsoid“ s osami $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{u}_2 \rangle$, $\langle \mathbf{u}_3 \rangle$ a poloosami velikostí $\sqrt{30}, 0, 0$, takže ve skutečnosti úsečka spojující $-\sqrt{30}\mathbf{u}_1$ a $\sqrt{30}\mathbf{u}_1$.

OBRAZEK

Uvažujme singulární rozklad $A = UDV^*$ matice typu $m \times n$ hodnosti r , kde $U = (\mathbf{u}_1 | \dots | \mathbf{u}_m)$, $D = \text{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ a $V = (\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_n)$. Formulku $A = UDV^*$ můžeme také psát

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \dots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^*,$$

čímž vyjadřujeme matici A jako součet matic hodnosti 1.

Úspornější forma, tzv. *kompaktní singulární rozklad*, je $A = U'D'(V')^*$, kde $U' = (\mathbf{u}_1 | \dots | \mathbf{u}_r)$ je typu $m \times r$, $D' = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ je čtvercová matice řádu r a $V' = (\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_r)$ je typu $n \times r$ (čili $(V')^*$ je typu $r \times n$). Například pro matici z příkladu 9.139 můžeme psát

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} (\sqrt{30}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Za zmínku v souvislosti se singulárním rozkladem stojí tzv. *polární rozklad* $A = RW$ čtvercové matice A , kde R je pozitivně semidefinitní matice a W je unitární. Ze singulárního rozkladu $A = UDV^T$ jej dostaneme úpravou $A = (UDU^T)(UV^T)$. Matice UDU^T je pozitivně semidefinitní a matice UV^T je unitární, takže můžeme položit $R = UDU^T$ a $W = UV^T$. Polární rozklad lze chápat jako zobecnění rozkladu komplexního čísla na součin nezáporného reálného čísla a komplexního čísla jednotkové velikosti.

9.7.2. *Spektrální norma.* Singulární rozklad lineárního zobrazení f nám umožňuje odpovědět na otázku, jaký nejvýše (nejméně) může být podíl $\|f(\mathbf{x})\| / \|\mathbf{x}\|$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. Jinými slovy, jak nejvíc se může změnit délka vektoru při zobrazení f . Pro které vektory se tohoto maxima (minima) nabývá?

Nejprve si všimneme, že

$$\frac{\|f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = \left\| f\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \right\| ,$$

takže se stačí zabývat otázkou, jaká je největší, nebo nejmenší hodnota $\|f(\mathbf{x})\|$ pro vektory \mathbf{x} jednotkové velikosti (tj. pro vektory na jednotkové sféře). Geometricky je v případě reálných matic odpověď patrná z diskuze o obrazu jednotkové koule. Ukážeme algebraické odvození v obecném případě.

Nechť B, C jsou ortonormální báze takové, že $[f]_C^B = \text{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Označme $[\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)$. Protože $\|\mathbf{x}\| = 1$ a B je ortonormální, je $\|[\mathbf{x}]_B\| = 1$, čili

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1 .$$

Norma vektoru $f(\mathbf{x})$ je potom

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|[f(\mathbf{x})]_C\| = \|(\sigma_1 x_1, \dots, \sigma_r x_r, 0, \dots, 0)^T\| = \sqrt{\sigma_1^2 |x_1|^2 + \dots + \sigma_r^2 |x_r|^2} .$$

Protože $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$ je tento výraz větší nebo roven

$$\sqrt{\sigma_1^2 (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)} = \sigma_1 ,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $|x_i| = 0$ pro každé i takové, že $\sigma_i < \sigma_1$, neboli právě pro vektory \mathbf{x} v lineárním obalu vektorů báze B příslušných singulární hodnotě σ_1 , neboli právě pro vlastní vektory operátoru f^*f příslušné vlastnímu číslu σ_1^2 . Odvodili jsme následující tvrzení

Tvrzení 9.140. *Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi reálnými nebo komplexními vektorovými prostory se skalárním součinem. Pak pro libovolný vektor $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in V$ platí*

$$\frac{\|f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \sigma_1 ,$$

kde σ_1 je největší singulární hodnota operátoru f . Rovnost nastává právě tehdy, když \mathbf{x} je vlastní vektor operátoru f^*f příslušný vlastnímu číslu σ_1^2 .

Podobné tvrzení samozřejmě můžeme formulovat pro matice a výraz $\|A\mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}\|$. Maximu výrazu $\|f(\mathbf{x})\| / \|\mathbf{x}\|$ (resp. $\|A\mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}\|$) se také říká *spektrální norma* operátoru f (resp. matice A). Je rovná největší singulární hodnotě. Budeme ji značit $\|f\|$ (resp. $\|A\|$). Podle definice je

$$\|f(\mathbf{x})\| \leq \|f\| \|\mathbf{x}\| , \quad \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| .$$

Obdobné tvrzení se odvodí pro minima:

Tvrzení 9.141. *Nechť $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi reálnými nebo komplexními vektorovými prostory se skalárním součinem, $\dim V = n$. Pak pro libovolný vektor $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in V$ platí*

$$\frac{\|f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \sigma_{\min} ,$$

kde σ_{\min} je nejmenší singulární hodnota operátoru f v případě, že f je prostý, nebo $\sigma_{\min} = 0$ v opačném případě. Rovnost nastává právě tehdy, když \mathbf{x} je vlastní vektor operátoru f^*f příslušný vlastnímu číslu σ_{\min}^2 .

Příklad 9.142. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z příkladu 9.138 má spektrální normu $\|A\| = 2$, tj. pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ platí

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq 2 .$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in M_4 = \langle \mathbf{v}_1 \rangle = \langle (1, 1, 1)^T \rangle$ (značení přebíráme z příkladu 9.138).

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ platí

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq 1 ,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in M_1 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle (-1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T \rangle$.

Příklad 9.143. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

z příkladu 9.139 platí

$$0 \leq \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \sqrt{30} .$$

(První nerovnost je triviální.) Rovnost v první nerovnosti nastává pro $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \text{Ker } A = \langle \mathbf{v}_2 \rangle = \langle (-2, 1)^T \rangle$, v druhé nerovnosti pro $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \langle \mathbf{v}_1 \rangle = \langle (1, 2)^T \rangle$. Spektrální norma matice A je $\|A\| = \sqrt{30}$.

9.7.3. *Numerická stabilita řešení soustavy lineárních rovnic s regulární maticí.* Uvažujme soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde A je reálná regulární matice, jejíž řešení je, jak víme, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Řekněme, že vektor \mathbf{b} získáme měřením, které je zatíženo chybou $\delta\mathbf{b}$ (výraz $\delta\mathbf{b}$ chápejte jako označení vektoru, nikoliv jako součin). Ve skutečnosti tedy neznámé hodnoty \mathbf{x} budou zatížené chybou $\delta\mathbf{x}$, kde

$$A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} , \text{ tj. } \delta\mathbf{x} = A^{-1}\delta\mathbf{b} .$$

Velikost chyby bude

$$\|\delta\mathbf{x}\| = \|A^{-1}\delta\mathbf{b}\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta\mathbf{b}\| .$$

(Přičemž rovnost může nastat.) Pokud je spektrální norma $\|A^{-1}\|$ vysoká, např. 10^6 , velikost chyby neznámých hodnot může být až 10^6 -krát větší než velikost chyby naměřených hodnot. To je neuspokojivé a je nejspíše potřeba změnit model. Všimněte si, že norma $\|A^{-1}\|$ je rovná převrácené hodnotě nejmenší singulární hodnoty matice A (cvičení).

V praxi nás spíše bude zajímat odhad na velikost relativní chyby $\|\delta\mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}\|$ neznámých hodnot v závislosti na velikosti relativní chyby $\|\delta\mathbf{b}\| / \|\mathbf{b}\|$ měření. K tomu si všimneme

$$\|\mathbf{b}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| ,$$

takže

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \|\delta \mathbf{b}\| \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \|\delta \mathbf{b}\| \frac{\|A\|}{\|\mathbf{b}\|} = \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} .$$

Číslu $\|A\| \|A^{-1}\|$ se říká *číslo podmíněnosti matice* A , je rovno podílu největší a nejmenší singulární hodnoty. Relativní chybu řešení lze tedy odhadnout relativní chybou měření krát číslo podmíněnosti.

Příklad 9.144. Číslo podmíněnosti matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z příkladu 9.138 je $2/1 = 2$. Relativní chyba řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bude tedy nejvýše dvakrát větší než relativní chyba měření pravé strany.

9.7.4. Aproximace maticí nižší hodnosti. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ hodnosti r , tj. $r = \dim \operatorname{Im} f$. Chceme najít lineární zobrazení $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dané hodnosti $s < r$, které co nejlépe aproximuje f ve smyslu, že spektrální norma $\|f - \hat{f}\|$ je co nejmenší. To se nám může hodit při komprimaci dat nebo při zjednodušování matematických modelů.

Nechť $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, C jsou ortonormální báze \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m takové, že $[f]_C^B = \operatorname{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, kde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Ukážeme, že hledaná nejlepší aproximace \hat{f} lineárního zobrazení f je určena vztahem

$$[\hat{f}]_C^B = \operatorname{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_s) .$$

Při této volbě je

$$[f - \hat{f}]_C^B = \operatorname{diag}_{m \times n}(0, \dots, 0, \sigma_{s+1}, \dots, \sigma_r)$$

největší singulární číslo lineárního zobrazení $f - \hat{f}$ je σ_{s+1} , takže

$$\|f - \hat{f}\| = \sigma_{s+1} .$$

Zbývá ukázat, že lepší normy nelze dosáhnout. Předpokládejme, že $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení hodnosti nejvýše s . Protože $\dim \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s+1} \rangle = s + 1$ a $\dim \operatorname{Ker} g = n - \dim \operatorname{Im} g \geq n - s$, plyne z věty o dimenzi součtu a průniku, že se tyto dva prostory protínají. Uvažujme libovolný nenulový vektor \mathbf{x} v jejich průniku a označme $[\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)$, tj. $g(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ a $x_{s+2} = \dots = x_n = 0$. Pak

$$\begin{aligned} \|f - g\| &\geq \frac{\|(f - g)(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|[f(\mathbf{x})]_C\|}{\|[\mathbf{x}]_B\|} = \frac{\|(\sigma_1 x_1, \dots, \sigma_{s+1} x_{s+1}, 0, \dots, 0)^T\|}{\|(x_1, \dots, x_{s+1}, 0, \dots, 0)^T\|} \\ &\geq \frac{\|(\sigma_{s+1} x_1, \dots, \sigma_{s+1} x_{s+1}, 0, \dots, 0)^T\|}{\|(x_1, \dots, x_{s+1}, 0, \dots, 0)^T\|} = \sigma_{s+1} , \end{aligned}$$

Tedy norma je skutečně alespoň σ_{s+1} .

V maticovém pohledu můžeme výsledek formulovat následujícím způsobem. Je-li singulární rozklad matice A roven

$$A = UDV^T = U \operatorname{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) V^T = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \dots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^* ,$$

kde $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r$, pak nejlepší aproximace \hat{A} matice A maticí hodnosti s je

$$\hat{A} = U \operatorname{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_s) V^T = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \dots + \sigma_s \mathbf{u}_s \mathbf{v}_s^* .$$

K uložení matice A typu $m \times n$ v počítači potřebujeme mn skalárů. K uložení aproximace \hat{A} stačí $s(m+n+1)$ skalárů (protože máme s sčítanců a každý sčítanec obsahuje skalár σ_i , m -složkový vektor \mathbf{u}_i a n -složkový vektor \mathbf{v}_i). Toho lze využít pro komprimaci dat.

Příklad 9.145. Nejlepší aproximace matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z příkladu 9.138 maticí hodnosti 1 je

$$\hat{A} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* = 2 \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ 1 \ 1) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aproximace je nejlepší v tom smyslu, že $\|A - \hat{A}\| = \sigma_2 = 1$ a pro žádnou matici B hodnosti 1 neplatí $\|A - B\| < 1$.

Aproximovat A maticí hodnosti 2 se nevyplatí, protože norma rozdílu $A - \hat{A}$ byla také rovna $\sigma_3 = 1$, takže bychom v tomto smyslu nedosáhli žádného zlepšení.

9.7.5. *Pseudoinverze.* Uvažujme soustavu rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde A je reálná matice typu $m \times n$. Soustava nemusí mít žádné řešení. V tom případě víme, že aproximace řešení metodou nejmenších čtverců jsou právě všechna řešení soustavy rovnic

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b} .$$

Tato soustava může mít řešení více, najdeme takové, pro které je norma $\|\mathbf{x}\|$ nejmenší.

Uvažme nejprve speciální případ, kdy $A = D = \text{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, kde $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ jsou nenulová reálná čísla. Chceme najít řešení soustavy

$$D^T D \mathbf{x} = D^T \mathbf{b} ,$$

s nejmenší normou. Označme $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$. Pak

$$D^T D \mathbf{x} = \text{diag}_{n \times n}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2)(x_1, \dots, x_n)^T = (\sigma_1^2 x_1, \dots, \sigma_r^2 x_r, 0, \dots, 0)^T$$

a

$$D^T \mathbf{b} = \text{diag}_{n \times m}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)(b_1, \dots, b_m)^T = (\sigma_1 b_1, \dots, \sigma_r b_r, 0, \dots, 0)^T .$$

Řešení \mathbf{x} s nejmenší normou bude tedy

$$(x_1, \dots, x_n)^T = (b_1 \sigma_1^{-1}, \dots, b_r \sigma_r^{-1}, 0, \dots, 0)^T .$$

Označíme-li

$$D^\dagger = \text{diag}_{n \times m}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}) ,$$

můžeme vztah maticově zapsat

$$\mathbf{x} = D^\dagger \mathbf{b} .$$

Pomocí singulárního rozkladu teď tento výsledek zobecníme na obecnou matici $A = UDV^T$. Hledáme \mathbf{x} s nejmenší normou, aby

$$\begin{aligned} A^T \mathbf{Ax} &= A^T \mathbf{b} \\ VD^T U^T UDV^T \mathbf{x} &= VD^T U^T \mathbf{b} \\ VD^T DV^T \mathbf{x} &= VD^T U^T \mathbf{b} \\ D^T DV^T \mathbf{x} &= D^T U^T \mathbf{b} . \end{aligned}$$

Protože $\|V^T \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ (matice V^T je ortogonální), pro hledané \mathbf{x} podle předchozího výsledku platí

$$V^T \mathbf{x} = D^\dagger U^T \mathbf{b}$$

a vynásobením maticí V zleva získáme

$$\mathbf{x} = VD^\dagger U^T \mathbf{b}$$

Matice $A^\dagger = VD^\dagger U^T$ je tzv. *Moore-Penroseova pseudoinverze* matice A . Při použití zápisu

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \dots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^*$$

můžeme psát

$$A^\dagger = \sigma_1^{-1} \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1^* + \dots + \sigma_r^{-1} \mathbf{v}_r \mathbf{u}_r^* .$$

Ukázali jsme, že pro soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je vektor $\mathbf{x} = A^\dagger \mathbf{b}$ nejkratším vektorem, který je zároveň aproximací řešení metodou nejmenších čtverců. Speciálně, pokud $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení, pak je tímto řešením vektor $\mathbf{x} = A^\dagger \mathbf{b}$ (tj. pro regulární matice A je $A^\dagger = A^{-1}$). Má-li soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ více řešení, pak je $\mathbf{x} = A^\dagger \mathbf{b}$ řešením s nejmenší normou.

Příklad 9.146. Uvažujme soustavu

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aproximace soustavy metodou nejmenších čtverců jsou řešení soustavy $A^T \mathbf{Ax} = A^T \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

OBRAZEK

Z obrázku je vidět, že aproximace s nejmenší normou má směr $\langle (1, 2)^T \rangle$ a snadno vypočteme $\mathbf{x} = (1/5, 2/5)^T$.

Toto řešení můžeme vypočítat pomocí pseudoinverze. V příkladu 9.139 jsme našli singulární rozklad

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* = \sqrt{30} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} .$$

Pseudoinverze je

$$A^\dagger = \sigma_1^{-1} \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1^* = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} ,$$

takže hledaná aproximace je

$$\mathbf{x} = A^\dagger \mathbf{b} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

10. BILINEÁRNÍ FORMY

Cíl. *Bilineární formu lze chápat jako zobecnění skalárního součinu. Ponecháme pouze vlastnosti linearity v každé složce a vzdáme se symetrie a pozitivní definitnosti. Taková zobecnění skalárního součinu se používají například ve fyzice, konkrétně ve speciální teorii relativity. Naši hlavní motivací pro studium bilineárních forem je porozumění kvadratickým formám, které určují „kvadratické útvary“. Ukážeme, že kvadratické formy vzájemně jednoznačně odpovídají symetrickým bilineárním formám. Hlavní náplní bude nalezení báze, vzhledem ke které má symetrická bilineární forma, a tím i příslušná kvadratická forma, jednoduchý tvar. To nám umožní analyzovat tvar kvadratických útvarů.*

Bilineární forma je zobrazení přiřazující každé dvojici vektorů prvek tělesa, které je lineární v obou složkách.

Definice 10.1. Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad tělesem \mathbf{T} . *Bilineární forma* na prostoru \mathbf{V} je zobrazení $f : V \times V \rightarrow T$, které je lineární v obou složkách, tj. pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, t \in T$ platí

- (1) $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $f(\mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ a
- (2) $f(t\mathbf{v}, \mathbf{w}) = t f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $f(\mathbf{v}, t\mathbf{w}) = t f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Příklad 10.2. Bilineární formou na \mathbb{R}^3 je například zobrazení

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) &= 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_1y_3 + 6x_2y_1 + x_2y_3 + 10x_3y_2 \\ &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Uvidíme, že každá bilineární forma na aritmetickém vektorovém prostoru \mathbf{T}^n je tvaru $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$, pro nějakou čtvercovou matici řádu n nad \mathbf{T} .

