Lineární algebra a geometrie 1, 2

Jiří Tůma

2013/14

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barto/LA1314leto.html

tuma@karlin.mff.cuni.cz

Kapitola 1

Úvod

Úvod - obsah

- *Komplexní čísla*
- *Dělitelnost*
- *Zobrazení*
- *Vektory*

Komplexní čísla - obsah

- *Komplexní čísla*
  Historie
  Operace
  Geometrický význam
  Eulerova formule
  Binomické rovnice
  Cardanův vzorec

Ars Magna

1545 Girolamo Cardano

úloha: najděte čísla a, b, pro která platí $a + b = 10$, $ab = 16$
řešení: zkusme $a = 5 + x$ a $b = 5 - x$ pro nějaké x
musí platit $ab = 25 - x^2 = 16$, tj. $x^2 = 9$ a $x = 3$,
tedy $a = 8$, $b = 2$

úloha: najděte čísla a, b, pro která platí $a + b = 10$, $ab = 40$
řešení: zkusme opět $a = 5 + x$ a $b = 5 - x$ pro nějaké x
musí platit $ab = 25 - x^2 = 40$, tj. $x^2 = -15$
„za cenu nesmírného duševního utrpení“ lze napsat $x = \sqrt{-15}$
$ab = (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40$

co to má znamenat?

Více odvahy

$\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}$

pro $c > 0$ má rovnice $x^2 = -c$ kořeny
$x = \sqrt{-c} = \sqrt{c}\sqrt{-1}$ a $x = -\sqrt{-c} = -\sqrt{c}\sqrt{-1}$

rovnici $x^2 = 2x - 10$ upravíme na $x^2 - 2x + 1 = -9$, neboli
$(x - 1)^2 = -9$,
ta má kořeny $x - 1 = \sqrt{-9} = 3\sqrt{-1}$ a $x - 1 = -3\sqrt{-1}$
tj. $x = 1 + 3\sqrt{-1}$ a $x = 1 - 3\sqrt{-1}$

$(2 + 3\sqrt{-1}) + (3 - 2\sqrt{-1}) = 5 + 1\sqrt{-1}$

$(2 + 3\sqrt{-1})(3 - 2\sqrt{-1}) = 6 - 4\sqrt{-1} + 9\sqrt{-1} - 6(\sqrt{-1})^2 =$
$6 + 5\sqrt{-1} - 6(-1) = 6 + 5\sqrt{-1} + 6 = 12 + 5\sqrt{-1}$

René Descartes (1596-1650) posměšně: **jsou to imaginární čísla**

Imaginární jednotka

Leonhard Euler (1707-1783): označení i místo $\sqrt{-1}$, tedy $i^2 = -1$

komplexní číslo je výraz $z = a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla

- a je *reálná část* komplexního čísla z
- b je *imaginární část* čísla z
- dvě komplexní čísla z, w se rovnají, rovnají-li se jejich reálné části a imaginární části
- *součet* $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- *součin* $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- i nazýváme *imaginární jednotka*
- čísla $a + 0i$ jsou reálná čísla (počítá se s nimi stejně)
- čísla $0 + bi$ nazýváme *čistě imaginární čísla*

Základní věta algebry

rozšiřování číselných oborů kvůli řešitelnosti rovnic

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

základní věta algebry: každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má aspoň jeden komplexní kořen

- věta říká, že kořen existuje, neříká jak jej najít
- vzorečky existují pouze pro polynomy stupňů $1, 2, 3, 4$
- pro polynomy stupně $3, 4$ jsou nepraktické
- pro polynomy stupně ≥ 5 žádné vzorečky neexistují

Komplexní (Gaussova) rovina

reálná čísla si geometricky představujeme na *reálné ose*

komplexní číslo $z = a + bi$ si můžeme si představit jako bod $[a, b]$ v rovině s kartézskými souřadnicemi

polární souřadnice bodu z: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$

polární tvar komplexního čísla $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

absolutní hodnota $|z| = r$, *argument* $\arg z = \varphi$ (až na násobek 2π)

Eulerova formule

komplexní čísla $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $w = \cos\psi + i\sin\psi$ leží na jednotkové kružnici

$$\begin{aligned} zw &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) \\ &= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \end{aligned}$$

Eulerova formule: $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, $\quad e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$

Geometrický význam operací

$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\quad w = c + di = s(\cos\psi + i\sin\psi)$

$z + w = (a + c) + (b + d)i$

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)s(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) \end{aligned}$$

Komplexní sdružování

je-li $z = a + bi$, pak číslo $a - bi$ je *komplexně sdružené* k z, označení $\overline{z}$

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$
- $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $z \in \mathbb{C}$ je reálné číslo právě když $z = \overline{z}$
- $z + \overline{z}$ je vždy reálné číslo

Komplexní sdružování kořenů

kořeny polynomů s reálnými koeficienty se komplexně sdružují do párů

věta: je-li $p(x)$ polynom s reálnými koeficienty a z komplexní číslo takové, že $p(z) = 0$, pak také $p(\overline{z}) = 0$

důkaz: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,
protože $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$, platí také $\overline{p(z)} = \overline{0} = 0$,

$$\begin{aligned} 0 = \overline{p(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = p(\overline{z}), \end{aligned}$$

tedy $\overline{z}$ je také kořen $p(x)$

důsledek: má-li polynom s reálnými koeficienty lichý počet kořenů, pak aspoň jeden z kořenů je reálný

Moivreova věta

pro každé přirozené číslo n platí

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

důkaz: matematickou indukcí podle n
pro $n = 1$ platí $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^1 = \cos(1\varphi) + i\sin(1\varphi)$
předpokládejme, že pro nějaké $n \geq 1$ platí

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

potom platí

$$\begin{aligned} (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= \cos(n\varphi + \varphi) + i\sin(n\varphi + \varphi) \\ &= \cos(n+1)\varphi + \sin(n+1)\varphi \end{aligned}$$

Moivreova věta pomocí Eulerovy formule: $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}$

Binomické rovnice

$z^n = w \qquad (= s(\cos\psi + i\sin\psi)\ )$

z budeme hledat v polárním tvaru $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:
$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

porovnáním absolutních hodnot a argumentů pro z^n a w dostaneme $r^n = s$, tj. $r = \sqrt[n]{s}$, a $\psi = n\varphi$, tj. $\varphi = \frac{\psi}{n}$

argument ψ je určený jednoznačně až na násobek 2π

jiné řešení dostaneme volbou $\psi + 2\pi$: $\quad \varphi = \frac{\psi+2\pi}{n} = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}$

volby argumentu pro w $\quad \psi, \psi + 2\pi, \psi + 2\cdot 2\pi, \ldots, \psi + (n-1)2\pi$
vedou k různým možnostem pro φ: $\quad \frac{\psi}{n}, \frac{\psi+2\pi}{n}, \ldots, \frac{\psi+(n-1)2\pi}{n}$

různé kořeny jsou $\sqrt[n]{s}(\cos\frac{\psi+k2\pi}{n} + i\sin\frac{\psi+k2\pi}{n})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

n-té odmocniny z 1

řešení rovnice $z^n = 1$

primitivní n-tá odmocnina z 1: $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

n-té odmocniny z w

případ $|w| = 1$

případ $|w| \neq 1$

Cardanův vzorec

řešení rovnice $x^3 = px + q$

$(a+b)^3 = 3ab(a+b) + (a^3 + b^3) \quad (= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$

$a + b$ je řešením rovnice, pokud $\quad 3ab = p \quad$ a $\quad a^3 + b^3 = q$

spočteme třetí mocninu první rovnice: $\quad a^3b^3 = \frac{p^3}{27}$

známe součet a součin neznámých čísel a^3, b^3

proto $a^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}, \quad b^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$

je-li $p, q \in \mathbb{R}$ a $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0$, jedním z kořenů rovnice je reálné číslo

$a+b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$ (Scipione del Ferro)

obecně jsou tři možnosti pro a, ke každé z těchto tří možnosti existuje právě jedno $b = \frac{p}{3a}$

Úvod - komplexní čísla - shrnutí

komplexní čísla

- **základní**: počítání s komplexními čísly - imaginární jednotka, operace sčítání a odčítání, násobení a dělení, rovnost komplexních čísel,
- **základní**: geometrická interpretace komplexních čísel, goniometrický tvar komplexního čísla, absolutní hodnota a argument
- **základní**: čísla komplexně sdružená, geometrický význam, souvislost komplexního sdružování s operacemi
- **důležité**: geometrická interpretace operací s komplexními čísly, Eulerova formule, Moivreova věta
- **důležité**: kořeny binomických rovnic, n-té odmocniny z 1
- **důležité**: komplexní sdružování kořenů algebraické rovnice s reálnými koeficienty, základní věta algebry