Příklad 10.3. Libovolný skalární součin na reálném vektorovém prostoru \mathbf{V} je bilineární forma na \mathbf{V} (která je navíc symetrická a pozitivně definitní). Bilineární formy tedy můžeme chápat jako zobecnění skalárního součinu. Axiomy (1) a (2) jsme využili k odvození formule pro standardní skalární součin.

Obecněji, pro libovolný operátor g na reálném prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem $\langle | \rangle$ je $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | g(\mathbf{y}) \rangle$ bilineární forma. Takové bilineární formy jsme potkali při sdružování lineárních zobrazení.

Pozor! Skalární součin na komplexním vektorovém prostoru bilineární forma není — vlastnost $f(t\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ bychom museli nahradit vlastností $f(t\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{t} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Takovým formám se říká *seskvilineární* a nebudeme se jimi podrobněji zabývat.

Příklad 10.4. Zobrazení $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}$ definované vztahem $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je bilineární forma na \mathbf{T}^2 . Axiomy (1) a (2) byly také základní vlastnosti použité při odvození vzorce pro determinant matic 2×2 .

Pro matice vyšších řádů je determinant příkladem tzv. *multilineární* formy, tedy zobrazení $V \times V \times \cdots \times V \rightarrow T$ lineární v každé složce.

My využijeme bilineární formy hlavně při studiu kvadratických forem.

Definice 10.5. Je-li f bilineární forma na vektorovém prostoru V nad tělesem T , pak zobrazení $f_2 : V \rightarrow T$ definované předpisem

$$f_2(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \text{pro každé } \mathbf{v} \in V$$

nazýváme *kvadratickou formou* vytvořenou bilineární formou f .

Rovněž říkáme, že f_2 je kvadratická forma příslušná bilineární formě f .

Příklad 10.6. Pro bilineární formu na \mathbb{R}^3 z příkladu 10.2 je

$$\begin{aligned} f_2((x_1, x_2, x_3)^T) &= 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_1x_3 + 6x_2x_1 + x_2x_3 + 10x_3x_2 \\ &= 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_1x_3 + 11x_2x_3 \end{aligned}$$

Maticově,

$$f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} ,$$

kde A je matice řádu 3 ze stejného příkladu.

Příklad 10.7. Je-li f skalární součin na reálném vektorovém prostoru V (tj. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$), pak $f_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$.

Kvadratické formy se vyskytují při analýze funkcí více proměnných. Například nás zajímá, jak vypadá daná hladká funkce $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ v okolí nějakého bodu $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$, řekněme $\mathbf{d} = (0, 0)^T$. Velmi hrubá aproximace je nahradit funkci její funkční hodnotou $c = h(\mathbf{d})$

$$h(x_1, x_2) \approx c .$$

Přesnější je lineární aproximace, kdy nahradíme funkci její tečnou rovinou

$$h(x_1, x_2) \approx c + b_1x_1 + b_2x_2 .$$

Nekonstantní část $g(x_1, x_2) = b_1x_1 + b_2x_2$ je lineární forma na \mathbb{R}^2 , koeficienty b_1, b_2 se vypočtou pomocí parciálních derivací. Ještě přesnější je aproximace polynomem stupně 2:

$$h(x_1, x_2) \approx c + b_1x_1 + b_2x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Kvadratická část $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ je kvadratická forma na \mathbb{R}^2 (koeficienty se vypočtou z druhých parciálních derivací). Tato aproximace je důležitá například při hledání extrémů.

Proto nás zajímá, jak vypadá graf kvadratické funkce více proměnných. Obecněji nás zajímá, jak vypadá implicitně zadaný kvadratický útvar, například množina bodů v \mathbb{R}^3 splňujících rovnici

$$10x_1^2 + 13x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 = 9 .$$

Základní myšlenka na řešení takových problémů je stejná jako u lineárních operátorů: najít bázi, vzhledem ke které je bilineární forma přehledná.

10.1. Matice.

Podobně jako v úvodu do determinantů spočítáme, že každá bilineární forma je určena obrazy dvojic prvků libovolné báze. To nám dává maticovou reprezentaci bilineárních forem a tzv. analytické vyjádření. Nechť f je bilineární forma na \mathbf{V} a $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze prostoru \mathbf{V} . Vezmeme dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a vyjádříme $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pomocí souřadnic vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} v bázi B a pomocí hodnot $a_{ij} = f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$:

$$[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad [\mathbf{y}]_B = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T .$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f(x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n, y_1 \mathbf{v}_1 + \dots + y_n \mathbf{v}_n) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i, \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{v}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f\left(\mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij} \\ &= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

To vede k pojmu matice bilineární formy vzhledem k bázi.

Definice 10.8. Nechť $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} a f je bilineární forma na \mathbf{V} . *Maticí bilineární formy f vzhledem k B* rozumíme čtvercovou matici řádu n nad \mathbf{T} , která má na pozici (i, j) prvek $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$. Tuto matici značíme $[f]_B$.

Tvrzení 10.9. *Je-li B báze konečně generovaného prostoru \mathbf{V} a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, pak*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B [\mathbf{y}]_B .$$

Jsou-li souřadnice vektorů $[\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)^T$, $[\mathbf{y}]_B = (y_1, \dots, y_n)^T$ a $[f]_B = (a_{ij})_{n \times n}$, pak

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j .$$

Tomuto vyjádření také říkáme *analytické vyjádření bilineární formy f* .

Naopak, každou bilineární formu na konečně generovaném prostoru můžeme vztahem $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T A [\mathbf{y}]_B$ definovat a matice A je tímto určená jednoznačně:

Tvrzení 10.10. *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný prostor nad tělesem \mathbf{T} , $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je jeho báze a A je čtvercová matice nad \mathbf{T} řádu n . Pak zobrazení $f : V \times V \rightarrow T$ definované vztahem*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T A [\mathbf{y}]_B \quad \text{pro každé } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

je bilineární forma na \mathbf{V} a platí $[f]_B = A$.

Důkaz. Pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= [\mathbf{u} + \mathbf{v}]_B^T A[\mathbf{w}]_B = ([\mathbf{u}]_B^T + [\mathbf{v}]_B^T) A[\mathbf{w}]_B = [\mathbf{u}]_B^T A[\mathbf{w}]_B + [\mathbf{v}]_B^T A[\mathbf{w}]_B \\ &= f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) . \end{aligned}$$

Ostatní axiomy se ověří podobně.

Dosazením $\mathbf{x} = \mathbf{v}_i$ a $\mathbf{y} = \mathbf{v}_j$ získáme

$$f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = [\mathbf{v}_i]_B^T A[\mathbf{v}_j] = \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j ,$$

což je prvek na místě (i, j) v matici A , takže skutečně $[f]_B = A$. \square

Při pevně zvolené bázi B tedy takto bilineární formy na \mathbf{V} vzájemně jednoznačně odpovídají čtvercovým maticím nad \mathbf{T} řádu n .

Příklad 10.11. Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

je bilineární forma na \mathbb{R}^2 . Jeho matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} .$$

Vezmeme jinou bázi \mathbb{R}^2 , například

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) .$$

Matice f vzhledem k B je podle definice

$$[f]_B = \begin{pmatrix} f((1, -1)^T, (1, -1)^T) & f((1, -1)^T, (2, 0)^T) \\ f((2, 0)^T, (1, -1)^T) & f((2, 0)^T, (2, 0)^T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} ,$$

kde například prvek na místě $(1, 2)$ spočteme

$$f((1, -1)^T, (2, 0)^T) = (1, -1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, -1) \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -4 .$$

Matice bilineární formy f vzhledem k B nám umožňuje rychle spočítat $f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T)$ známe-li vyjádření vektorů vzhledem k bázi B :

$$[(x_1, x_2)^T]_B = (x'_1, x'_2)^T, \quad [(y_1, y_2)^T]_B = (y'_1, y'_2)^T,$$

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) &= (x'_1 \ x'_2) \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} \\ &= -2x'_1y'_1 - 4x'_1y'_2 + 4x'_2y'_1 + 8x'_2y'_2 . \end{aligned}$$

Matici $[f]_B$ spočítáme ještě jedním způsobem, který nám zároveň ukáže, jak se obecně mění matice bilineární formy při přechodu od báze k bázi. Označme X matici přechodu od B ke kanonické bázi K_2 .

$$X = [\text{id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro libovolný vektor $\mathbf{z} \in V$ platí $[\mathbf{z}]_{K_2} = X[\mathbf{z}]_B$ a transponováním získáme $[\mathbf{z}]_{K_2}^T = [\mathbf{z}]_B^T X^T$. Pak

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} \\ &= (x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z jednoznačnosti maticového vyjádření f nyní plyne, že matice f vzhledem k B je stejná jako u předchozího výpočtu.

Zobecněním výpočtu v předchozím příkladu dostáváme vztah o změně matice při přechodu od báze k bázi.

Tvrzení 10.12. *Nechť f je bilineární forma na vektorovém prostoru \mathbf{V} , B a C jsou báze \mathbf{V} a $X = [\text{id}]_B^C$ je matice přechodu od C k B . Pak $[f]_C = X^T [f]_B X$.*

Důkaz. Pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B [\mathbf{y}]_B = ([\text{id}]_B^C [\mathbf{x}]_C)^T [f]_B ([\text{id}]_B^C [\mathbf{y}]_C) = [\mathbf{x}]_C^T X^T [f]_B X [\mathbf{y}]_C.$$

Z jednoznačnosti matice bilineární formy vzhledem k bázi nyní plyne $[f]_C = X^T [f]_B X$. \square

Čtvercová matice A řádu n má teď pro nás dva geometrické významy: lineární operátor f_A na \mathbf{T}^n a bilineární forma $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ na \mathbf{T}^n . Všimněte si rozdílu při změně báze. Je-li R matice přechodu od B ke kanonické bázi, pak matice příslušného lineárního operátoru vzhledem k B je $R^{-1} A R$ zatímco matice příslušné bilineární formy vzhledem k B je $R^T A R$.

10.2. Symetrické a antisymetrické formy. Kvadratická forma může být vytvořena různými bilineárními formami, například bilineární formy

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + x_2 y_1, \quad g((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1 y_1 + 4x_2 y_1$$

vytváří stejnou kvadratickou formu

$$f_2((x_1, x_2)^T) = g_2((x_1, x_2)^T) = 2x_1^2 + 4x_1 x_2$$

V této části si, v případě těles charakteristiky různé od dva, jednoznačně rozložíme každou bilineární formu na součet symetrické a antisymetrické, a ukážeme, že vytvořená kvadratická forma je určena symetrickou částí.

Definice 10.13. Bilineární forma f na vektorovém prostoru \mathbf{V} se nazývá

- *symetrická*, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
- *antisymetrická*, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Příkladem symetrické formy je skalární součin na reálném vektorovém prostoru.

Zda je forma symetrická (antisymetrická) poznáme snadno z matice vzhledem k libovolné bázi.

Tvrzení 10.14. *Nechť \mathbf{V} je konečně generovaný vektorový prostor, B je báze \mathbf{V} a f je bilineární forma na \mathbf{V} . Pak*

- *f je symetrická právě tehdy, když je $[f]_B$ symetrická matice;*
- *f je antisymetrická právě tehdy, když je $[f]_B$ antisymetrická matice.*

Důkaz. Dokážeme první ekvivalenci, druhá se dokáže podobně. Označme $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Prvek na místě (i, j) v matici $[f]_B$ je podle definice roven $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$. Je-li tedy f symetrický pak prvek na místě (i, j) je stejný jako prvek na místě (j, i) , takže $[f]_B$ je symetrická matice.

Je-li naopak $[f]_B$ symetrická matice, pak pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B [\mathbf{y}]_B = [\mathbf{x}]_B^T [f]_B^T [\mathbf{y}]_B = ([\mathbf{x}]_B^T [f]_B^T [\mathbf{y}]_B)^T = [\mathbf{y}]_B^T [f]_B [\mathbf{x}]_B = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) ,$$

kde ve třetí rovnosti jsme využili, že $(t)^T = t$ pro libovolný skalár $t \in T$. \square

Bilineární formy můžeme přirozeným způsobem sčítat a násobit skalárem. Jsou-li f, g dvě bilineární formy na \mathbf{V} a $t \in T$ pak definujeme

$$(f + g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (tf)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = tf(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

S těmito operacemi tvoří množina všech bilineárních forem na \mathbf{V} vektorový prostor. Je-li B konečná báze \mathbf{V} , snadno se ověří vztahy

$$[f + g]_B = [f]_B + [g]_B, \quad [tf]_B = t[f]_B .$$

Zamysleme se nyní, jak rozložit danou bilineární formu f na prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} na součet symetrické formy f_s a antisymetrické formy f_a . Pro konečně generované prostory je tento úkol ekvivalentní rozkladu čtvercové matice na součet symetrické a antisymetrické. Pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ chceme, aby platilo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= f_s(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f_a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Dostali jsme pro $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ soustavu dvou rovnic s řešením

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})), \quad f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{x})) .$$

Je snadné nahlédnout, že bilineární forma f_s definovaná tímto předpisem je symetrická a f_a je antisymetrická. Problém je pouze v případě, kdy soustava má singulární matici, tj. v případě, že $1 = -1$, ekvivalentně, charakteristika tělesa \mathbf{T} je 2. V opačném případě z postupu vyplývá, že f_s, f_a jsou určeny jednoznačně. Dokázali jsme

Tvrzení 10.15. *Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor nad tělesem \mathbf{T} charakteristiky různé od 2. Pak každou bilineární formu f na \mathbf{V} lze psát jako součet $f = f_s + f_a$, kde f_s je symetrická a f_a je antisymetrická. Tento rozklad je jednoznačný a platí*

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})), \quad f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{x})) .$$

Důkaz. \square

Množina symetrických bilineárních forem na \mathbf{V} i množina antisymetrických bilineárních forem na \mathbf{V} tvoří podprostory prostoru všech bilineárních forem na \mathbf{V} (cvičení). Tvrzení lze formulovat také tak, že vektorový prostor všech bilineárních forem na \mathbf{V} je direktním součtem těchto dvou podprostorů.

Příklad 10.16. Bilineární forma f na \mathbb{R}^2

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_1y_2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

je součtem

$$f_s((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$f_a((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = x_1y_2 - x_2y_1 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

To odpovídá maticovému vztahu

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro tělesa charakteristiky dva, například $\mathbf{T} = \mathbb{Z}_2$, je teorie bilineárních forem odlišná, ale tímto případem se nebudeme zvlášť zabývat. Poznamenejme jen, že pojmy symetrická a antisymetrická v tomto případě splývají (cvičení).

Bilineární formy využíváme mimo jiné ke studiu příslušných kvadratických forem. Tato kvadratická forma závisí pouze na symetrické části bilineární formy:

Tvrzení 10.17. *Nechť f, g jsou bilineární formy na vektorovém prostoru \mathbf{V} nad tělesem charakteristiky různé od 2. Pak $f_2 = g_2$ právě tehdy, když $f_s = g_s$. Navíc*

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y})) .$$

Důkaz. Je-li g antisymetrická forma, pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$ platí $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Pokud je charakteristika tělesa různá od dva, vyplývá z tohoto vztahu $g_2(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. Pro libovolnou bilineární formu f pak máme

$$f_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f_a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) .$$

Vytvořená kvadratická forma tedy závisí jen na symetrické části. Odtud plyne implikace zprava doleva.

Vzorec z tvrzení ověříme přímočarým výpočtem.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y})) &= \frac{1}{2}(f_s(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y})) \\ &= \frac{1}{2}(f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_s(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y})) \\ &= \frac{1}{2}(2f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Implikace zleva doprava je nyní zřejmá. □

Vztah v předchozí větě je varianta polarizační identity z tvrzení 7.7. Dává explicitní vzorec na výpočet hodnoty symetrické bilineární formy pomocí příslušné formy kvadratické. Tuto jednoznačně určenou symetrickou bilineární formu také nazýváme *symetrická forma příslušná dané kvadratické formě*.

Příklad 10.18. Uvažujme kvadratickou formu

$$f_2((x_1, x_2)^T) = 2x_1^2 + 7x_1x_2 + 5x_2^2$$

Pro nalezení symetrické formy f není třeba používat vzorec z předchozího tvrzení, stačí si uvědomit z jakých členů bilineární formy pochází členy f_2 . Je-li

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

a $f_2((x_1, x_2)^T) = f((x_1, x_2)^T, (x_1, x_2)^T)$, pak koeficient u x_1^2 v kvadratické formě f_2 musí pocházet ze členu $a_{11}x_1y_1$, tedy $a_{11} = 2$. Podobně $a_{22} = 5$. Koeficient u x_1x_2 vznikne součtem $a_{12} + a_{21}$ a kvůli symetrii je $a_{12} = a_{21} = 7/2$. Takže je

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1^2 + 3,5x_1y_2 + 3,5x_2y_1 + 5x_2^2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 3,5 \\ 3,5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

10.3. Ortogonální báze.

V celém zbytku kapitoly se budeme věnovat pouze symetrickým formám nad tělesy charakteristiky různé od 2. Budeme se snažit najít bázi vzhledem k níž má daná bilineární forma co nejjednodušší matici, ideálně diagonální. Narozdíl od lineárních operátorů to vždy lze provést.

Symetrické bilineární formy vzájemně jednoznačně odpovídají kvadratickým. Všechny pojmy a výsledky pro symetrické bilineární pojmy budeme proto používat i pro příslušné kvadratické formy.

Co pro bilineární formu f znamená, že matice vzhledem k bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ je diagonální? Podle definice musí pro dva různé vektory $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$, $i \neq j$ platit $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$. To motivuje pojem ortogonality vektorů.

Definice 10.19. Nechť f je symetrická bilineární forma na \mathbf{V} a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Říkáme, že \mathbf{x} a \mathbf{y} jsou *f-ortogonální*, pokud $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Zapisujeme $\mathbf{x} \perp_f \mathbf{y}$.

Báze $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} se nazývá *f-ortogonální*, pokud je $[f]_B$ diagonální, tj. pro libovolné $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, jsou vektory $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ *f-ortogonální*. (Pokud je f zřejmé z kontextu, říkáme někdy pouze ortogonální.)