Úvod - komplexní čísla - shrnutí

- **pro zajímavost**: Cardanův „objev“ komplexních čísel
- **pro zajímavost**: Cardanova formule pro kořeny polynomů třetího stupně
- **pro zajímavost**: neexistence vzorce pro kořeny polynomů stupně aspoň 5 s reálnými koeficienty

Dělitelnost - obsah

- *Dělitelnost*
  Dělení se zbytkem
  Dělitelnost celých čísel
  Kongruence celých čísel

Dělení se zbytkem

$7 : 3 = 2$, zbytek 1, zkouška $7 = 3 \cdot 2 + 1$

$-7 : 3 = -2$, zbytek -1, zkouška $-7 = 3 \cdot (-2) - 1$

$-7 : 3 = -3$, zbytek 2, zkouška $-7 = 3 \cdot (-3) + 2$

$-7 : 3 = -4$, zbytek 5, zkouška $-7 = 3 \cdot (-4) + 5$

věta o dělení se zbytkem: je-li a celé číslo a n přirozené číslo, pak existují jednoznačně určená celá čísla q a $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ taková, že $a = nq + r$

jiný zápis

$\forall a \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists! q \in \mathbb{Z}\ \exists! r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\ (a = nq + r)$

r je zbytek při dělení čísla a číslem n, označení: $a \bmod n$

Dělitelnost

definice: jsou-li a, b celá čísla, pak říkáme, že *a dělí b* pokud existuje celé číslo k takové, že $b = ak$, označení: $a \,|\, b$

upozornění: z této definice plyne, že $0|0$, neboť $0 = 0 \cdot 1$

tranzitivita dělitelnosti: pokud a dělí b a b dělí c, pak a dělí c

důkaz: protože $a \,|\, b$, existuje celé číslo k tak, že $b = ak$,
protože $b \,|\, c$, existuje celé číslo l tak, že $c = bl$,
potom $c = bl = (ak)l = a(kl)$ a tedy a dělí c

přímý důkaz

zápis tranzitivity formulkou: $(\,(a \,|\, b) \,\&\, (b \,|\, c)\,) \Rightarrow (a \,|\, c)$

Kongruence

definice: je-li dáno přirozené číslo n a dvě celá čísla a, b, pak říkáme, že *a je kongruentní s b modulo n*, pokud n dělí rozdíl $a - b$,
zápis: $a \equiv b \pmod{n}$, případně $a \not\equiv b \pmod{n}$

věta: pro každá dvě celá čísla a, b a pro každé přirozené číslo n platí $a \equiv b \pmod{n}$ právě tehdy když $a \bmod n = b \bmod n$

důkaz: vydělíme obě čísla a, b číslem n se zbytkem:
$a = nq + r$, $b = ns + t$, tedy $r = a \bmod n$ a $t = b \bmod n$
dále $a - b = nq + r - (ns + t) = n(q - s) + (r - t)$,

je-li $a \equiv b \pmod{n}$, pak $n \,|\, (a - b)$, tj. $a - b = nk$ pro nějaké k,
tedy $nk = n(q - s) + (r - t)$; upravíme na $n(k - q + s) = r - t$,
levá strana je násobkem n, pro pravou stranu platí $|r - t| < n$,
proto $r - t = 0$, tj. $a \bmod n = b \bmod n$

platí-li naopak $a \bmod n = b \bmod n$, plyne odtud $r = t$
a tedy $a - b = n(q - s)$, proto $n \,|\, (a - b)$, tj. $a \equiv b \pmod{n}$.

Vlastnosti kongruencí

věta: pro každá celá čísla a, b, c a každé přirozené číslo n platí

- $a \equiv a \pmod{n}$ - **reflexivita**
- je-li $a \equiv b \pmod{n}$, pak $b \equiv a \pmod{n}$ - **symetrie**
- je-li $a \equiv b \pmod{n}$ a $b \equiv c \pmod{n}$, pak $a \equiv c \pmod{n}$ - **tranzitivita**

důkaz tranzitivity: z $a \equiv b \pmod{n}$ plyne $a \bmod n = b \bmod n$,
z $b \equiv c \pmod{n}$ plyne $b \bmod n = c \bmod n$,
proto $a \bmod n = c \bmod n$ a tedy $a \equiv c \pmod{n}$

pozorování: platí $a \equiv b \pmod{n}$ právě tehdy, když existuje celé číslo k takové, že $a = nk + b$

pozorování: je-li $r = a \bmod n$, pak $r \equiv a \pmod{n}$

Kongruence a operace

věta: je-li n přirozené číslo a a, b, c, d celá čísla taková, že $a \equiv b \pmod{n}$ a $c \equiv d \pmod{n}$, pak platí

- $a + c \equiv b + d \pmod{n}$,
- $ac \equiv bd \pmod{n}$

důkaz:
z $a \equiv b \pmod{n}$ plyne existence $k \in \mathbb{Z}$ takového, že $a = nk + b$,
z $c \equiv d \pmod{n}$ plyne existence $l \in \mathbb{Z}$ takového, že $c = nl + d$,

- pak $a + c = nk + b + nl + d = n(k + l) + (b + d)$, tedy $a + c \equiv b + d \pmod{n}$,
- dále $ac = (nk + b)(nl + d) = n(kl + kd + bl) + bd$, a protože $kl + kd + bl$ je celé číslo, platí $ac \equiv bd \pmod{n}$

Počítání modulo n

modulo 12: $7 + 8 \equiv 3 \pmod{12}$, $19 + 104 \equiv 3 \pmod{12}$,
$7 \cdot 8 \equiv 8 \pmod{12}$, $19 \cdot 20 \equiv 8 \pmod{12}$,
$6 \cdot 8 \equiv 0 \pmod{12}$, $3(-5) \equiv 9 \pmod{12}$

modulo 5: $3 + 4 \equiv 2 \pmod{5}$, $3 - 4 \equiv 4 \pmod{5}$,
$3 \cdot 4 \equiv 2 \pmod{5}$, $3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{5}$

modulo 2: co znamená $a \equiv 0 \pmod{2}$, co $a \equiv 1 \pmod{2}$?

příklad: jaká je poslední cifra čísla 3^{1999} zapsaného v desítkové soustavě?

$3^{1999} = 3^{4 \cdot 499 + 3} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$,
proto $3^{1999} \equiv 81^{499} \cdot 27 \equiv 1^{499} \cdot 7 \equiv 7 \pmod{10}$

Prvočísla

definice: přirozené číslo $p \geq 2$ nazýváme *prvočíslo*, jestliže jediná dvě přirozená čísla, která dělí p, jsou 1 a p

věta: je-li p prvočíslo a jsou-li a, b přirozená čísla taková, že $p \,|\, (ab)$, pak buď $p \,|\, a$ nebo $p \,|\, b$

věta: je-li p prvočíslo a a přirozené číslo, které není násobkem p, pak jsou čísla $1a \bmod p, 2a \bmod p, 3a \bmod p, \dots, (p-1)a \bmod p$ navzájem různá

důkaz: zvolme $k \geq l$ dvě čísla z množiny $\{1, 2, \dots, p-1\}$,
platí-li $ka \bmod p = la \bmod p$, mají obě čísla ka a la stejný zbytek při dělení číslem p,
platí tedy $ka \equiv la \pmod{p}$ a proto $p \,|\, (k - l)a$,
protože p nedělí a, platí $p \,|\, (k - l)$,
protože $0 \leq k - l < p$, plyne odtud $k - l = 0$

Počítání modulo prvočíslo

pozorování: pokud p nedělí a, pak žádné z čísel $1a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ není dělitelné p

důkaz sporem: předpokládejme, že $p \,|\, (ka)$ pro nějaké $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$; protože p je prvočíslo, platí $p \,|\, k$ nebo $p \,|\, a$, možnost $p \,|\, k$ je ve sporu s předpokladem $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, možnost $p \,|\, a$ je ve sporu s předpokladem, že p nedělí a

důsledek: je-li p prvočíslo a a přirozené číslo, které není násobkem p, pak existuje přirozené číslo $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ takové, že $ka \equiv 1 \pmod{p}$

důkaz: čísla $1a \bmod p, 2a \bmod p, \dots, (p-1)a \bmod p$ jsou nenulová podle pozorování, jsou navzájem různá podle předchozí věty, a všechna leží v množině $\{1, 2, \dots, p-1\}$, která má přesně $p-1$ prvků, aspoň jedno z nich se proto musí rovnat 1, z $ka \bmod p = 1$ plyne $ka \equiv 1 \pmod{p}$