V případě, že f je skalární součin na reálném vektorovém prostoru, se pojmy shodují s již zavedenými. Na hledání ortogonální báze v takovém případě můžeme použít například Gram-Schmidtův ortogonalizační proces. Pro obecnou symetrickou bilineární formu lze zavést období dalších pojmů z kapitoly o skalárním součinu (jako například ortogonální doplněk), teorie je ale o něco složitější a nebudeme se jí věnovat.

Má-li f vzhledem k B diagonální matici $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, pak pro příslušnou kvadratickou formu platí

$$f_2(\mathbf{x}) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2, \quad [\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)$$

Z takového vyjádření lépe vidíme, jak daná kvadratická forma vypadá. Na obrázku jsou znázorněny grafy několika kvadratických forem na \mathbb{R}^2 .

OBRÁZEK

10.3.1. Hodnost. Je-li f bilineární forma na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} a B, C jsou báze prostoru \mathbf{V} , pak podle tvrzení 10.12 platí $[f]_C = X^T[f]_B X$, kde X je matice přechodu od C k B . Protože X je regulární, podle důsledku 5.83 o hodnosti součinu s regulární maticí platí $r([f]_C) = r([f]_B)$. To nám umožňuje zavést hodnost bilineární formy.

Definice 10.20. *Hodností* bilineární formy f na konečně generovaném prostoru \mathbf{V} rozumíme hodnost její matice vzhledem k libovolné bázi, značíme $r(f)$.

Je-li matice symetrické bilineární formy f vzhledem k B diagonální matice $D = [f]_B$, pak hodnost $r(D)$ je rovná počtu nenulových prvků na diagonále. Počet nul tedy nezávisí na volbě *f-ortogonální* báze.

10.3.2. *Metoda symetrických úprav.* Předpokládejme, že f je bilineární forma na vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n nad tělesem \mathbf{T} , C je báze \mathbf{V} a $A = [f]_C$. Vytvoříme matici typu $n \times 2n$ tak, že vedle A napíšeme jednotkovou matici, tj. $(A|I_n)$. S touto maticí provádíme tzv. *symetrické úpravy*. Jedna symetrická úprava sestává z elementární řádkové úpravy a následné „stejně“ úpravy na sloupci. Máme tedy tři typy symetrických úprav:

- prohození i -tého a j -tého řádku, následné prohození i -tého a j -tého sloupce,
- vynásobení i -tého řádku nenulovým prvkem $t \in T$, následné vynásobení i -tého sloupce prvkem t ,
- přičtení t -násobku i -tého řádku k j -tému, kde $t \in T$ a $i \neq j$, následné přičtení t -násobku i -tého sloupce k j -tému.

Řádkové úpravy provádíme s celými řádky (vektory z \mathbf{T}^{2n}), sloupcové úpravy se vždy týkají jen levého bloku matice.

Odvodíme maticový popis symetrické úpravy matice $(X|Y)$ typu $n \times 2n$. Označíme E matici příslušné řádkové úpravy. Po provedení řádkové úpravy vznikne matice $E(X|Y) = (EX|EY)$. Příslušná sloupcová úprava odpovídá násobení maticí E^T zprava, takže po provedení obou úprav máme matici $(EXE^T|EY)$. Začneme-li tedy s maticí $(A|I_n)$ a provedeme několik symetrických úprav, dostaneme posloupnost matic

$$(A|I_n), (E_1 A E_1^T | E_1), (E_2 E_1 A E_1^T E_2^T | E_2 E_1), \dots, (E_k \dots E_1 A E_1^T \dots E_k^T | E_k \dots E_1) .$$

Z maticového popisu je vidět, že sloupcové úpravy příslušné řádkovým úpravám není nutné provádět okamžitě. Můžeme je provést kdykoliv, musíme ale zachovat pořadí. Rovněž si všimněte, že po každém kroku je levý blok symetrická matice.

Označme $F = (E_k \dots E_1)^T$, tj. poslední matice je $(F^T A F | F^T)$. Matice F je regulární, protože je transponovaným součinem elementárních matic. Označme B bázi \mathbf{V} takovou, že $[\text{id}]_C^B = F$, tj. vyjádření vektorů báze B vzhledem k bázi C je ve sloupcích matice F , neboli v řádcích pravého bloku výsledné matice $(F^T A F | F^T)$. Podle tvrzení 10.12 o změně matice bilineární formy při změně báze je matice $F^T A F$ v levé bloku matice $(F^T A F | F^T)$ rovná matici f vzhledem k B .

Tyto úvahy vedou na metodu diagonalizace bilneární formy f . Symetrickými úpravami převedeme matici $(A|I_n)$ do tvaru $(D|G)$, kde D je diagonální. V řádcích matice G pak máme vyjádření vektorů jisté báze B v původní bázi C a platí $[f]_B = D$, tj. speciálně B je f -ortogonální. Jak převod do diagálního tvaru provádět ukážeme na příkladě.

Příklad 10.21. Najdeme f -ortogonální bázi pro bilineární formu f na \mathbb{Z}_5^3 .

$$[f]_{K_3} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Upravujeme matici $(A|I_n)$ symetrickými úpravami do tvaru $(D|G)$, kde D je diagonální.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Komentář k úpravám: V prvním kroku potřebujeme na pivotní pozici $(1, 1)$ nenulový prvek, docílíme toho přičtením druhého řádku k prvnímu (a následnou symetrickou úpravou – přičtení druhého sloupce k prvnímu). Všimněte si, že prohozením řádků v tomto případě ničeho nedocílíme. Kdybychom například prohodili první a druhý řádek, a následně symetricky první a druhý sloupec, na pozici $(1, 1)$ by byla stále nula. Po této úpravě jsme přičetli 2-násobek prvního řádku ke druhému a první řádek ke třetímu, a symetricky se sloupci (tím se pouze vynulují pozice $(1, 2)$ a $(1, 3)$). Nakonec jsme přičetli 4-násobek druhého řádku ke třetímu, a symetricky se sloupci.

Z diskuze nad příkladem vyplývá, že $B = ((1, 1, 0)^T, (2, 3, 0)^T, (4, 3, 1)^T)$ je f -ortogonální báze a $[f]_B = \text{diag}(2, 2, 1)$.

Věta 10.22. *Každá symetrická bilineární forma f na konečně generovaném vektorovém prostoru nad tělesem charakteristiky různé od 2 má f -ortogonální bázi.*

Důkaz. Podle diskuze nad příkladem se zbývá přesvědčit, že každou čtvercovou matici A řádu n nad tělesem T lze symetrickými úpravami převést na diagonální tvar. Budeme postupně eliminovat řádky a sloupce – po provedení i kroků bude mít matice blokově diagonální tvar

$$A' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix},$$

kde D je diagonální matice řádu i . Předpokládejme, že jsme již provedli $i - 1$ kroků a provedeme i -tý.

Jsou-li všechny prvky v i -tém sloupci nulové (a tím i prvky v i -tém řádku), nemusíme nic dělat.

Je-li pivot, tj. prvek na místě (i, i) v matici A' nulový a nějaký prvek na místě (j, i) nenulový, řekněme $b \in T$, přičteme j -tý řádek k i -tému a následně j -tý sloupec k i -tému. Tím převedeme matici do tvaru, kdy prvek na místě (i, i) je roven $2b$. Tento prvek není nulový díky tomu, že charakteristika tělesa není 2.

Konečně, je-li prvek na místě (i, i) nenulový, přičteme vhodné násobky i -tého řádku k ostatním řádkům, aby prvky na místech (j, i) , $j \neq i$, byly nulové. Příslušné sloupcové úpravy pak pouze vynulují prvky na místech (i, j) , $j \neq i$. \square

10.3.3. Bez nulových pivotů. Jak je vidět z důkazu předchozí věty, při převodu symetrické matice A symetrickými úpravami na diagonální tvar si v řadě případů vystačíme jen s jedním typem symetrických úprav, a to

(*) přičtení t -násobku i -tého řádku k j -tému, kde $t \in T$ a $j > i$ (!) (a následná symetrická sloupcová úprava).

Nastane to v případě, že v každém kroku máme nenulový pivot nebo je celý sloupec (a řádek) nulový. V takovém případě vlastně provádíme Gaussovu eliminaci bez prohazování řádků s tím, že po vyeliminování sloupce vynulujeme také nedиагонаální hodnoty v příslušném řádku.

Po provedení úprav dostaneme diagonální matici

$$D = E_k \dots E_1 A E_1^T \dots E_k^T$$

složenou z pivotů. Matice E_i řádkové úpravy typu (*) je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále, součinem takových matic je opět dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a rovněž invertování tuto vlastnost zachovává. To nám dává následující rozklad.

Tvrzení 10.23. *Je-li A symetrická matice taková, že při Gaussově eliminaci nemusíme prohazovat řádky. Pak existuje dolní trojúhelníková matice L s jedničkami na diagonále a diagonální matice D (složená z pivotů) tak, že*

$$A = LDL^T .$$

Důkaz. Stačí položit $L = (E_k \dots E_1)^{-1}$. Podle diskuze výše je L dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále a platí $D = L^{-1}A(L^{-1})^T$, neboli $LDL^T = A$. \square

Příklad 10.24. Najdeme rozklad $A = LDL^T$ pro reálnou symetrickou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Symetrickými úpravami typu (*) převedeme matici $(A|I_3)$ na tvar $(D|G)$.

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Nyní platí $D = GAG^T$. Položíme-li

$$L = G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

platí $A = LDL^T$.

Kvadratickou formu lze také diagonalizovat tzv. Langrangovou metodou doplňování na čtverce. Tato metoda úzce souvisí s metodou symetrických úprav. Ukážeme si princip na příkladu kvadratické formy na \mathbb{R}^3 , jejíž příslušná symetrická bilineární forma má matici $A = (a_{ij})$, tj.

$$f_2(\mathbf{x}) = f_2(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 .$$

Pokud $a_{11} \neq 0$, smíšených členů x_{12} , x_{13} se můžeme zbavit doplněním na čtverec

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}) &= a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 \right)^2 \\ &+ \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) x_2^2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} \right) x_3^2 + \left(2a_{23} - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} \right) x_2x_3 . \end{aligned}$$

Zvolíme-li novou bázi B tak, aby $[\mathbf{x}]_B = (x'_1, x'_2, x'_3)$, kde

$$x'_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3 ,$$

pak analytické vyjádření f_2 vzhledem k B je

$$f_2(\mathbf{x}) = a_{11}(x'_1)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)(x'_2)^2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}\right)(x'_3)^2 + \left(2a_{23} - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}\right)(x'_2)(x'_3)$$

a matice příslušné symetrické bilineární formy vzhledem k B je

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} \end{pmatrix}.$$

To je tatáž matice jako po provedení jednoho kroku metodou důkazu věty 10.22. Vylimování sloupce (a řádku) metodou symetrických úprav můžeme tedy chápat jako maticový zápis doplnění na čtverce. Symetrické úpravy jsou flexibilnější v tom, že máme více možností úprav a snadnou kontrolu změn bází.

10.4. Ortogonální báze nad \mathbb{R} .

10.4.1. *Setrvačnost, signatura.* Ortogonální báze ani matice vzhledem k této bázi není určena jednoznačně. Uvažme bilineární formu f na prostoru \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} a f -ortogonální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru \mathbf{V} . Matice $[f]_B$ je diagonální, řekněme $[f]_B = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Vynásobíme i -tý vektor báze B prvkem $t_i \in \mathbf{T}$. Vzniklá báze $C = (t_1\mathbf{v}_1, \dots, t_n\mathbf{v}_n)$ je stále f -ortogonální (protože $f(t_i\mathbf{v}_i, t_j\mathbf{v}_j) = t_it_j f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ pro $i \neq j$) a na diagonále matice $[f]_C$ jsou prvky $f(t_i\mathbf{v}_i, t_i\mathbf{v}_i) = t_i^2 f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = t_i^2 a_i$, tj. $[f]_C = \text{diag}(a_1 t_1^2, \dots, a_n t_n^2)$.

V případě, že $\mathbf{T} = \mathbb{C}$ z provedené úvahy vyplývá, že pro každou bilineární formu na \mathbf{V} můžeme najít bázi takovou, že $[f]_C = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$, protože zřejmě pro každé $a_i \in \mathbb{C}$ můžeme najít $t_i \in \mathbb{C}$ tak, že $a_i t_i^2 = 1$.

Pro $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ můžeme volbou $t_i = \sqrt{|a_i|}$ docílit toho, že $[f]_C$ má na diagonále pouze čísla $1, -1, 0$, tj. při vhodném uspořádání báze je $[f]_C = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1, -1, \dots, -1, 0, 0, \dots, 0)$. Počet jedniček je roven počtu kladných prvků na diagonále $[f]_B$, apod.

Víme, že počet nul nezávisí na volbě báze, je roven hodnotě bilineární formy f . Na první pohled ale není jasné, že počet jedniček a minus jedniček také na volbě báze nezávisí. Věta 10.25, tzv. *zákon setrvačnosti kvadratických forem* říká, že tomu tak skutečně je.

Věta 10.25 (Zákon setrvačnosti kvadratických forem). *Nechť f je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n a C, C' báze \mathbf{V} takové, že*

$$[f]_C = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k \times}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{l \times}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \times})$$

$$[f]_{C'} = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k' \times}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{l' \times}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m' \times})$$

Pak $k = k', l = l', m = m'$.

Důkaz. Již víme, že $m = m' = r(f)$.

Předpokládejme pro spor, že $k > k'$. Označme $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$, $U = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$, $C' = (\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_{k'}, \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_{l'}, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{m'})$ a $W = \langle \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_{l'}, \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{m'} \rangle$.

Platí $\dim U = k$, $\dim W = l' + m' = n - k'$ a $\dim(U + W) \leq n$. Podle věty o dimenzi součtu a průniku je

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq k + n - k' - n > 0,$$

takže průnik $U \cap W$ obsahuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in U \cap W$. Protože $\mathbf{x} \in U$, ve vyjádření $[\mathbf{x}]_C = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m)$ máme $b_1 = \dots = b_k = c_1 = \dots = c_m = 0$. Platí tedy

$$\begin{aligned} f_2(x) &= [\mathbf{x}]_C^T [f]_C [\mathbf{x}]_C = 1a_1^2 + \dots + 1a_k^2 + (-1)b_1^2 + \dots + (-1)b_l^2 + 0c_1^2 + \dots + 0c_m^2 \\ &= a_1^2 + \dots + a_k^2 > 0. \end{aligned}$$

(Nerovnost je ostrá, protože $\mathbf{x} \neq 0$, takže alespoň jedno a_i je nenulové.)

Podobně, z $\mathbf{x} \in W$ plyne, že ve vyjádření $[\mathbf{x}]'_C = (a'_1, \dots, a'_{k'}, b'_1, \dots, b'_{l'}, c'_1, \dots, c'_{m'})$ je $a'_1 = \dots = a'_{k'} = 0$ a proto

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1(a'_1)^2 + \dots + 1(a'_{k'})^2 + (-1)(b'_1)^2 + \dots + (-1)(b'_{l'})^2 + (c'_1)^2 + \dots + 0(c'_{m'})^2 \\ &= -(b'_1)^2 + \dots - (b'_{l'})^2 \leq 0, \end{aligned}$$

spor.

Obdobně se ukáže, že nemůže platit $k < k'$. Dokázali jsme, že $m = m'$ a $k = k'$, tedy také $l = l'$. \square

Definice 10.26. Nechť f je symetrická bilineární forma na reálném konečně generovaném vektorovém prostoru \mathbf{V} . Číslo k (resp. l) z předchozí věty nazýváme *pozitivní* (resp. *negativní*) *index setrvačnosti formy* f , značíme $n_+(f)$ (resp. $n_-(f)$). *Signaturou formy* f rozumíme trojici $(n_0(f), n_+(f), n_-(f))$.

Příklad 10.27. Určíme signaturu bilineární formy f na \mathbb{R}^3 , jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = [f]_K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Symetrickými úpravami převedeme matici do diagonálního tvaru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vzniklá matice je maticí stejné bilineární formy f vzhledem k nějaké bázi (která nás teď nezajímala). Signatura f je proto $(1, 1, 1)$.

Příklad 10.28. Určíme signaturu kvadratické formy

$$f_2(x_1, x_2) = 4x_1x_2 + x_2^2$$

na prostoru \mathbb{R}^2 .

Příslušná symetrická bilineární forma má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Symetrickými úpravami získáme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(V úpravách jsme tentokrát nepostupovali podle důkazu věty 10.22 – v první úpravě jsme pro pohodlí prohodili první a druhý řádek a následně první a druhý sloupec.) Signatura kvadratické formy f_2 je $(0, 1, 1)$.

10.4.2. Pozitivní definitnost. Má-li bilineární forma nenulový pouze index $n_+(f) = n$, mluvíme o pozitivně definitní formě. Obdobně se zavádí *pozitivně semidefinitní* a *negativně (semi)definitní* bilineární formy, o těch však mluvit nebudeme.

Definice 10.29. Symetrická bilineární forma f na reálném vektorovém prostoru \mathbf{V} je *pozitivně definitní*, pokud $f_2(\mathbf{x}) > 0$ pro libovolný vektor $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in V$.

Tvrzení 10.30. Symetrická bilineární forma f na reálném vektorovém prostoru \mathbf{V} dimenze n je *pozitivně definitní právě tehdy, když* $n_+(f) = n$.

Důkaz. Je-li B ortogonální báze a $[f]_B = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, pak pro libovolný vektor je $f_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ rovno

$$f_2(\mathbf{x}) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2, \text{ kde } [\mathbf{x}]_B = (x_1, \dots, x_n) .$$

Z toho se snadno vidí obě implikace. Je-li $f_2(\mathbf{x}) > 0$ pro libovolné $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in V$, pak volbou $[\mathbf{x}]_B = \mathbf{e}_i$ získáme $a_i > 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, čili $n_+(f) = n$. Naopak, pokud $n_+(f) = n$, neboli $a_1, \dots, a_n > 0$, pak je zřejmé $f_2(\mathbf{x}) > 0$ pro libovolný nenulový vektor \mathbf{x} . \square

Pro reálný vektorový prostor \mathbf{V} je pozitivně definitní symetrická bilineární forma totéž jako skalární součin. Vlastnosti (SL1), (SL2) a (SL3) z definice 7.3 skalárního součinu říkají, že skalární součin je symetrická bilineární forma, a vlastnost (SP) je pozitivní definitnost. Názvy se používají podle toho, jak se na bilineární formu díváme.