Inverze modulo n

platí-li $ba \equiv 1 \pmod{n}$, říkáme že b je *inverzní k* a modulo n

počítáme-li modulo nějaké prvočíslo p, pak inverzní prvek existuje ke každému a, které není násobkem p

pro malá prvočísla jej najdeme vyzkoušením všech možností
mod 3: $2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{3}$,
mod 5: $2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$, $4 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{5}$,
mod 7: $2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{7}$, $3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7}$, $6 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{7}$,

pro velká p najdeme inverzní prvky pomocí *rozšířeného euklidova algoritmu*

pokud modul n není prvočíslo, existují inverzní prvky pouze k těm a, která jsou nesoudělná s n, najdeme je stejným algoritmem

číslo $4b$ je vždy sudé, tedy $4b \bmod 6$ se nikdy nerovná 1, inverzní prvek ke 4 modulo 6 tedy neexistuje

Čínská věta o zbytcích

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
mod 3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
mod 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

každé nezáporné celé číslo $k < 12 = 3 \cdot 4$ je jednoznačně určené dvojicí zbytků $(k \mod 3, k \mod 4)$

čínští vojevůdci takto údajně zjišťovali počet svých vojáků; nechali je nastoupit např. do 9-stupů, 10-stupů, 11-stupů a 13-stupů; pak už jenom odhadli, mají-li jich méně než $9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13 = 12870$ nebo mezi 12870 a 25740, atd.

dnes se modulární výpočty používají při počítání s velkými celými čísly

výpočet se udělá modulo různá prvočísla p_i a pak se skutečný výsledek rekonstruuje z těchto částečných (modulárních) výsledků

Úvod - dělitelnost - shrnutí

- **základní**: struktura matematických tvrzení, implikace, předpoklad, závěr
- **základní**: dělitelnost celých čísel, jednoduché důkazy z definice
- **důležité**: kongruence na množině celých čísel, kongruence modulo n je ekvivalence na množině všech celých čísel
- **důležité**: souvislost kongruencí a operací na množině celých čísel
- **důležité**: počítání modulo n, zejména modulo prvočíslo, inverze modulo n a modulo prvočíslo
- **pro zajímavost**: čínská věta o zbytcích

Zobrazení - obsah

- *Zobrazení*
  Různé pohledy na zobrazení
  Složené zobrazení
  Prosté zobrazení, zobrazení na

Zobrazení

jsou-li X, Y nějaké množiny, pak *zobrazení* $f : X \to Y$ je „předpis“, který každému prvku $x \in X$ přiřazuje jednoznačně určený prvek $f(x) \in Y$

na zobrazení můžeme nahlížet jako na „černou skříňku“, do které na jedné straně „leze“ hodnota proměnné $x \in X$ a z druhé „vylézá“ hodnota $f(x)$ proměnné $y \in Y$, proto zápis $f(x) = y$

některé obory zdůrazňují černoskříňkový pohled zápisem funkce pomocí blokového schématu

naše zobrazení jsou vždy **definována na celé množině** X

Geometrická zobrazení v rovině

osová symetrie v rovině

ortogonální projekce na přímku v rovině

otočení kolem bodu o úhel α

Geometrická zobrazení v prostoru

ortogonální projekce na rovinu

rotace kolem osy o úhel α

Bramborový pohled na zobrazení

$f : X \to Y$

Složené zobrazení

jsou-li $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ dvě zobrazení, pak *složení zobrazení* f a g je zobrazení $h : X \to Z$ definované předpisem $h(x) = g(f(x))$ pro každé $x \in X$, **označení:** $h = gf$

blokové schéma

skládání zobrazení je asociativní: platí $h(gf) = (hg)f$ pro libovolná zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $h : Z \to U$

Otočení v rovině a komplexní čísla

z geometrického významu násobení komplexních čísel - str. 1-10 - plyne, že otočení v rovině o úhel α můžeme popsat také zobrazením $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kde $f(z) = e^{i\alpha}z$

otočení o úhel β je zobrazení $g(z) = e^{i\beta}z$

pro složené zobrazení fg platí $fg(z) = f(e^{i\beta}z) = e^{i\alpha}e^{i\beta}z$ pro každé $z \in \mathbb{C}$

otočení o úhel $\alpha + \beta$ je zobrazení $h(z) = e^{i(\alpha+\beta)}z$

skutečnost, že otočení o úhel $\alpha + \beta$ dosteneme jako složení otočení o úhel β s otočením o úhel α znamená, že $h(z) = fg(z)$, tj. $e^{i(\alpha+\beta)}z = e^{i\alpha}e^{i\beta}z$ pro každé $z \in \mathbb{C}$

speciálně pro $z = 1$ dostáváme Eulerovu formuli $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$

Prosté zobrazení

identické zobrazení na množině x je zobrazení, které každý prvek $x \in X$ zobrazuje zase do x, **označení:** id_X

definice: zobrazení $f : X \to Y$ je *prosté*, pokud pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in X$ z předpokladu $x_1 \neq x_2$ plyne $f(x_1) \neq f(x_2)$

pozorování: zobrazení $f : X \to Y$ je prosté právě když existuje $g : Y \to X$ takové, že $gf = id_X$

důkaz $\Rightarrow$: je-li $y \in Y$ a $y = f(x)$ pro nějaké $x \in X$, definujeme $g(y) = x$, pro ostatní $y \in Y$ definujeme $g(y) \in X$ libovolně, pro každé $x \in X$ pak platí $gf(x) = g(f(x)) = x$,

$\Leftarrow$: jsou-li $x_1 \neq x_2$ dva různé prvky x, pak platí $gf(x_1) = x_1 \neq x_2 = gf(x_2)$ a tedy musí být $f(x_1) \neq f(x_2)$

Zobrazení na

definice: zobrazení $f : X \to Y$ je *na množinu* Y,
pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $y = f(x)$

pozorování: zobrazení $f : X \to Y$ je na množinu Y právě když existuje $h : Y \to X$ takové, že $fh = id_Y$

důkaz $\Rightarrow$: potřebujeme definovat zobrazení $h : Y \to X$,
je-li $y \in Y$, existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$, jedno takové x zvolíme a definujeme $h(y) = x$,
pak $fh(y) = f(x) = y$, protože $y \in Y$ bylo libovolné, platí $fh = id_Y$

$\Leftarrow$: zvolme $y \in Y$, potom $y = id_Y(y) = fh(y) = f(h(y))$,
protože $x = h(y) \in X$, je f na množinu Y

Vzájemně jednoznačné zobrazení

definice: zobrazení $f : X \to Y$ je *vzájemně jednoznačné*, je-li současně prosté a na množinu Y

pozorování: zobrazení $f : X \to Y$ je vzájemně jednoznačné právě když existuje zobrazení $g : Y \to X$ takové, že $gf = id_X$ a $fg = id_Y$

důkaz: téměř stejný

definice: zobrazení g nazýváme *inverzní zobrazení k* f a označujeme jej f^{-1}

Zobrazení mezi konečnými množinami

tvrzení: jsou-li X, Y dvě **konečné** množiny se stejným počtem prvků, pak pro zobrazení $f : X \to Y$ jsou následující tři podmínky ekvivalentní:

- f je prosté,
- f je na množinu Y,
- f je vzájemně jednoznačné

důkaz:

příklad: pro nekonečné množiny, např. je-li $X = Y = \mathbb{N}$, tvrzení neplatí

Úvod - zobrazení - shrnutí

- **základní**: geometrická zobrazení v rovině a prostoru, projekce na přímku a rovinu, symetrie vzhledem k přímce a rovině, otočení kolem bodu v rovině, kolem přímky v prostoru
- **základní**: skládání zobrazení
- **základní**: prosté zobrazení, zobrazení na, vzájemně jednoznačné zobrazení, inverzní zobrazení,
- **důležité**: různé pohledy na zobrazení
- **důležité**: formální definice zobrazení (byla v matematické analýze)
- **důležité**: charakterizace různých typů zobrazení pomocí existence inverzí zleva, zprava nebo oboustranné
- **pro zajímavost**: otočení v rovině a komplexní čísla

Vektory - obsah

- *Vektory*
  Souřadnice bodů
  Souřadnice vektorů
  Body a vektory
  Prostory větších dimenzí
  Skalární součin

Souřadnice bodů v rovině

Zvolíme-li v rovině souřadný systém, můžeme každý bod roviny zapsat jako *uspořádanou dvojici* reálných čísel

body $[1, 2], [-1, 1], [-2, -1]$, atd.
závislost na souřadném systému

Souřadnice bodů v prostoru

zvolíme-li souřadný systém v prostoru, můžeme každý bod prostoru zapsat jako *uspořádanou trojici* reálných čísel

body $[1, 2, 0], [-1, 1, 1], [0, -2, -1]$, atd.