Pozitivní definitnost je definovaná v souladu se stejným pojmem pro operátory ve smyslu, že operátor g na prostoru \mathbf{V} se skalárním součinem je pozitivně definitní právě tehdy, když je pozitivně definitní bilineární forma $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | g(\mathbf{y}) \rangle$. Podobně, matice A řádu n je pozitivně definitní ve smyslu definice 9.122* právě tehdy, když je pozitivně definitní bilineární forma $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ na aritmetickém prostoru \mathbb{R}^n . Navíc platí:

Pozorování 10.31. Symetrická bilineární forma f na reálném konečně generovaném prostoru \mathbf{V} je *pozitivně definitní právě tehdy, když je pozitivně definitní její matice vzhledem k libovolné bázi* B .

Důkaz. Vztah $f_2(\mathbf{x}) > 0$ platí právě tehdy, když $[\mathbf{x}]_B^T [f]_B [\mathbf{x}]_B > 0$. Z toho vyplývá, že $f_2(\mathbf{x}) > 0$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in V$ platí právě tehdy, když $\mathbf{y}^T [f]_B \mathbf{y} > 0$ platí pro každý nenulový vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\dim V}$. \square

Z části o unitární diagonalizovatelnosti víme, že pozitivně definitní matice jsou právě ty symetrické matice, jejichž vlastní čísla jsou kladná. Charakterizaci nyní můžeme doplnit o další kriteria. *Hlavním minorem* matice A řádu n rozumíme matici tvořenou prvými i řádky a i sloupci matice A pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$.

Věta 10.32. *Nechť* A *je reálná symetrická matice řádu* n . *Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) A je pozitivně definitní.
- (2) (Sylvestrovo kritérium) Všechny hlavní minory matice A mají kladný determinant.

- (3) *Gaussova eliminace použitá na matici A může proběhnout bez prohazování řádků a všechny pivoty vyjdou kladné.*
 (4) *$A = LDL^T$ pro nějakou dolní trojúhelníkovou matici L s jedničkami na diagonále a nějakou diagonální matici D s kladnými čísly na diagonále.*
 (5) *(Choleského rozklad) $A = RR^T$ pro nějakou regulární dolní trojúhelníkovou matici R .*

Důkaz. (1) \Rightarrow (2). Nejprve dokážeme, že každý minor A_i matice A tvořený prvními i řádky a i sloupci je pozitivně definitní. Vezmeme libovolný nenulový vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^i$ a doplníme jej nulami na vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Protože A je pozitivně definitní, platí $\mathbf{x}A\mathbf{x} > 0$. Pak ale

$$\mathbf{y}^T A_i \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 .$$

Matice A_i je podle důsledku 9.120 ortogonálně diagonalizovatelná, má proto i vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ včetně násobností a podle tvrzení 9.123 jsou všechna vlastní čísla kladná. Charakteristický polynom $p_A(t) = (\lambda_1 - t) \dots (\lambda_i - t)$ má podle tvrzení 9.25 absolutní člen rovný $\det(A)$. Roznásobením výrazu pro $p_A(t)$ ale také vidíme, že absolutní člen je rovný $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_i > 0$, takže $\det(A) > 0$.

(2) \Rightarrow (3). Indukcí podle i dokážeme, že před eliminací i -tého sloupce jsou všechny pivoty (prvky na místech $(1,1), \dots, (i,i)$) kladné (speciálně, Gaussova eliminace bude používat pouze úpravy typu přičtení násobku řádku k jinému řádku). Pro $i = 1$ není co dokazovat, předpokládejme, že tvrzení platí pro $i - 1$. Před eliminací i -tého sloupce má matice tvar

$$B = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} ,$$

kde X je horní trojúhelníková matice řádu $i - 1$ s kladnými prvky na diagonále. Všechny dosud použité úpravy byly typu přičtení násobku řádku k jinému. Takové úpravy nemění determinant žádného minoru, pro i -tý minor B_i matice B tedy platí

$$\det(B_i) = x_{11} \dots x_{i-1,i-1} y_{11} = \det(A_i) > 0 .$$

Z toho vyplývá, že $y_{11} > 0$, takže pivot před eliminací i -tého sloupce bude skutečně kladný.

Implikace (3) \Rightarrow (4) je důsledkem v tvrzení 10.23.

(4) \Rightarrow (5). Je-li $A = LDL^T$, kde $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_1, \dots, d_n > 0$, pak položíme $R = L\sqrt{D}$, kde $\sqrt{D} = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$. Matice R je regulární a dolní trojúhelníková, protože je součinem dvou regulárních dolních trojúhelníkových matic, a platí

$$RR^T = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T = L\sqrt{D}\sqrt{D}^T L^T = L(\sqrt{D}\sqrt{D})L^T = LDL^T = A .$$

(5) \Rightarrow (1). Pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $R^T \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, protože R^T je regulární. Potom

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T R R^T \mathbf{x} = (R^T \mathbf{x})^T R^T \mathbf{x} = \|R^T \mathbf{x}\|^2 > 0 .$$

□

10.4.3. *Ortonormální diagonalizace.* Pro geometrické aplikace se hodí najít f -ortonormální bázi symetrické bilineární formy, která je navíc ortonormální vzhledem k nějakému skalárnímu součinu. Takovou bázi můžeme vždy najít (ale nemůžeme vyžadovat, aby koeficienty u kvadratických členů byly z množiny $\{-1, 0, 1\}$).

Tvrzení 10.33. *Nechť \mathbf{V} je reálný vektorový prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle | \rangle$ a f je symetrická bilineární forma na \mathbf{V} . Pak existuje báze B prostoru \mathbf{V} , která je f -ortonormální a zároveň ortonormální vzhledem k $\langle | \rangle$.*

Důkaz. Pro skalární součin $\langle | \rangle$ existuje podle věty 7.43 ortonormální báze C prostoru \mathbf{V} . Označme $A = [f]_C$. V kapitole o unitární diagonalizaci jsme se dozvěděli, že existuje ortonormální báze $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ prostoru \mathbb{R}^n (ortonormalita je zde vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu!) složená z vlastních vektorů matice A . Maticově napsáno, označíme-li $U = (\mathbf{u}_1 | \dots | \mathbf{u}_n)$, je U ortogonální matice a $U^{-1}AU = U^T AU = D$ je diagonální. Vezmeme $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, aby $[\mathbf{v}_i]_C = \mathbf{u}_i$, tj. báze B je zvolená tak, že U je matice přechodu od B k C . Podle tvrzení 10.12 o změně báze je matice f vzhledem k B rovná $U^T AU = D$, takže B je f -ortonormální báze. Protože vyjádření vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ v bázi C tvoří ortonormální bázi vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu a C je ortonormální báze vzhledem k $\langle | \rangle$, dostáváme, že $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tvoří ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle | \rangle$ (viz tvrzení 7.21). \square

Z tvrzení vyplývá, že jsou-li f, g dvě symetrické bilineární formy na reálném konečně generovaném prostoru \mathbf{V} , z nichž alespoň jedna je pozitivně definitní, pak existuje báze B , která je zároveň f -ortonormální a g -ortonormální. To obecně neplatí, vynecháme-li zvýrazněný požadavek, že alespoň jedna z forem je pozitivně definitní, viz cvičení.

10.5. Příklady. Podíváme se na aplikace nabytých poznatků na určení tvaru „kvadratického útvaru“.

Příklad 10.34. Podíváme se na množinu bodů $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ splňujících $x_3 = -x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2$. Je to graf kvadratické formy $f_2((x_1, x_2)^T) = -x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2$. Příslušná symetrická bilineární forma f na \mathbb{R}^2 je

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = -x_1y_1 + 1/2x_1y_2 + 1/2x_2y_1 - 3x_2^2$$

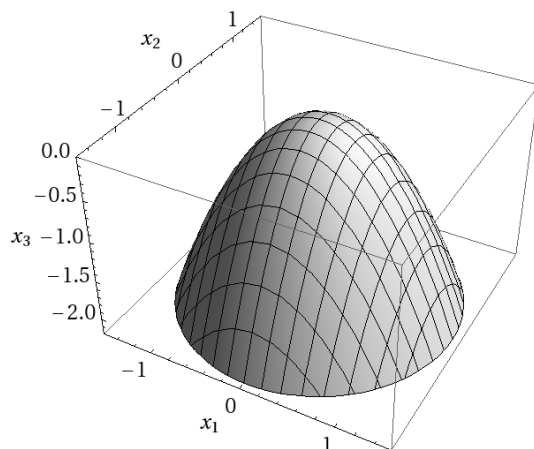
a její matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$[f]_{K_2} = A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Máme $|A^{(1)}| = -1 < 0$, $|A^{(2)}| = 3 - 1/4 > 0$, takže signatura je $(0, 0, 2)$. Analytické vyjádření f_2 vzhledem k jisté bázi B je proto

$$f_2((x_1, x_2)^T) = -(x'_1)^2 - (x'_2)^2, \text{ kde } [(x_1, x_2)^T]_B = (x'_1, x'_2)^T.$$

Grafem $x_3 = -x_1^2 - x_2^2$ je rotační paraboloid otevřený směrem dolů (viz obrázek). Tak vypadá graf vzhledem k bázi B . To nám dává představu, jak vypadá původní útvar – jde o „lineárně zdeformovaný“ rotační paraboloid. Ve skutečnosti je to eliptický paraboloid (ale není to zřejmé).



Abychom přesněji určili tvar útvaru, museli bychom najít B -ortogonální bázi, která je zároveň ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

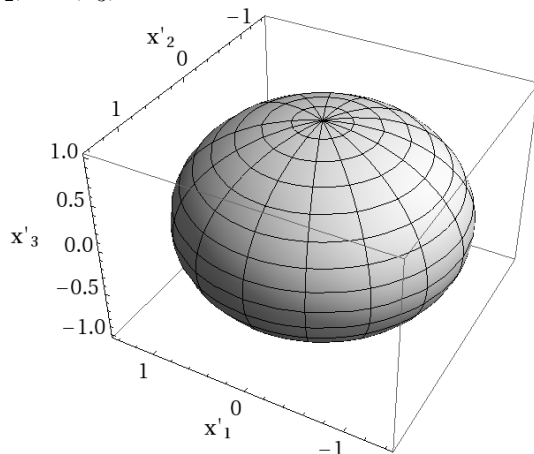
Příklad 10.35. Uvažujme množinu bodů $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ splňujících

$$10x_1^2 + 13x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 = 9 .$$

Levá strana je kvadratická forma f_2 na \mathbb{R}^3 . Příslušná symetrická bilineární forma f má matici

$$[f]_{K_3} = A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Signatura f je $(0, 3, 0)$. Vzhledem k jisté bázi B má tedy útvar rovnici $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 = 9$, takže jde o „lineárně zdeformovanou“ sféru.



Ve skutečnosti jde o elipsoid, ale opět to není zřejmé. Abychom určili útvar přesněji, najdeme ortonormální bázi (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu), která je zároveň f -ortogonální. Jako ortonormální bázi C v tvrzení 10.33 zvolíme kanonickou, tj.

$$[f]_{K_3} = A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Najdeme ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů. Vlastní čísla vyjdou $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ (dvojnásobné) a $\lambda_3 = 18$. V příslušných podprostorech vybereme ortonormální bázi, v M_9 je to např. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ a v M_{18} (\mathbf{v}_3) .

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Matice f vzhledem k (ortonormální) bázi $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je $[f]_B = \text{diag}(9, 9, 18)$, takže vzhledem k B je rovnice našeho útvaru

$$9(x'_1)^2 + 9(x'_2)^2 + 18(x'_3)^2 = 18$$

a po drobné úpravě

$$\left(\frac{x'_1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{x'_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + (x'_3)^2 = 1 .$$

Vidíme, že jde o elipsoid s poloosami $\sqrt{2}\mathbf{v}_1, \sqrt{2}\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, viz obrázek.

OBRÁZEK

Příklad 10.36. Budeme analyzovat následující útvar v \mathbb{R}^2 :

$$U = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 7 = 0\}$$

Výraz z definice je součtem kvadratické formy $f_2((x_1, x_2)^T) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$, lineární formy $h((x_1, x_2)^T) = -10x_1 - 14x_2$ a konstanty 7.

Najdeme nejprve ortonormální f -ortogonální bázi \mathbb{R}^2 , kde f je symetrická bilineární příslušná f_2 :

$$[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice $[f]_{K_2}$ jsou 2 a 4 a příslušné znormované vlastní vektory jsou $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)$ a $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$. Hledaná báze B a je tedy

$$B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) .$$

Vyjádříme útvar U v bázi B . Matice f vzhledem k bázi B je $\text{diag}(2, 4)$, matice lineární formy h vzhledem k B je

$$[h]_{K_1}^B = [h]_{K_1}^{K_2} [\text{id}]_{K_2}^B = (-10, -14) \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}(2, -12) ,$$

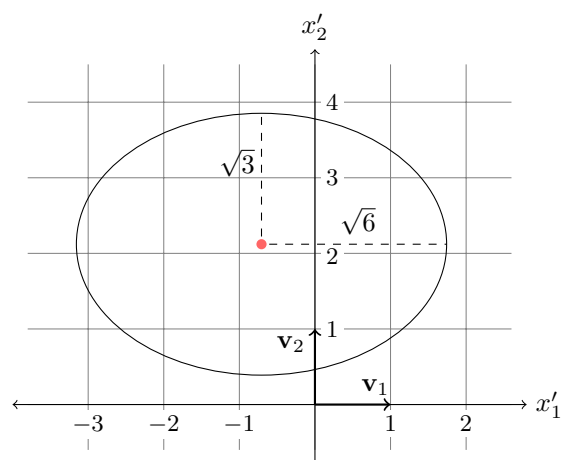
takže U má vzhledem k B vyjádření

$$[U]_B = \{(x'_1, x'_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 2(x'_1)^2 + 4(x'_2)^2 + 2\sqrt{2}x'_1 - 12\sqrt{2}x'_2 + 7 = 0\} .$$

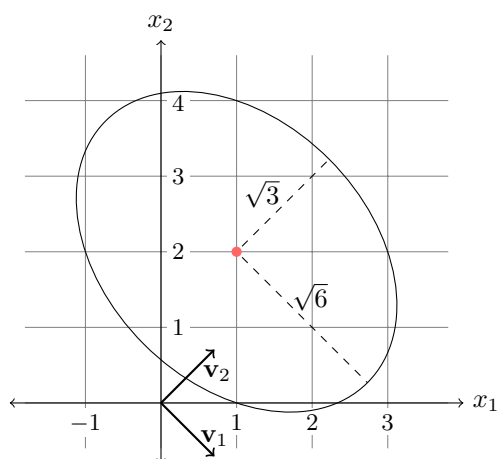
Doplněním na čtverce a drobnými úpravami získáme

$$\begin{aligned} [U]_B &= \left\{ (x'_1, x'_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 2 \left(x'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 4 \left(x'_2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 12 \right\} \\ &= \left\{ (x'_1, x'_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{x'_2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

Z toho vidíme, že vzhledem k B je útvar elipsa se středem $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})^T$ a velikostmi poloos $\sqrt{6}$ a $\sqrt{3}$.



Přepočteme střed do původních souřadnic: $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_2 = (1, 2)^T$. Vidíme, že U je elipsa se středem v bodě $(1, 2)^T$, hlavní poloosou ve směru $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$ a velikostí $\sqrt{6}$ a vedlejší poloosou ve směru $\langle \mathbf{v}_2 \rangle$ a velikostí $\sqrt{3}$.



Jednodušším způsobem lze tento útvar a podobné útvary analyzovat užitím projektivních prostorů, to se naučíme v kapitole ??.

11. AFINNÍ PROSTORY

Cíl.

V této kapitole se začneme blíže zabírat geometrií. Zkoumanými objekty jsou množiny *bodů*, například množina bodů v prostoru, a množiny *vektorů*. Vektory si představujeme jako „šipky“ určené dvěma body, přičemž dva vektory považujeme za stejné, pokud se liší jenom umístěním. S vektory můžeme provádět známé operace sčítání a násobení skalárem. Další přirozenou geometrickou operací je přičtení bodu a vektoru. To provedeme umístěním počátku vektoru do daného bodu, výsledkem je koncový bod.

OBRAZEK (přičtení bodu a vektoru)

Tento pohled je přirozenější lidskému vnímání. Prostor se skládá z bodů a bod je tedy základním objektem, vektor je pojem odvozený. Doposud jsme tento nedostatek řešili tak, že jsme si v prostoru zvolili počátek a vektory umísťovali do počátku. Bod jsme pak ztotožňovali s jeho polohovým vektorem. Tento pohled má několik nedostatků. Jedním z nich je, že prostor nemá apriori žádný význačný bod, takže volba nějakého počátku je nepřirozená. Podstatnější nevýhoda vynikne, když si připomeneme, že lineární algebru lze chápat jako studium „rovných“ útvarů (přímky, roviny, atd.) a „rovných“ zobrazení mezi nimi. Odpovídající objekty ve vektorových prostorech jsou podprostory a lineární zobrazení. Podprostory ale nepopisují všechny rovné útvary, pouze rovné útvary *procházející počátkem*, i když jiné rovné útvary se přirozeně objevily, například jako množiny řešení nehomogenní soustavy rovnic. Podobně, lineární zobrazení popisují jen rovná zobrazení *zachovávající počátek*, tedy například žádné posunutí o nenulový vektor nebylo objektem studia.