Souřadnice vektorů v rovině

souřadný systém v rovině nám umožňuje zapisovat také vektory jako *uspořádané dvojice* reálných čísel

vektory $(1, 2), (-1, 1), (-1, -2)$, atd.
polohový vektor bodu
nulový vektor

Souřadnice vektorů v prostoru

podobně můžeme zapisovat vektory v prostoru jako *uspořádané trojice* reálných čísel

vektory $(1,2,0),(1,1,1),(-1,-1,-1)$, atd.

Součet bodu a vektoru

jsou-li p bod a $\mathbf{u}$ vektor v rovině, určují jednoznačně jiný bod q

bod q zapisujeme obvykle jako $p+\mathbf{u}$

je-li v rovině souřadný systém, bod p má souřadnice $[a,b]$
a vektor $\mathbf{u}$ má souřadnice (c,d),
pak bod $p+\mathbf{u}$ má souřadnice $[a+c,b+d]$

podobně v prostoru

Součet vektorů

dva vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$ v rovině můžeme sečíst

$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$, $\mathbf{u}+\mathbf{o}=\mathbf{u}$, $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

má-li $\mathbf{u}$ v nějakém souřadném systému souřadnice (a,b)
a $\mathbf{v}$ souřadnice (c,d), pak $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ má souřadnice $(a+c,b+d)$

totéž v prostoru

Násobení vektoru číslem

víme, co znamená $2\mathbf{u}$, co $(-1)\mathbf{u}$, $\frac{1}{3}\mathbf{u}$, $0\mathbf{u}$, $r\mathbf{u}$, $r\mathbf{o}$ pro každé $r\in\mathbb{R}$

$r(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$, $(r+s)\mathbf{u}=r\mathbf{u}+s\mathbf{u}$

jsou-li souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v nějakém souřadném systému rovné (a,b), pak $r\mathbf{u}$ má v témže souřadném systému souřadnice (ra,rb)

totéž v prostoru

Přímky v rovině a prostoru

je-li p bod a $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ vektor v rovině, pak množina bodů $\{p + r\mathbf{u} : r \in \mathbb{R}\}$ je množina všech bodů přímky procházející bodem p ve směru vektoru $\mathbf{u}$

přímky $\{p + r\mathbf{u} : r \in \mathbb{R}\}$ a $\{q + r\mathbf{u} : r \in \mathbb{R}\}$ jsou rovnoběžné (nebo se rovnají)

totéž v prostoru

parametrický tvar přímky v rovině nebo v prostoru

???

je-li p bod v prostoru a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dva vektory v prostoru, čemu se rovná množina bodů $\{p + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} : r, s \in \mathbb{R}\}$?

Polohový vektor bodu

bod a *vektor* v rovině jsou dva rozdílné matematické pojmy

pokud v rovině zvolíme souřadný systém, bod i vektor můžeme zapsat jako uspořádanou dvojici reálných čísel

zápisem $[a, b]$ dáváme najevo, že jde o bod, (a, b) je vektor

volbou souřadného systému volíme významný bod – počátek o

polohový vektor bodu p vede z o do p

totéž v prostoru

Přímky a roviny jako množiny vektorů

je-li p bod v rovině nebo v prostoru, a $\mathbf{u}$ nenulový vektor tamtéž, pak $\{p + t\mathbf{u} : r \in \mathbb{R}\}$ je přímka

označíme $\mathbf{p}$ polohový vektor bodu p

množinu vektorů $\{\mathbf{p} + r\mathbf{u} : r \in \mathbb{R}\}$ také nazýváme přímka

totéž pro roviny

Prostory větších dimenzí

prostory dimenze větší než 3 si představit geometricky neumíme

umíme si ale představit souřadnice jejich bodů a vektorů – v dimenzi 4 jsou to uspořádané čtveřice $[u_1, u_2, u_3, u_4]$ reálných čísel

uspořádanou čtveřici $[2, 1, 4, 3]$ můžeme považovat za bod v prostoru dimenze 4

stejně tak se můžeme čtveřici $(2, 1, 4, 3)$, považovat za vektor $\mathbf{p}$ v tomto prostoru

na základě analogie můžeme množinu $\{p + r\mathbf{u} : r \in \mathbb{R}\}$ považovat za množinu bodů nějaké přímky v prostoru dimenze 4

stejně tak můžeme množinu $\{p + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} : r, s \in \mathbb{R}\}$ považovat za rovinu ve čtyřdimenzionálním prostoru

podobně interpretujeme množiny vektorů $\{\mathbf{p} + r\mathbf{u} : r \in \mathbb{R}\}$ nebo $\{\mathbf{p} + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} : r, s \in \mathbb{R}\}$ jako přímky nebo roviny v prostoru dim 4