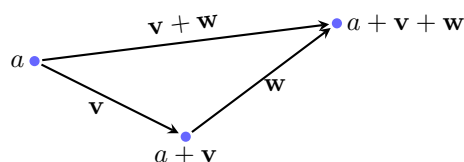
Nyní tedy začneme rozlišovat body a vektory. V další kapitole pak nahlédneme, že body a vektory lze vlastně chápat jako různé instance stejného geometrického objektu, a tím se poněkud paradoxně vrátíme ke studiu rovných útvarů pouze pomocí vektorů. Tento pohled nám přinese řadu výhod.

V celé kapitole budeme pracovat výhradně s prostory konečné dimenze, které jsou bližší geometrickému náhledu. Řada pojmů a tvrzení se přirozeně přenáší na prostory, které nejsou konečně generované.

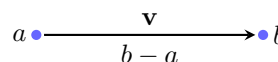
11.1. Definice afinního prostoru. Jak jsme předeslali v úvodu, afinní prostor je tvořen množinou bodů a množinou vektorů. Na množině vektorů máme operace sčítání a násobení skalárem, které mají všechny doposud používané vlastnosti, tedy množina vektorů tvoří spolu s těmito operacemi vektorový prostor. Přibude operace sčítání bodu a vektoru. Požadované axiomy jsou opět ve shodě s geometrickou představou.

Definice 11.1. Necht \mathbf{T} je těleso. Afinním prostorem \mathbf{A} nad \mathbf{T} rozumíme množinu A , jejíž prvky nazýváme *body*, spolu s vektorovým prostorem \mathbf{V} nad \mathbf{T} a operací $+: A \times V \rightarrow A$, která bodu $a \in A$ a vektoru $\mathbf{v} \in V$ přiřadí bod $a + \mathbf{v} \in A$, splňující axiomy:

- (aS2) Pro libovolný bod $a \in A$ a libovolné vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí $a + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (a + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.
- (aS1) Pro libovolný bod $a \in A$ platí $a + \mathbf{o} = a$.
- (aM) Ke každé dvojici bodů $a, b \in A$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{v} \in V$, pro který $a + \mathbf{v} = b$. Tento vektor značíme $b - a$.



Axiom (aS2)



Axiom (aM)

Sčítat můžeme dva vektory a bod s vektorem. Sčítání dvou bodů nedává (zatím) žádný geometrický smysl. Pro body budeme používat stejně jako v definici malá písmena abecedy. Z axiomu (aS2) vidíme, že ve výrazech tvaru $a + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$ nemusíme psát závorky. Při popisu afinního prostoru \mathbf{A} budeme většinou zdůrazňovat jen množinu bodů A s tím, že vektorový prostor a sčítání je zřejmé z kontextu. Vektorový prostor \mathbf{V} budeme někdy nazývat *prostor vektorů* afinního prostoru \mathbf{A} .

Pokud v afinním prostoru zvolíme nějaký bod $a \in A$, pak každému bodu $b \in A$ můžeme podle (aM) přiřadit vektor $b - a$ a naopak, každému vektoru \mathbf{v} můžeme přiřadit bod $a + \mathbf{v}$. Jak se snadno ověří (cvičení), tato zobrazení jsou navzájem inverzní bijekce bodů a vektorů (bijekce nejsou přirozené, závisí na volbě bodu a). V tomto smyslu si body a vektory vzájemně jednoznačně odpovídají, proto například dává smysl mluvit o dimenzi afinního prostoru.

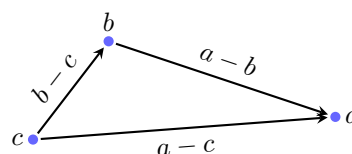
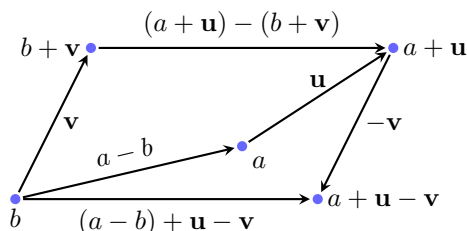
Definice 11.2. *Dimenzí* afinního prostoru \mathbf{A} rozumíme dimenzi jeho prostoru vektorů.

Afinní prostor dimenze 0 tvoří jediný bod $A = \{a\}$. Afinní prostor dimenze 1 nazýváme *afinní přímkou*, nebo jen *přímka*, afinní prostor dimenze 2 nazýváme *afinní rovinou*, nebo jen *rovina*.

Mechanickým cvičením jsou následující vlastnosti operací, které platí pro libovolné body $a, b, c, d \in A$ a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Geometrický význam je jasný z obrázku.

- $a - b = -(b - a)$
- $(a + \mathbf{u}) - (b + \mathbf{v}) = (a - b) + \mathbf{u} - \mathbf{v}$
- $(a - b) + (c - d) = (a - d) + (c - b)$
- $(a - b) + (b - c) = a - c$

Tyto a podobné vlastnosti budou podrobněji diskutovány v části o lineárních kombinacích bodů.



Příklady. Pro libovolný vektorový prostor \mathbf{V} tvoří $A = V$ spolu se sčítáním ve \mathbf{V} afinní prostor. Množiny bodů a vektorů jsou tedy stejné, rozdíl je jen v pohledu – na prvky A se díváme jako na body, na prvky V jako na vektory. Rozdílný bude také například pojem podprostoru, jak jsme diskutovali v úvodu. Speciálně pro $\mathbf{V} = \mathbf{T}^n$

dostáváme *aritmický afinní prostor*. Budeme jej značit stejně jako aritmetický vektorový prostor, tj. \mathbf{T}^n , jeho dimenze je n .

Trochu jiným příkladem je

$$A = (1, 2, 3)^T + \langle (2, 3, 4)^T, (6, 7, 8)^T \rangle, \quad V = \langle (2, 3, 4)^T, (6, 7, 8)^T \rangle.$$

Vektorový prostor \mathbf{V} je podprostor \mathbb{R}^3 generovaný vektory $(2, 3, 4)^T$ a $(6, 7, 8)^T$ a A je rovina v \mathbb{R}^3 se „směrem“ \mathbf{V} procházející bodem $(1, 2, 3)^T$. (Sčítání bodu a vektoru probíhá po složkách.) V tomto případě A není vektorovým podprostorem \mathbb{R}^3 . Bod v v A můžeme sečíst s vektorem ve V , ale součet dvou bodů, pokud bychom ho počítali jako v \mathbb{R}^3 , v A obecně neleží. Toto je příklad podprostoru afinního prostoru \mathbb{R}^3 . Jeho dimenze je 2, je to afinní rovina.

Obecněji, pro libovolný afinní prostor \mathbf{A} s prostorem směrů \mathbf{V} je každá množina bodů tvaru $a+W$, kde $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ se zděděnými operacemi afinní prostor, jehož prostor směrů je \mathbf{W} . Tento prostor je podprostorem \mathbf{A} . Takové podprostory aritmetických prostorů vznikají například při řešení soustavy lineárních rovnic. Podrobněji se podprostory budeme zabývat zanedlouho, zatím jsme ani přesně nepopsali, co je podprostor. Vystačíme s intuitivní představou.

Chceme-li ještě pracovat s metrickými vlastnostmi, jako velikostí vektorů, vzdáleností bodů, atd., potřebujeme na \mathbf{V} mít ještě dán skalární součin. V tomto případě musí být $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbf{T} = \mathbb{C}$.

Definice 11.3. *Afinním eukleidovským prostorem* (resp. *afinním unitárním prostorem*) rozumíme afinní prostor \mathbf{A} nad tělesem \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) spolu se skalárním součinem $\langle | \rangle$ na jeho prostoru vektorů.

Nejjednodušším příkladem afinního eukleidovského prostoru je \mathbb{R}^n se standardním skalárním součinem. Nejjednodušším příkladem afinního unitárního prostoru je \mathbb{C}^n se standardním skalárním součinem. V této kapitole budeme uvažovat pouze afinní prostory a afinní eukleidovské prostory. Přímocharé rozšíření na komplexní případ si čtenář může rozmyslet sám.

Již víme, co pro afinním eukleidovský prostor znamená velikost vektoru, úhel dvou vektorů, kolmost, apod. Vzdálenost bodů definujeme opět ve shodě s intuicí.

Definice 11.4. Vzdáleností dvou bodů $a, b \in A$ v afinním eukleidovském prostoru \mathbf{A} rozumíme číslo $\|a - b\|$.

11.1.1. *Soustava souřadnic.* Na bázi vektorového prostoru lze nazírat jako na jeho soustavu souřadnic – zvolíme-li bázi, můžeme vektory vyjadřovat jako n -tice skalárů (prvky \mathbf{T}^n) a počítat s nimi jako v \mathbf{T}^n (viz odstavec 5.4.3). Soustava souřadnic v afinním prostoru má podobnou roli. Sestává z bodu, tzv. počátku soustavy souřadnic, a n -tice vektorů, které si představujeme umístěné do počátku. Máme-li zadanou soustavu, můžeme přirozeným způsobem vyjadřovat body i vektory jako n -tice prvků tělesa a počítání pak probíhá jako v aritmetickém afinním prostoru \mathbf{T}^n .

Definice 11.5. *Soustavou souřadnic* v afinním prostoru \mathbf{A} dimenze n s prostorem vektorů \mathbf{V} rozumíme $(n+1)$ -tici $S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, kde $a \in A$ je bod nazývaný *počátek soustavy souřadnic* a $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze \mathbf{V} .

Je-li S soustava souřadnic jako výše, $b \in A$ je bod a $\mathbf{w} \in V$ je vektor, pak *souřadnice vektoru \mathbf{w} v soustavě souřadnic S* definujeme jako souřadnice \mathbf{w} vzhledem k bázi B a značíme $[\mathbf{w}]_S$, tj.

$$[\mathbf{w}]_S = [\mathbf{w}]_B$$

a souřadnice bodu b v soustavě souřadnic S definujeme jako souřadnice vektoru $b - a$ v bázi B , tj.

$$[b]_S = [b - a]_S = [b - a]_B .$$

Souřadnice bodu jsou definovány ve shodě s geometrickou intuicí. To je možná ještě lépe vidět s následujícího přeformulování definice: Souřadnice bodu b v soustavě S je rovno té jednoznačně určené n -tici prvků $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$, pro kterou platí

$$b = a + t_1 \mathbf{u}_1 + \dots + t_n \mathbf{u}_n .$$

OBRAZEK

Souřadnice počátku a vzhledem k S jsou $[a]_S = (0, 0, \dots, 0)^T$ a $[a + \mathbf{u}_i]_S = \mathbf{e}_i$.

Příklad 11.6. V aritmetickém afinním prostoru \mathbb{R}^3 je

$$S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

soustava souřadnic, protože $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ je bázi aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^2 . Určíme souřadnice vektoru $\mathbf{w} = (-1, 3)^T$ a bodu $b = (-1, 3)^T$ v S . K tomu potřebujeme nalézt vyjádření vektoru $(-1, 3)^T$ a vektoru $(-1, 3)^T - (3, 2)^T = (-4, 1)^T$ v bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. To vede na řešení dvou soustav rovnic se stejnou maticí. Vyřešíme je současně.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

Z toho dopočteme řešení

$$[\mathbf{w}]_S = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad [b]_S = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Pro kontrolu můžeme ověřit, že skutečně $\mathbf{w} = 7\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2$ a $b = a + 6\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2$.

Příklad 11.7. V aritmetických afinních prostorech máme význačnou soustavu souřadnic, budeme jí nazývat *kanonická*:

$$S = ((0, 0, \dots, 0)^T, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) .$$

Je charakterizovaná tím, že $[a]_S = a$ a $[\mathbf{w}]_S = \mathbf{w}$ pro libovolné bod a a libovolný vektor \mathbf{w} .

V afinním eukleidovském prostoru jsou „nejlepší“ soustavy souřadnic kartézské.

Definice 11.8. Soustava souřadnic $S = (a, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ v afinním eukleidovském prostoru se nazývá *kartézská*, pokud $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze.

V kartézské soustavě souřadnic jsou tedy vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jednotkové a navzájem kolmé. V aritmetickém afinním prostoru se standardním skalárním součinem (budeme mu říkat aritmetický afinní eukleidovský prostor) je kanonická soustava souřadnic kartézská.

Volba soustavy souřadnic převádí počítání v afinním prostoru na počítání v aritmetickém vektorovém prostoru, podobně jako báze pro vektorové prostory (viz tvrzení 5.65). Je-li prostor afinní eukleidovský, tak v kartézské soustavě souřadnic se skalární součin převádí na standardní (viz TODO).

Tvrzení 11.9. *Je-li S soustava souřadnic afinního prostoru \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} , pak pro libovolné $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $b, c \in A$, $t \in T$ platí*

$$[\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]_S = [\mathbf{v}_1]_S + [\mathbf{v}_2]_S, \quad [t\mathbf{v}_1]_S = t[\mathbf{v}_1]_S, \quad [b + \mathbf{v}_1]_S = [b]_S + [\mathbf{v}_1]_S, \quad [b - c]_S = [b]_S - [c]_S .$$

Je-li navíc \mathbf{A} afinní eukleidovský prostor a soustava S je kartézská, pak

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = [\mathbf{v}_1]_S \cdot [\mathbf{v}_2]_S .$$

Důkaz. cviceni □

Nyní spočítáme, jak se změní souřadnice bodů a vektorů při změně soustavy souřadnic. Uvažujme dvě soustavy $S = (a, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a $S' = (a', \mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n)$. Označme X matici přechodu od báze $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ k bázi $B' = (\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n)$. Přepočítávat souřadnice vektorů už umíme: pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in V$ máme

$$[\mathbf{v}]_{S'} = X[\mathbf{v}]_S .$$

Pro bod $b \in A$ využijeme vztahu $b - a' = (b - a) + (a - a')$ a dostaneme

$$[b]_{S'} = [b - a']_{S'} = [b - a]_{S'} + [a - a']_{S'} = X[b - a]_S + [a - a']_{S'} = X[b]_S + [a]_{S'} .$$

Shrneme výsledek do tvrzení.

Tvrzení 11.10. *Nechť $S = (a, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a $S' = (a', \mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n)$ jsou soustavy souřadnic v afinním prostoru \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} a X je matice přechodu od $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ k $(\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n)$. Pak pro každé $b \in A$, $\mathbf{v} \in V$ platí*

$$[\mathbf{v}]_{S'} = X[\mathbf{v}]_S, \quad [b]_{S'} = X[b]_S + [a]_{S'} .$$

Příklad 11.11. Ilustrujeme přechodové vztahy na soustavách souřadnic S, S' aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^2 .

$$S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left(\left(\begin{array}{c} -4 \\ 5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -7 \\ 14 \end{array} \right) \right) \quad S' = (a', \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2) = \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -2 \\ 3 \end{array} \right) \right),$$

Najdeme matici přechodu X od báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ k bázi $B' = (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2)$.

$$[\text{id}]_{B'}^B = [\text{id}]_{B'}^{K_2} [\text{id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Najdeme ještě $[a]_{S'} = [a - a']_{S'}$.

$$[a - a']_{S'} = \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{S'} = [\text{id}]_{S'}^{K_2} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pro libovolný bod $b \in A$ nyní máme

$$[b]_{S'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} [b]_S + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Abychom ještě lépe viděli tvar přechodových vztahů, označíme $[b]_S = (x, y)^T$ a $[b]_{S'} = (x', y')^T$ a vztahy přepíšeme.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y - 1 \\ -x + 4y + 2 \end{pmatrix}$$

Nové souřadnice jsou tedy lineární výrazy ve starých souřadnicích (tj. výrazy tvaru lineární forma + konstanta). Pro vektory dostaneme stejné výrazy bez konstantních členů.

11.2. Lineární kombinace bodů. Tvořit „lineární kombinace“ bodů nedává obecně žádný geometrický smysl, i když na některé smysluplné výrazy (např. vektor $b - a$ a bod $a + (b - a) = b$) lze nazírat jako na lineární kombinace.

Abychom nahlédli, že všem výrazům skutečně nelze dát v afinním prostoru geometrický smysl, podívejme se na výraz $a + b$, kde a, b jsou body nějakého afinního prostoru \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} . Přirozenou myšlenkou je zvolit v \mathbf{A} soustavu souřadnic S a definovat $a + b$ jako ten bod, jehož souřadnice vzhledem k S jsou $[a]_S + [b]_S$. Problém je, že výsledný bod závisí na volbě soustavy souřadnic. Například pro $\mathbf{A} = \mathbb{R}^2$, $a = (0, 0)^T$, $b = (1, 0)^T$ by vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic vyšlo $a + b = (1, 0)^T$, ale vzhledem k soustavě souřadnic $S = ((2, 3)^T, (1, 0)^T, (0, -1)^T)$ bychom měli

$$[a]_S = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [b]_S = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [a + b]_S = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

takže $a + b = (2, 3)^T + -3(1, 0)^T + 6(0, -1)^T = (-1, -3)^T$. Ještě by nás mohlo napadnout, že $a + b$ je nějaký vektor, ale ani v tom případě bychom neuspěli – našli bychom dvě soustavy souřadnic, ve které se výsledky liší.

11.2.1. Afinní kombinace. Některým lineárním kombinacím ale smysl lze dát. Pokud bychom například počítali $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ stejným postupem vyšel by nám v obou případech stejný bod $(\frac{1}{2}, 0)^T$. Je to proto, že tento bod lze vyjádřit jako $a + \frac{1}{2}(b - a)$ ($= b + \frac{1}{2}(a - b)$) a tento výraz je definován – je to součet bodu a a $\frac{1}{2}$ -násobku vektoru $b - a$. Geometricky, je to střed úsečky a, b . Následující tvrzení zodpovídá přesně na otázku, kdy lze definovat bod jako lineární kombinace bodů.

Tvrzení 11.12. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor nad \mathbf{T} dimenze alespoň 1, $a_1, \dots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ skaláry. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Bod b o souřadnicích $[b]_S = \lambda_1[a_1]_S + \dots + \lambda_k[a_k]_S$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic S .*
- (2) $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$.

Důkaz. Snazší je dokázat implikaci (2) \Rightarrow (1). Je-li $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, stačí si uvědomit, že v libovolné soustavě souřadnic S díky podmínce této podmínce a tvrzení 11.9 o souřadnicích a operacích máme

$$\begin{aligned} \lambda_1[a_1]_S + \dots + \lambda_k[a_k]_S &= [a_1]_S + \lambda_2([a_2]_S - [a_1]_S) + \dots + \lambda_k([a_k]_S - [a_1]_S) \\ &= [a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \dots + \lambda_k(a_k - a_1)]_S \end{aligned}$$

Protože body jsou jednoznačně určeny svými souřadnicemi, bod b v (1) je nutně roven (korektně definovanému) bodu $a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \dots + \lambda_k(a_k - a_1)$, který samozřejmě na S nezávisí.

(1) \Rightarrow (2). □

To nám umožňuje zavést afinní kombinaci bodů.

Definice 11.13. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor nad \mathbf{T} , $a_1, \dots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Afinní kombinací bodů a_1, \dots, a_k s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ rozumíme bod $b \in A$ takový, že*

$$[b]_S = \lambda_1[a_1]_S + \dots + \lambda_k[a_k]_S$$

kde S je libovolná soustava souřadnic prostoru \mathbf{A} . Značíme $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$.

Afinní kombinaci jsme zavedli pomocí (libovolně zvolené) soustavy souřadnic, přičemž definice dává smysl díky předchozímu tvrzení. Z důkazu tohoto tvrzení také plyne, že afinní kombinaci lze zavést bez volby soustavy, například vztahem

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1) .$$

Tento výraz je ale poněkud nesymetrický.

Alternativní, symetrická definice a geometrický význam asi nejlépe vynikne z fyzikálního pohledu (i když ten můžeme uplatnit pouze pro reálné afinní prostory malých dimenzí a pouze pro afinní kombinace s nezápornými koeficienty). Afinní kombinaci $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ totiž můžeme chápat jako těžiště soustavy hmotných bodů a_1, \dots, a_k s hmotnostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. To je lépe vidět z následující charakterizace.

Tvrzení 11.14. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor nad \mathbf{T} , $a_1, \dots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Pak bod $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ je roven tomu jednoznačně určenému bodu b , pro který*

$$\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b) = \mathbf{o} .$$

Důkaz. V \mathbf{A} zvolíme libovolnou soustavu souřadnic S s počátkem $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$. Pak pro libovolný bod b jsou souřadnice vektoru na levé straně vzhledem k S rovny

$$\begin{aligned} [\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b)]_S &= [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k]_S \\ &\quad - [\lambda_1 b + \cdots + \lambda_k b]_S = -[b]_S \end{aligned}$$

(Používáme definici afinní kombinace a tvrzení 11.9 o počítání v souřadnicích.)

Vidíme, že vektor na levé straně je nulový právě tehdy, když $b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$, což jsme měli dokázat. \square

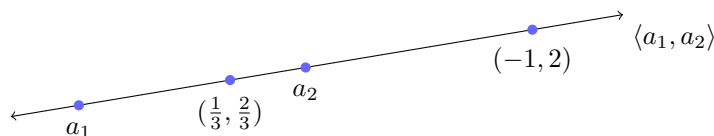
OBRAZEK (různé afin. kombinace dvou bodu, trojúhelník, 4.bod v rovnoběžníku)

11.2.2. *Barycentrické souřadnice.* Podíváme se blíže na afinní kombinace dvou bodů na afinní přímce. Mějme tedy afinní prostor \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} nad tělesem \mathbf{T} , kde $\dim \mathbf{A} (= \dim \mathbf{V}) = 1$. Konkrétně například \mathbb{R} nebo podprostor \mathbb{R}^2 nebo \mathbb{R}^3 tvaru $A = c + \langle \mathbf{v} \rangle$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$.

Jsou-li $a, b \in A$ dva různé body, pak každý bod $c \in A$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako jejich afinní kombinace. Existenci takového vyjádření můžeme zdůvodnit například následujícím způsobem. Protože $b - a$ je nenulový vektor a $\dim \mathbf{V} = 1$, je každý vektor ve \mathbf{V} jeho násobkem. Existuje proto $\lambda \in \mathbf{T}$ takové, že $c - a = \lambda(b - a)$. Nyní můžeme psát $c = a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda)a + \lambda b$ (rovnost dokážeme například pomocí souřadnic a tvrzení 11.9). Jednoznačnost se nahlédne například z jednoznačnosti λ ve vyjádření $c - a = \lambda(b - a)$. Důkaz obecnějšího tvrzení provedeme za okamžik.

Bod $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ „dělí“ body a, b v poměru $\lambda_2 : \lambda_1$. Přesněji, $\lambda_1(c - a) = \lambda_2(b - c)$. Pokud \mathbf{A} je eukleidovský tak tento vztah znamená, že poměr „orientovaných vzdáleností“ c od a a c od b je $\lambda_2 : \lambda_1$, tj. v případě, že c leží na úsečce ab (ekvivalentně $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$) je poměr vzdáleností $\lambda_2 : \lambda_1$, v opačném případě je poměr vzdáleností $|\lambda_1| : |\lambda_2|$.

Příklad 11.15. Vyjádříme bod $c = (2, 3)^T \in \mathbb{R}^2$ jako afinní kombinaci bodů $a = (1, 2)^T$ a $b = (5, 6)^T$. Úloha dává smysl, protože všechny tři body leží na afinní přímce $(0, 1)^T + \langle (1, 1)^T \rangle$.



OBRÁZEK 26. Souřadnice dvou bodů vzhledem k barycentrické soustavě souřadnic (a_1, a_2) . Afinní obal $\langle a_1, a_2 \rangle$.

Srovnáním prvních složek ve vztahu $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ získáme $\lambda_1 + 5\lambda_2 = 2$, což spolu s $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ dává $\lambda_1 = \frac{3}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{4}$. Tedy $c = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$. Skutečně, bod c dělí body a, b v poměru $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 1 : 3$. Fyzikální interpretace je taková, že má-li bod a hmotnost $\frac{3}{4}$ a bod b hmotnost $\frac{1}{4}$, pak je jejich těžištěm bod c .

Dvojice (λ_1, λ_2) tvoří tzv. *barycentrické souřadnice* bodu c vzhledem k (a, b) . Vyjadřují, jakým způsobem musíme body a, b zatížit, aby jejich těžištěm byl bod c . Podobným způsobem lze definovat barycentrické souřadnice bodu v rovině vzhledem ke třem bodům neležících na jedné přímce, apod.

Tvrzení 11.16. *Nechť A je afinní prostor dimenze n s prostorem vektorů \mathbf{V} a $a_1, \dots, a_k \in A$ jsou body. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) Každý bod $b \in A$ lze jednoznačným způsobem zapsat jako afinní kombinaci bodů a_1, \dots, a_k .
- (2) Posloupnost vektorů $(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1)$ tvoří bázi prostoru \mathbf{V} (speciálně $k = n + 1$).

Důkaz. K důkazu obou implikací si všimneme, že pro libovolný bod $b \in A$ a skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ vztah

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k,$$

platí právě tehdy, když platí vztah

$$b - a_1 = \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_1) + \dots + \lambda_k(a_k - a_1).$$

(1) \Rightarrow (2). Pro libovolný vektor \mathbf{v} najdeme vyjádření bodu $b = a_1 + \mathbf{v}$ jako afinní kombinaci bodů a_1, \dots, a_k a druhá ekvivalentní rovnost nám dává vyjádření vektoru $b - a_1 = \mathbf{v}$ jako lineární kombinaci vektorů $a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1$. To dokazuje, že posloupnost generuje \mathbf{V} . Je-li $\mathbf{o} = \lambda_2(a_2 - a_1) + \dots + \lambda_k(a_k - a_1)$ netriviální lineární kombinace a položíme-li $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_k$, $b = a_1$ dostáváme z první rovnosti vyjádření bodu $b = a_1$ jako afinní kombinaci bodů a_1, \dots, a_k rozdílnou od $a_1 = 1a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_k$. Tento spor dokazuje, že posloupnost $(a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1)$ je lineárně nezávislá, takže je to báze.

(2) \Rightarrow (1). Důkaz je rovněž přímočarý užitím výše uvedené ekvivalence. \square

První podmínka nezávisí na pořadí bodů a_1, \dots, a_k , tedy lineární nezávislost posloupnosti v druhé části rovněž nezávisí na pořadí těchto bodů. Jako cvičení dokažte toto pozorování přímo.

Jsou-li splněny ekvivalentní podmínky v tvrzení, říkáme, že $Z = (a_1, \dots, a_{n+1})$ je barycentrická soustava souřadnic a $(n + 1)$ -tici koeficientů $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})^T$ ve vyjádření bodu $b \in A$ nazýváme barycentrické souřadnice bodu b vzhledem Z .

Definice 11.17. Nechť \mathbf{A} je afinní prostor dimenze n s prostorem vektorů \mathbf{V} . *Barycentrická soustava souřadnic* je $(n+1)$ -tice bodů (a_1, \dots, a_{n+1}) , které splňují ekvivalentní podmínky v tvrzení 11.16.

Je-li $Z = (a_1, \dots, a_{n+1})$ barycentrická soustava souřadnic afinního prostoru \mathbf{A} a $b \in A$, pak $(n+1)$ -tici skalárů $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})^T$ nazýváme *barycentrické souřadnice bodu b vzhledem k Z* , pokud $b = \lambda a_1 + \dots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$.

Podle tvrzení je $Z = (a_1, \dots, a_{n+1})$ barycentrická soustava souřadnic právě tehdy, když je $S = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1)$ soustava souřadnic prostoru \mathbf{A} . V důkazu jsme si všimli, že pokud známe souřadnice bodu b vzhledem k S , řekněme $[b]_S = (\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})^T$, pak snadno spočítáme barycentrické souřadnice bodu b : $(1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_k, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$.

Příklad 11.18. V afinním prostoru \mathbb{R}^2 vyjádříme b v barycentrické soustavě souřadnic (a_1, a_2, a_3) .

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Protože vektory $a_2 - a_1 = (6, -6)^T$ a $a_3 - a_1 = (-8, -12)^T$ jsou lineárně nezávislé, posloupnost (a_1, a_2, a_3) je skutečně barycentrickou soustavou souřadnic. Hledáme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ takové, že $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Přepsáním do složek dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Druhou možností je vypočítat $[b]_S = (\lambda_2, \lambda_3)^T$, kde $S = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_1)$, a dopočítat λ_1 . Zvolíme druhou alternativu. Dostáváme soustavu

$$(a_2 - a_1 | a_3 - a_1 | b - a_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -8 & -2 \\ -6 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -8 & -2 \\ 0 & -20 & -10 \end{array} \right)$$

Vychází $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ a $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{1}{6}$. Barycentrické souřadnice bodu b vzhledem k (a_1, a_2, a_3) jsou tedy $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})^T$.

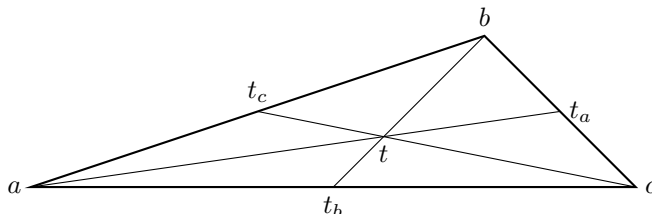
11.2.3. *Afinní kombinace pomocí dvojic.* Afinní kombinaci více bodů v afinním prostoru \mathbf{A} nad \mathbf{T} lze, v případě, že charakteristika \mathbf{T} není 2, získat pomocí afinních kombinací dvojic. Například pro $\mathbf{T} = \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ můžeme psát

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = (\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} b \right) + \lambda_3 c .$$

Výraz v závorce je afinní kombinací bodů a, b a celkově se jedná o afinní kombinaci této kombinace a bodu c , celý výraz tedy dává smysl. Fyzikální interpretace je taková, že těžiště soustavy hmotných bodů a, b, c s hmotnostmi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ můžeme určit tak, že nejprve určíme těžiště hmotných bodů a, b a pak těžiště výsledného bodu (o hmotnosti $\lambda_1 + \lambda_2$) a bodu c .

Uvažujme nyní konkrétní situaci trojice bodů a, b, c v reálné afinní rovině, které neleží na jedné přímce a položme $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$. Bod $t = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$ je těžištěm trojúhelníka s vrcholy a, b, c . Označíme-li $t_c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, tj. t_c je střed úsečky ab (co je úsečka jde formálně definovat pomocí konvexních kombinací diskutovaných níže). Podle vyjádření v předchozím odstavci máme $t = \frac{2}{3}t_c + \frac{1}{3}c$, tj. t leží na úsečce ct_c (těžnice) a tuto úsečku dělí v poměru 2 : 1. Podobně se ukáže, že t leží na úsečkách at_a a bt_b (kde t_a a t_b jsou středy stran bc a ac) a dělí tyto úsečky ve stejném poměru 2 : 1. Přirozeným způsobem jsme mimochodem nahlédli, že úsečky spojující vrcholy a středy protilehlých stran se protínají v jednom bodě a tento bod je dělí v poměru

2 : 1! Podobným způsobem lze dokázat řadu podobných geometrických poznatků (viz cvičení).



11.2.4. *Konvexní kombinace.* Krátkou neformální poznámku věnujeme tzv. konvexním kombinacím v reálných afinních prostorech. Afinní kombinace $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ se nazývá *konvexní*, pokud jsou všechny koeficienty nezáporné (a tím pádem také menší než 1). Konvexní kombinace souvisí s konvexními útvary. Množinu bodů nazveme *konvexní*, pokud s každými dvěma body obsahuje celou úsečku, která je spojuje. Není těžké ukázat, že každá konvexní množina je uzavřená na konvexní kombinace (cvičení).

Množina všech konvexních kombinací daných bodů a_1, \dots, a_k je proto nejmenším konvexním množinou obsahující tyto body. Této množině říkáme *konvexní obal*. Rozmyslete si, že konvexním obalem dvojice bodů a, b jsou právě body ležící na úsečce ab a že konvexním obalem trojice bodů a, b, c je trojúhelník (i se svým vnitřkem) s vrcholy a, b, c . Naopak, tento geometrický názor můžeme využít k formální definici úsečky ab jako konvexního obalu bodů a, b .

Příklad 11.19. Ukážeme, jak lze barycentrické souřadnice použít při zjišťování zda daný bod leží uvnitř daného trojúhelníka.

V příkladu 11.18 jsme zjistili, že barycentrické souřadnice bodu $b = (0, -1)^T$ vzhledem k $(a_1, a_2, a_3) = ((2, 7)^T, (8, 1)^T, (-6, -5)^T)$ jsou $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Bod b je tedy afinní kombinací bodů (a_1, a_2, a_3) s kladnými koeficienty, proto leží uvnitř trojúhelníka s vrcholy a_1, a_2, a_3 .

Konvexní množiny vznikají například při řešení soustavy lineárních nerovnic. Řešení takových soustav se týká řada důležitých teoretických i praktických problémů.

11.2.5. *Lineární kombinace odpovídající vektorům.* V tvrzení 11.12 jsme ukázali, kdy lineární kombinace bodů určuje **bod** nezávisle na volbě soustavy souřadnic, a to nám umožnilo definovat afinní kombinaci bodů. Výraz $b - a$ napovídá, kdy lze lineární kombinaci bodů smysluplně interpretovat jako **vektor**.

Tvrzení 11.20. *Nechť A je afinní prostor nad \mathbf{T} , $a_1, \dots, a_k \in A$ body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ skaláry. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (1) *Vektor \mathbf{v} o souřadnicích $[\mathbf{v}]_S = \lambda_1 [a_1]_S + \dots + \lambda_k [a_k]_S$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic S .*
- (2) $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$.

Důkaz. Důkaz je obdobný jako u tvrzení 11.12 a přenecháme jej do cvičení. \square

Podobně jako u afinním kombinací nyní můžeme v případě, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$, definovat vektor $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ předpisem

$$[\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k]_S = \lambda_1 [a_1]_S + \dots + \lambda_k [a_k]_S$$

kde S je libovolná soustava souřadnic prostoru \mathbf{A} , nebo například vztahem

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = \lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1) .$$

Obecněji, pro libovolný bod $b \in A$ platí

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = \lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b) .$$

11.3. Podprostory. Podprostory afinních prostorů definujeme analogicky jako podprostory vektorových prostorů.

Definice 11.21. Nechť \mathbf{A} je afinní prostor nad tělesem \mathbf{T} s prostorem vektorů \mathbf{V} . Afinní prostor \mathbf{B} nad tělesem \mathbf{T} s prostorem vektorů \mathbf{W} se nazývá (*afinní*) *podprostor prostoru \mathbf{A}* , pokud $B \subseteq A$, $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ a sčítání bodu a vektoru v \mathbf{B} je zúžením sčítání bodu a vektoru v \mathbf{A} .

Je-li \mathbf{A} afinní eukleidovský prostor pak \mathbf{B} nazýváme (*afinním eukleidovským*) *podprostorem \mathbf{A}* , pokud je \mathbf{B} afinním podprostorem \mathbf{A} a navíc je skalární součin v \mathbf{B} zúžením skalárního součinu v \mathbf{A} .

Již jsme se setkali s jedním typem podprostorů: Pro libovolný bod $a \in A$ a (vektorový) podprostor $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ tvoří množina bodů $a + W$ (spolu se sčítáním zděděným z \mathbf{A}) afinní podprostor prostoru \mathbf{A} , jehož prostor vektorů je \mathbf{W} . Následující tvrzení ukazuje, že takto získáme všechny podprostory.

Tvrzení 11.22. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor nad tělesem \mathbf{T} s prostorem vektorů \mathbf{V} a \mathbf{B} je jeho podprostor s prostorem vektorů \mathbf{W} . Pak pro libovolný bod $b \in B$ platí $B = b + W$. Navíc platí $W = \{c - b : c \in B\} = \{d - c : c, d \in B\}$.*

Poznámka: Sčítání bodu z b a vektoru z W můžeme provádět v libovolném z prostorů \mathbf{A} nebo \mathbf{B} , protože se podle definice shodují. Tím pádem se rovněž shoduje odčítání: Jsou-li $c, d \in B$ dva body v \mathbf{B} , pak vektor $c - d$ ve \mathbf{W} je definován jako ten jednoznačně určený vektor $\mathbf{w} \in W$, pro který platí $d + \mathbf{w} = c$. Protože sčítání v \mathbf{A} a \mathbf{B} se shodují, vztah $d + \mathbf{w} = c$ platí i v \mathbf{A} , takže $d - c = \mathbf{w}$ v \mathbf{A} podle definice odčítání v \mathbf{A} . Shodují se také jakékoliv další operace, které jsou odvozené z operací afinního prostoru, například afinní kombinace.

Důkaz. Pro libovolný vektor $\mathbf{w} \in W$ platí $b + \mathbf{w} \in B$, protože B je uzavřená na sčítání bodu a vektoru. Proto platí $b + W \subseteq B$. Naopak, pro libovolný bod $c \in B$ máme $c - b \in W$, takže $c = b + (c - b) \in b + W$, což dokazuje opačnou inkluzi.

Dodatek je rovněž snadný, plyne například z korespondence bodů a vektorů diskutované za definicí afinního prostoru. \square

Příklad 11.23. Podprostory afinního prostoru \mathbb{R}^3 jsou čtyř typů:

- body, tj. podprostory tvaru $B = b + W$, $\dim(\mathbf{W}) = 0$, čili $W = \{\mathbf{o}\}$ a $B = \{b\}$;
- přímky, tj. podprostory tvaru $B = b + W$, $\dim(\mathbf{W}) = 1$, čili $W = \langle \mathbf{v} \rangle$, kde $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, a $B = b + \langle \mathbf{v} \rangle$
- roviny, tj. podprostory tvaru $B = b + W$, $\dim(\mathbf{W}) = 2$, čili $W = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, kde (\mathbf{v}, \mathbf{w}) je lineárně nezávislá posloupnost, a $B = b + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- celý prostor $B = \mathbb{R}^3$

Zavedli jsme názvy pro prostory dimenze 0 (body), 1 (přímky) a 2 (roviny). Ještě se používá pojem *nadrovina*, to je podprostor dimenze $n - 1$ v prostoru dimenze n . Například nadroviny v \mathbb{R}^1 jsou body, nadroviny v \mathbb{R}^2 jsou přímky a nadroviny v \mathbb{R}^3 jsou roviny.

Podle tvrzení je prostor vektorů \mathbf{W} podprostoru \mathbf{B} prostoru \mathbf{A} jednoznačně určen množinou bodů B , protože W je množina všech rozdílů bodů v B (jeden z bodů můžeme libovolně zafixovat). Proto při zadávání podprostoru často uvádíme jenom množinu bodů B a říkáme, že B je podprostor \mathbf{A} .

K tomu, aby neprázdna množina $B \subseteq A$ byla podprostorem afinního prostoru \mathbf{A} je nutné a stačí, aby množina vektorů $W = \{c - b : c \in B\}$ (kde $b \in B$ je libovolný bod) tvořila podprostor vektorového prostoru \mathbf{V} . Podprostory lze také charakterizovat jako množiny bodů uzavřené na afinní kombinace.

Tvrzení 11.24. *Nechť \mathbf{A} je afinní prostor a $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$. Pak B je podprostorem \mathbf{A} právě tehdy, když každá afinní kombinace bodů z B leží v B .*

Důkaz. Je-li \mathbf{B} podprostorem afinního prostoru \mathbf{A} , pak triviálně každá afinní kombinace bodů z B leží v B .

Předpokládejme naopak, že každá afinní kombinace bodů z B leží v B a zvolme libovolný bod $b \in B$. Je potřeba ukázat, že množina $W = \{c - b : c \in B\}$ je podprostorem prostoru vektorů \mathbf{V} afinního prostoru \mathbf{A} . K tomu je potřeba ověřit, že W je uzavřená na sčítání a násobení skalárem. Jsou-li c, c' dva body z B , pak

$$(c - b) + (c' - b) = (c + c' - b) - b ,$$

kde $c + c' - b$ je afinní kombinací bodů z B , která v B podle předpokladu leží, takže $(c - b) + (c' - b) \in W$ a množina W je proto uzavřená na sčítání. Je-li $c \in B$ a $t \in T$, pak

$$t(c - b) = (tc + (1 - t)b) - b .$$

Závorka na pravé straně je opět afinní kombinace bodů z B a dostáváme uzavřenost W na násobení skalárem. \square

Podprostory vektorových prostorů často zadáváme pomocí množiny generátorů. Podobně, podprostory afinního prostoru \mathbf{A} často zadáváme pomocí „generující“ množiny bodů X , říkáme například přímka určená body a, b nebo rovina určená body a, b, c , atd.

Definice 11.25. *Nechť X je neprázdna podmnožina bodů afinního prostoru \mathbf{A} nad tělesem \mathbf{T} . Afinním obalem množiny X rozumíme množinu $\langle X \rangle$ všech afinních kombinací bodů z X , tj.*

$$\langle X \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k : a_1, \dots, a_k \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in T, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \}$$

Pro afinní obal bodů užíváme stejné značení jako pro lineární obal. Musíme si proto vždy uvědomit, zda prvky X jsou body nebo vektory.

Tvrzení 11.26. *Nechť X je neprázdna podmnožina bodů afinního prostoru \mathbf{A} nad tělesem \mathbf{T} . Pak $\langle X \rangle$ je podprostor afinního prostoru \mathbf{A} a pro jeho prostor vektorů \mathbf{W} platí*

$$\begin{aligned} W &= \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k : a_1, \dots, a_k \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in T, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0 \} \\ &= \langle \{c - b : c \in X\} \rangle , \end{aligned}$$

kde b je libovolný bod v X .

Důkaz. Protože afinní kombinace afinních kombinací je afinní kombinace, je $\langle X \rangle$ je podprostorem \mathbf{A} podle charakterizace podprostorů pomocí afinních kombinací v tvrzení 11.24. Zvolme $b \in X$ libovolně. Prostor vektorů \mathbf{W} podprostoru $\langle X \rangle$ je roven (viz tvrzení 11.22) $W = \{c - b : c \in \langle X \rangle\}$. Každý bod c v $\langle X \rangle$ je tvaru

$c = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$, kde $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, takže každý vektor $c - b$ je tvaru $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + (-1)b$, kde $\lambda_1 + \dots + \lambda_k + (-1) = 0$. To dokazuje inkluzi \subseteq v první rovnosti. Naopak, každý vektor tvaru $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$, kde $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$, lze psát ve tvaru $(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + 1 \cdot b) - b$, kde $\lambda_1 + \dots + \lambda_k + 1 = 1$, což dokazuje druhou inkluzi.

Druhou část přenecháme do cvičení. \square

Každý podprostor je uzavřený na afinní kombinace bodů. Proto každý podprostor afinního prostoru \mathbf{A} obsahující množinu X musí obsahovat také $\langle X \rangle$. V tomto smyslu je $\langle X \rangle$ „nejmenší“ podprostor \mathbf{A} obsahující X .

Příklad 11.27. Afinním obalem dvojice bodů $X = \{a, b\}$, $a \neq b$ je přímka

$$\langle X \rangle = \{\lambda_1 a + \lambda_2 b : \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} = a + W = b + W,$$

kde

$$W = \{\lambda_1 a + \lambda_2 b : \lambda_1 + \lambda_2 = 0\} = \langle b - a \rangle$$

Konkrétně, pro body $a = (1, 2)^T$, $b = (4, 6)^T$ v afinním prostoru \mathbb{R}^2 je

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} : \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} : \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

11.3.1. *Bodový, parametrický a rovnicový popis podprostoru.* Podprostor afinního prostoru \mathbf{A} dimenze n můžeme popsat následujícími způsoby:

- *Bodově*, zadáním množiny bodů $X = \{a_1, \dots, a_l\}$. Množina X určuje podprostor $B = \langle X \rangle$ tvořený všemi afinními kombinacemi bodů z X . Prostor vektorů W je roven lineárnímu obalu $\langle a_2 - a_1, \dots, a_l - a_1 \rangle$, takže na zadání prostoru dimenze k potřebujeme alespoň $k+1$ bodů. Naopak, máme-li prostor \mathbf{B} dimenze k a zvolíme $a_1, \dots, a_{k+1} \in B$ tak, aby $(a_2 - a_1, \dots, a_{k+1} - a_1)$ byla lineárně nezávislá posloupnost, pak je (a_1, \dots, a_{k+1}) barycentrická soustava souřadnic prostoru \mathbf{B} , tj. každý bod lze jednoznačným způsobem zapsat jako afinní kombinaci bodů a_1, \dots, a_{k+1} (viz tvrzení 11.16).
- *Parametricky*, zadáním bodu b a množiny vektorů $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$. Daný bod b a dané vektory určují podprostor $B = b + W = b + \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$. Na zadání prostoru dimenze k potřebujeme bod b a alespoň k vektorů. Naopak, máme-li prostor \mathbf{B} dimenze k s prostorem vektorů \mathbf{W} , zvolíme $b \in B$ libovolně a zvolíme k -tici lineárně nezávislých vektorů z W , pak $B = b + W$ a každý bod lze jednoznačným způsobem vyjádřit ve tvaru $b + t_1 \mathbf{v}_1 + \dots + t_k \mathbf{v}_k$.

Máme-li B zadán parametricky jako $B = b + \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$ a S je soustava souřadnic prostoru \mathbf{A} , pak vyjádření B v soustavě souřadnic S je afinní podprostor $[B]_S = [b]_S + \langle [\mathbf{v}_1]_S, \dots, [\mathbf{v}_l]_S \rangle \leq \mathbf{T}^n$. Takové podprostory aritmetických afinních prostorů vznikají při řešení soustav lineárních rovnic. To nám dává další možný popis podprostorů.

- *Rovnicově*, zadáním soustavy souřadnic S prostoru \mathbf{A} a soustavy lineárních rovnic $Rx = c$ o n neznámých. Řešení soustavy je afinní podprostor $[B]_S = \{x \in \mathbf{T}^n : Rx = c\}$ prostoru \mathbf{T}^n , ten určuje podprostor $B = b + W$. Souřadnice $[b]_S$ bodu b jsou partikulárním řešením soustavy a

$[W]_S = \text{Ker } R$. Máme-li l rovnic, pak jádro matice soustavy má dimenzi alespoň $n-l$, takže $\dim(\mathbf{W}) \geq n-l$. Pokud má matice soustavy plnou hodnotu l , pak $\dim(\mathbf{W}) = n-l$. K zadání prostoru dimenze k proto potřebujeme alespoň $n-k$ rovnic.

Přechod od rovnicového popisu k parametrickému spočívá ve vyřešení soustavy lineárních rovnic. Jak z parametrického popisu vytvořit rovnicový popisuje důkaz následujícího tvrzení.

Tvrzení 11.28. *Nechť $b+W$ je podprostor dimenze k aritmetického afinního prostoru \mathbf{T}^n . Pak existuje matice R typu $(n-k) \times n$ nad \mathbf{T} a bod $c \in \mathbf{T}^k$ takový, že množina řešení soustavy rovnic $Rx = c$ je rovná $b+W$.*

Důkaz. Označme $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ nějakou bázi W , tj. $W = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ a uvažujme matici $C = (\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_k)^T$. Podle věty o dimenzi jádra a obrazu je $\dim \text{Ker } C = n-k$. Označme $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k})$ nějakou bázi $\text{Ker } C$, $R = (\mathbf{w}_1 | \dots | \mathbf{w}_{n-k})^T$ a $c = Rb$.

Jádro matice R má dimenzi $n - (n-k) = k$ a obsahuje každý z vektorů \mathbf{v}_i , protože pro libovolné $j \in \{1, \dots, n-k\}$ platí $\mathbf{w}_j^T \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{w}_j = 0$ z volby vektorů $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k}$. Platí proto $\text{Ker } R = W$.

Protože b je podle volby c partikulárním řešením soustavy $Rx = c$, je množina všech řešení soustavy $Rx = c$ rovna $b + \text{Ker } R = b + W$. \square

V důkazu máme zároveň návod jak hledat rovnicový popis podprostoru zadaného parametricky. Pokud vzhledem k soustavě souřadnic S je $[B]_S = b + W$, napíšeme nějakou bázi W (nebo množinu generátorů W) do řádků matice a vyřešíme homogenní soustavu rovnic s touto maticí. Bázi množiny řešení napíšeme do řádků matice R a určíme pravou stranu $c = Rb$. Tím získáme rovnicový popis $[B]_S = \{x \in T^n : Rx = c\}$.

Navíc, je-li \mathbf{A} afinní eukleidovský prostor a S jeho kartézská soustava, pak řádky matice R generují prostor $([W]_S)^\perp = [W^\perp]_S$, tj. generují vyjádření ortogonálního doplňku prostoru W vzhledem k S . Prvkům ortogonálního doplňku W říkáme *normálové vektory*.

Příklad 11.29. Určíme parametricky podprostor \mathbf{B} prostoru \mathbb{R}^5 daný rovnicovým popisem vzhledem ke kanonické bázi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Na tomto místě si rovněž můžeme uvědomit, že každá netriviální rovnice určuje nadrovinu v \mathbf{A} (v našem případě nadrovinu v \mathbb{R}^5), takže rovnicové vyjádření podprostoru můžeme chápat jako vyjádření pomocí průniku nadrovin.

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right)$$

$$B = b + W = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Vidíme, že \mathbf{B} je podprostor dimenze 3.

Nyní si představme, že B je zadáný parametricky a zapomeňme na původní rovnicové vyjádření. Chceme nalézt soustavu $(R|c)$, aby jejím řešením byl podprostor $B = b + W$. Napíšeme generátory prostoru W do řádků matice a najdeme její jádro.

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Matici R tedy zvolíme takto:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbývá zvolit pravou stranu c tak, aby bod b byl partikulárním řešením. Dosazením získáme $c = Ab = (1, 9)^T$. Rovnicový popis prostoru B je tedy například

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vyšel jiný rovnicový popis než původní. To není překvapivé, podprostor můžeme parametricky i rovnicově zpravidla vyjádřit mnoha způsoby.

Z rovnicového popisu vidíme také normálové vektory – lineární obal řádků matice A tvoří právě vektory kolmé na W vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Shrňme různé způsoby vyjádření přímk a rovin v afinního eukleidovského prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem.

- *Přímku* můžeme popsat jako afinní obal dvojice různých bodů, parametricky ve tvaru $b + \langle \mathbf{v} \rangle$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, nebo dvěma rovnicemi $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$, přičemž normálové vektory této přímky jsou právě vektory v $\langle (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T, (a_{21}, a_{22}, a_{23})^T \rangle$.
- *Rovinu* můžeme popsat jako afinní obal trojice bodů neležících na jedné přímce, parametricky ve tvaru $b + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, kde $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je lineárně nezávislá posloupnost, nebo rovnicí $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$, přičemž normálové vektory této roviny jsou právě vektory v $\langle (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T \rangle$.

OBRAZEK

Stejná diskuze platí pro libovolný afinní eukleidovský prostor dimenze 3, kde rovnicový popis bereme vzhledem k nějaké kartézské soustavě souřadnic. Vynecháme-li poznámky o normálových vektorech, pak diskuze platí v libovolném afinním prostoru dimenze 3, kde rovnicový popis bereme vzhledem k libovolné soustavě souřadnic.

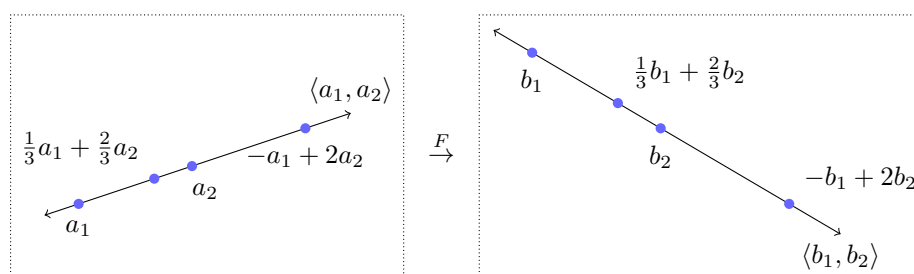
11.4. Afinní zobrazení. Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory je zobrazení zachovávající součet a násobení skalárem, ekvivalentně, zobrazení zachovávající lineární kombinace. Obdobně zavedeme afinní zobrazení mezi afinními prostory jako zobrazení zachovávající afinní kombinace bodů.

Definice 11.30. Necht \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou afinní prostory nad stejným tělesem \mathbf{T} . Zobrazení $F : A \rightarrow B$ nazýváme *afinní zobrazení z \mathbf{A} do \mathbf{B}* , značíme $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, pokud zachovává afinní kombinace, tj. pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_k \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ platí

$$F(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 F(a_1) + \dots + \lambda_k F(a_k) .$$

Slovy, obraz afinní kombinace je afinní kombinace obrazů se stejnými koeficienty. Fyzikální interpretace: těžiště soustavy hmotných bodů se musí zobrazit na těžiště obrazů se stejnými hmotnostmi.

Podíváme se podrobněji na případ $k = 2$ v definici. Zvolíme pevně dva různé body $a_1, a_2 \in A$ a označíme $b_1 = F(a_1)$, $b_2 = F(a_2)$. Každý bod c na přímce $\langle a_1, a_2 \rangle$ lze zapsat jako afinní kombinaci $c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$. Jeho obrazem musí být bod $F(c) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. Obrazem je tedy bod v $\langle b_1, b_2 \rangle$, který má stejné poměry „orientovaných vzdáleností“ od bodů b_1, b_2 jako má bod c od bodů a_1, a_2 . V degenerovaném případě kdy $b_1 = b_2$ se všechny body přímky $\langle a_1, a_2 \rangle$ zobrazí do b_1 . V části 11.2.3 (viz cvičení ??) jsme diskutovali, že v případě, že těleso má charakteristiku různou od dva, lze každou afinní kombinaci napsat pomocí afinní kombinace dvojic. Rozmyslete si (cvičení), že tím pádem by pro taková tělesa stačilo v definici požadovat zachovávání afinních kombinací dvojic. Jinými slovy, afinní zobrazení je takové zobrazení, které zobrazuje přímky na přímky nebo body a zachovává poměry „orientovaných vzdáleností“ bodů na přímce (opět předpokládáme charakteristiku různou od dva).



OBRÁZEK 27. Afinní zobrazení F , kde $b_i = F(a_i)$.

Dobrou představu o afinních zobrazeních z prostoru \mathbf{A} dimenze n do \mathbf{B} (libovolné dimenze) si vytvoříme, uvážíme-li nějakou barycentrickou soustavu souřadnic (a_1, \dots, a_{n+1}) v \mathbf{A} a obrazy $b_i = F(a_i)$. Každý bod $a \in A$ lze zapsat jednoznačně jako afinní kombinaci $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$ a obraz je pak nutně $F(a) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_{n+1}$. Naopak, na barycentrické soustavě souřadnic si můžeme obrazy předepsat libovolně a to jednoznačně určuje afinní zobrazení. Tyto skutečnosti jsou obdobou tvrzení 8.4 o určení lineárního zobrazení na bázi.

OBRÁZEK (v R2)

Tvrzení 11.31. *Nechť \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou vektorové prostory nad tělesem \mathbf{T} , $\dim \mathbf{A} = n$, (a_1, \dots, a_{n+1}) je barycentrická soustava souřadnic prostoru \mathbf{A} a $b_1, \dots, b_{n+1} \in B$. Pak existuje právě jedno afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ splňující $f(a_i) = b_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$.*

Důkaz. Jednoznačnost plyne z definice. Abychom dokázali existenci, definujeme F jak si vynucuje definice, tj. pro bod $a \in A$ položíme $F(a) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n+1} b_{n+1}$, kde $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})^T$ jsou barycentrické souřadnice bodu a vzhledem k dané barycentrické soustavě. Je potřeba ověřit, že vzniklé zobrazení je afinní, tj. podmínka z definice platí pro libovolné k a libovolné body. To přenecháme do cvičení. \square

Konkrétní příklady afinních zobrazení:

- Konstantní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, které každému bodu v \mathbf{A} přiřazuje pevně zvolený bod $b \in B$.
- *Posunutí* o vektor \mathbf{v} (který leží v prostoru směrů prostoru \mathbf{A}) je afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$. Posunutím o vektor \mathbf{v} přirozeně myslíme zobrazení definované $F(c) = c + \mathbf{v}$.
- Rotace o nějaký úhel, zrcadlení podle přímky, zkosení, projekce na přímku v nějakém směru, posunutí a každé složení těchto zobrazení je afinním zobrazením $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- Zobrazení přiřazující bodu \mathbf{A} jeho souřadnice vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic je afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{T}^n$.

11.4.1. *Afinní a lineární zobrazení.* Afinní zobrazení mezi afinními prostory určuje přirozeným způsobem lineární zobrazení mezi prostory vektorů. Naopak, lineární zobrazení mezi jejich prostory vektorů a obraz jednoho bodu určují jednoznačně afinní zobrazení.

Podrobněji. Uvažujme afinní prostor \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} , afinní prostor \mathbf{B} s prostorem vektorů \mathbf{W} (oboje nad tělesem \mathbf{T}) a afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. Zvolíme libovolný bod $a \in A$ a definujeme zobrazení $f : V \rightarrow W$ vztahem

$$f(\mathbf{v}) = F(a + \mathbf{v}) - F(a) \quad \text{pro každý vektor } \mathbf{v} \in V .$$

Alternativně můžeme stejnou definici psát

$$f(c - a) = F(c) - F(a) \quad \text{pro každý bod } c \in A .$$

Ukážeme, že takto definované zobrazení f nezávisí na volbě bodu a . Z definice afinního zobrazení dostaneme, že pro libovolný bod $a' \in A$ a vektor $\mathbf{v} \in V$ platí

$$F(a' + \mathbf{v}) = F((a + \mathbf{v}) - a + a') = F(a + \mathbf{v}) - F(a) + F(a') ,$$

což po úpravě dává

$$F(a' + \mathbf{v}) - F(a') = F(a + \mathbf{v}) - F(a) ,$$

takže f skutečně nezávisí na volbě bodu a . Jednoduchou úpravou definice f zjistíme, že zobrazení F je určeno f a obrazem libovolného bodu $a \in A$ vztahem

$$F(c) = F(a) + f(c - a) \quad \text{pro libovolný bod } c \in A$$

nebo

$$F(a + \mathbf{v}) = F(a) + f(\mathbf{v}) \quad \text{pro libovolný vektor } \mathbf{v} \in V .$$

Jsou-li $a_1, \dots, a_k \in A$ libovolné body a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$, pak „lineární kombinace“ $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ odpovídá nějakému vektoru

ve \mathbf{V} . Podíváme se na jeho obraz při zobrazení f . Podle definice f a definice afinního zobrazení je

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) &= F(a + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) - F(a) \\ &= F(a) + \lambda_1 F(a_1) + \cdots + \lambda_k F(a_k) - F(a) \\ &= \lambda_1 F(a_1) + \cdots + \lambda_k F(a_k) . \end{aligned}$$

Ještě nahlédneme, že f je skutečně lineární zobrazení: Pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a skalár $\lambda \in T$ označíme $b = a + \mathbf{u}$, $c = a + \mathbf{u} + \mathbf{v}$ a spočítáme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= f(c - a) = F(c) - F(a) = (F(c) - F(b)) + (F(b) - F(a)) \\ &= f(c - b) + f(b - a) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \\ f(\lambda \mathbf{u}) &= f(\lambda b - \lambda a) = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) = \lambda f(b - a) = \lambda f(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Naopak, je-li $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ lineární zobrazení a $a \in A$, $b \in B$, pak zobrazení $F : A \rightarrow B$ definované vztahem

$$F(c) = b + f(c - a) \quad \text{pro každé } c \in A$$

ekvivalentně

$$F(a + \mathbf{v}) = b + f(\mathbf{v}) \quad \text{pro každé } \mathbf{v} \in V$$

je afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ (pro které $F(a) = b$), protože pro libovolnou afinní kombinaci $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ ($\sum_1^k \lambda_i = 1$) máme

$$\begin{aligned} F(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) &= b + f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k - a) \\ &= b + f(\lambda_1(a_1 - a) + \cdots + \lambda_k(a_k - a)) \\ &= b + \lambda_1 f(a_1 - a) + \cdots + \lambda_k f(a_k - a) \\ &= \lambda_1(b + f(a_1 - a)) + \cdots + \lambda_k(b + f(a_k - a)) \\ &= \lambda_1 F(a_1) + \cdots + \lambda_k F(a_k) \end{aligned}$$

Shrneme učiněná pozorování.

Tvrzení 11.32. *Nechť \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou afinní prostory nad stejným tělesem \mathbf{T} a \mathbf{V}, \mathbf{W} jsou jejich prostory vektorů. Pak platí:*

- (1) *Pro libovolné afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ zobrazení $f : V \rightarrow W$ definované pro $\mathbf{v} \in V$ vztahem $f(\mathbf{v}) = F(a + \mathbf{v}) - F(a)$ nezávisí na volbě bodu a a je lineárním zobrazením $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$. Pro libovolné $a, c \in A$ platí $F(c) = F(a) + f(c - a)$ a pro libovolnou kombinaci $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ platí*

$$f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 f(a_1) + \cdots + \lambda_k f(a_k) .$$

- (2) *pro libovolné lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ a body $a \in A$, $b \in B$ je zobrazení $F : A \rightarrow B$ definované vztahem $F(c) = b + f(c - a)$ afinní zobrazení $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.*

V situaci předchozího tvrzení říkáme, že afinní zobrazení F vytváří lineární zobrazení f nebo, že f je lineární zobrazení příslušné F , apod. Například afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ vytvořená identitou jsou právě posunutí, zobrazení vytvořená rotací jsou rotace složené s posunutím.

Následující pozorování shrnuje některé jednoduché, ale důležité vlastnosti afinních zobrazení a příslušných lineárních.

Pozorování 11.33. Necht $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ je afinní zobrazení a $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ příslušné lineární zobrazení. Pak platí:

- (1) F je prosté právě tehdy, když f je prosté,
- (2) F je na právě tehdy, když f je na.
- (3) Obrazem podprostoru $B = b + U$ prostoru \mathbf{A} při zobrazení F je podprostor $F(B) = F(b) + f(U)$ prostoru \mathbf{B} .
- (4) Je-li $G : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ afinní zobrazení a g příslušné lineární zobrazení, pak složené zobrazení $G \circ F$ je afinním zobrazením $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ a jemu příslušné lineární zobrazení je $g \circ f$.

Důkaz. Cvičení. □

11.4.2. *Afinní zobrazení v souřadnicích.* Na příkladu ukážeme jak popsat afinní zobrazení mezi konečně dimenzionálními prostory v souřadnicích.

Příklad 11.34. Popíšeme zobrazení, které zobrazuje trojici bodů $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$ na trojici bodů $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$ (v tomto pořadí).

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Protože $D = (a_2 - a_1, a_3 - a_1) = ((-2, 0)^T, (1, -2)^T)$ je báze \mathbb{R}^2 , tvoří trojice (a_1, a_2, a_3) barycentrickou soustavu souřadnic, takže afinní zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je podmínkami jednoznačně určené (viz tvrzení 11.31). Určíme příslušné lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Obrazem vektoru $a_2 - a_1$ je vektor $f(a_2 - a_1) = F(a_2) - F(a_1) = b_2 - b_1 = (-2, -4, 2)^T$ a obrazem $a_3 - a_1$ je $f(a_3 - a_1) = b_3 - b_1 = (-5, 0, -3)^T$. Matice f vzhledem k D a K_3 je proto

$$[f]_{K_3}^D = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

takže vzhledem ke kanonickým bázím je

$$\begin{aligned} [f]_{K_3}^{K_2} &= [f]_{K_3}^D [\text{id}]_D^{K_2} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní pro libovolný bod $c \in \mathbb{R}^2$ a vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ je $F(c + \mathbf{v}) = F(c) + f(\mathbf{v})$. Použijeme tento vztah pro $c = (0, 0)^T$ a $\mathbf{v} = (x_1, x_2)^T$ a dostáváme obraz bodu $(x_1, x_2)^T$:

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Místo určování $F((0,0)^T)$ přímo, můžeme do vztahu dosadit například bod a_1 a dopočítat.

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Celkově dostáváme

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 2 - x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Jako zkoušku ověříme, že skutečně $F(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, 3$.

Obecněji, máme-li afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, soustavu souřadnic $S = (a, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ v prostoru \mathbf{A} a soustavu souřadnic $Q = (b, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ v prostoru \mathbf{B} , pak souřadnice obrazu bodu c , který máme zadaný v soustavě S , vzhledem k Q spočítáme

$$[F(c)]_Q = [F(a)]_Q + [f(c - a)]_Q = [F(a)]_Q + X[c]_S,$$

kde X je matice f vzhledem k bázím $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ a $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$. Heslovitě, obraz je tvaru „bod plus matice krát vzor“. Když na okamžik přestaneme rozlišovat body a vektory (zvolíme počátek a bod ztotožňujeme z jeho polohovým vektorem), pak lineární zobrazení jsou „rovná zobrazení“, která zachovávají počátky, a afinní zobrazení jsou všechna rovná zobrazení. Vzniknou z lineárních složením s posunutím.

11.4.3. *Izometrie.* Izometrie mezi afinními eukleidovskými prostory je zobrazení, které zachovává vzdálenosti. Používá se také název *shodnost*, zejména v případě zobrazení mezi stejnými prostory.

Definice 11.35. Necht \mathbf{A} , \mathbf{B} jsou afinní eukleidovské prostory. Zobrazení $F : A \rightarrow B$ nazýváme *izometrie*, pokud zachovává vzdálenosti, tzn. pro libovolné $a, c \in A$ platí

$$\|a - c\| = \|F(a) - F(c)\|.$$

Intuice napovídá, že izometrie je „rovné“, tj. afinní zobrazení, a příslušné lineární zobrazení mezi prostory vektorů je ortogonální. Intuice se nemýlí, jak ukazuje následující věta.

Věta 11.36. Necht \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou afinní eukleidovské prostory konečné dimenze a $F : A \rightarrow B$ je zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- (1) F je izometrie.
- (2) F je afinní zobrazení $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ a příslušné lineární zobrazení mezi prostory vektorů je ortogonální.

Důkaz. Označíme \mathbf{V}, \mathbf{W} prostory vektorů afinních prostorů \mathbf{A}, \mathbf{B} .

Implikace (2) \Rightarrow (1) je jednoduchá: Jsou-li $a, c \in A$ libovolné body, pak

$$\|F(a) - F(c)\| = \|f(a - c)\| = \|a - c\|.$$

Zajímavá je opačná implikace (1) \Rightarrow (2). Ukážeme myšlenku důkazu a některé technické detaily přenecháme do cvičení.

- Pro libovolné dva body $a_1, a_2 \in A$ a jejich afinní kombinaci $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ platí $F(a) = \lambda_1 F(a_1) + \lambda_2 F(a_2)$. K důkazu si všimneme, že vztah „bod je afinní kombinací dvojice bodů s koeficienty λ_1, λ_2 “ můžeme charakterizovat pomocí jejich vzájemných vzdáleností (cvičení).
- Protože F zachovává afinní kombinace dvojic, je F afinní zobrazení podle cvičení ???. Označme f příslušné lineární zobrazení mezi prostory vektorů.
- Zobrazení f zachovává normy: Pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in V$ a bod $a \in A$ platí

$$\|f(\mathbf{v})\| = \|f((a + \mathbf{v}) - a)\| = \|F(a + \mathbf{v}) - F(a)\| = \|a + \mathbf{v} - a\| = \|\mathbf{v}\|$$

- Protože f zachovává normu, je podle tvrzení ??? ortogonální.

□

V příkladech ??? z kapitoly o vlastních číslech jsme popsali všechny ortogonální zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Z dokázané věty tak získáme v těchto případech popis všech izometrií. Izometrie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou rotace složené s posunutím a ortogonální reflexe složené z posunutím. Izometrie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jsou rotace kolem osy složené z posunutím a rotace kolem osy složené s ortogonální reflexí vzhledem k rovině a posunutím. Obdobné výsledky samozřejmě platí pro izometrie mezi dvěma libovolnými eukleidovskými prostory dimenze 2 nebo 3, stačí vše převést do \mathbb{R}^2 nebo \mathbb{R}^3 pomocí kartézských soustav souřadnic.

OBSAH

1. Předpoklady	1
1.1. Komplexní čísla	1
1.2. Komplexní rovina	5
1.3. Teorie čísel	8
1.4. Zobrazení	8
2. Řešení soustav lineárních rovnic	8
2.1. Aplikace	8
2.2. Geometrická interpretace, řádkový pohled	11
2.3. Příklady	14
2.4. Řešení obecné soustavy rovnic Gaussovou eliminací	19
2.5. Praktické problémy při numerickém řešení velkých soustav rovnic	23
2.6. Sloupcový geometrický pohled.	24
2.7. Matice jako úložiště dat	27
3. Tělesa	29
3.1. Motivace	29
3.2. Definice tělesa	31
3.3. Tělesa \mathbb{Z}_p	33
3.4. Charakteristika	36
3.5. Další příklady těles	37
4. Matice	42
4.1. Matice a jednoduché operace	42
4.2. Násobení matic	43
4.3. Maticový zápis soustavy lineárních rovnic	48
4.4. Vlastnosti maticových operací	50
4.5. Další aplikace	52
4.6. Blokové matice	53
4.7. Regulární matice	54
4.8. Maticový zápis Gaussovy eliminace, LU-rozklad	63
4.9. Jednostranné inverzy	65
5. Vektorové prostory	68
5.1. Definice, příklady a základní vlastnosti	68
5.2. Podprostory	71
5.3. Lineární závislost a nezávislost	77
5.4. Báze	83
5.5. Dimenze podprostorů určených maticí, soustavy rovnic podruhé	93
5.6. Průnik a součet podprostorů	100
5.7. Prostory nekonečné dimenze	103
5.8. Samoopravné kódy	104
6. Determinant	117
6.1. Motivace	117
6.2. Permutace	119
6.3. Definice determinantu a základní vlastnosti	125
6.4. Rozvoj, adjungovaná matice	134
6.5. Vandermondův determinant	139
7. Skalární součin	142
7.1. Standardní skalární součin v \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n	142
7.2. Obecný skalární součin	144

7.3. Kolmost	151
7.4. Ortogonální projekce	160
7.5. Gram-Schmidtova ortogonalizace, QR-rozklad	165
7.6. Unitární a ortogonální matice	171
8. Lineární zobrazení	180
8.1. Definice a příklady	180
8.2. Matice lineárního zobrazení	182
8.3. Skládání lineárních zobrazení	187
8.4. Typy lineárních zobrazení	190
8.5. Prostor lineárních zobrazení	195
8.6. Ortogonální zobrazení	199
9. Vlastní čísla a vlastní vektory	202
9.1. Diferenční a diferenciální rovnice	202
9.2. Vlastní čísla a vlastní vektory	204
9.3. Diagonalizovatelné operátory	215
9.4. Jordanův kanonický tvar	232
9.5. Google	257
9.6. Unitární diagonalizovatelnost	262
9.7. Singulární rozklad	276
10. Bilineární formy	289
10.1. Matice	291
10.2. Symetrické a antisymetrické formy	293
10.3. Ortogonální báze	296
10.4. Ortogonální báze nad \mathbb{R}	300
10.5. Příklady	304
11. Afinní prostory	308
11.1. Definice afinního prostoru	308
11.2. Lineární kombinace bodů	313
11.3. Podprostory	318
11.4. Afinní zobrazení	323
Obsah	329