Aritmetické vektory

n-složkový aritmetický vektor je uspořádaná n-tice $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ čísel (reálných, komplexních nebo jiných)

u_i je *i-tá složka* aritmetického vektoru $(u_1, u_2, \dots, u_n)$
!! nikoliv souřadnice !!

aritmetické vektory budeme zapisovat *sloupcově*: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

kvůli šetření místem ale také $(u_1, u_2, \dots, u_n)^T$

nulový vektor je vektor $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n})^T$, označovat jej budeme $\mathbf{o}$

Analogie pokračují

součet aritmetických vektorů: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$

součin čísla a vektoru: $r \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ru_1 \\ ru_2 \\ \vdots \\ ru_n \end{pmatrix}$

úsporně: $(u_1, u_2, \dots, u_n)^T + (v_1, v_2, \dots, v_n)^T = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)^T$
$r(u_1, u_2, \dots, u_n)^T = (ru_1, ru_2, \dots, ru_n)^T$

dále $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$

Skalární součin

jsou-li $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ aritmetické vektory, definujeme *standardní skalární součin*, nebo také *bodový součin* jako číslo
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

pomocí skalárního součinu měříme *délku vektoru* nebo také *normu*
$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

také zjišťujeme kolmost: vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou *kolmé*, platí-li
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$

podobně pro 3-složkové vektory

Další analogie

skalární (bodový) součin definujeme analogicky pro obecné n-složkové vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

norma (délka) n-složkového vektoru $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$

n-složkové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou *kolmé*, platí-li $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

množinu n-složkových vektorů s reálnými složkami označujeme $\mathbb{R}^n$

množinu n-složkových komplexních vektorů označujeme $\mathbb{C}^n$

Úvod - vektory - shrnutí

- **důležité**: body a vektory v rovině a v prostoru, jejich souřadnice
- **důležité**: operace - součet vektorů, skalární násobek vektoru, součet bodu s vektorem
- **důležité**: parametrické vyjádření přímky v rovině nebo v prostoru, roviny v prostoru
- **důležité**: polohový vektor bodu
- **důležité**: aritmetické (reálné nebo komplexní) n-složkové vektory, jejich součet, skalární násobek aritmetického vektoru
- **důležité**: skalární (bodový) součin dvou n-složkových aritmetických vektorů
- **důležité**: norma vektorů, kolmost vektorů, souvislost s kosinovou větou

Terminologie

je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nazývá se *reálná funkce (jedné) reálné proměnné*

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ je *reálná funkce komplexní proměnné*

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je *komplexní funkce komplexní proměnné*

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *reálná funkce n reálných proměnných*

velká část lineární algebry spočívá ve studiu *lineárních* zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ případně $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$

zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je uspořádaná posloupnost m reálných funkcí n reálných proměnných

zobrazení $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ je uspořádaná posloupnost m komplexních funkcí n komplexních proměnných

Kapitola 2

Soustavy lineárních rovnic

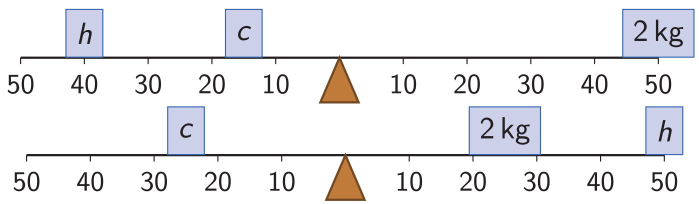
Soustavy lineárních rovnic - obsah

- *Příklady*
- *Geometrický význam*
- *Gaussova eliminace*
- *Matice jako zobrazení*

Příklady - obsah

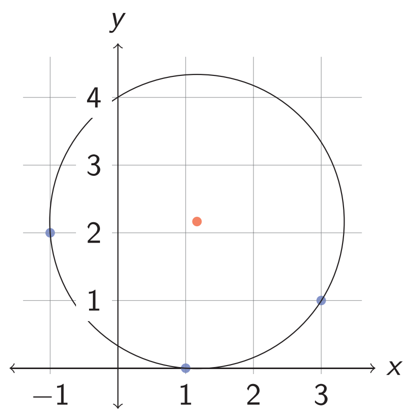
- *Příklady*
  - Rovnováha na páce
  - Proložení kružnice danými body
  - Elektrický obvod
  - Výroba TNT
  - Pohyb hlavy disku

Rovnováha na páce



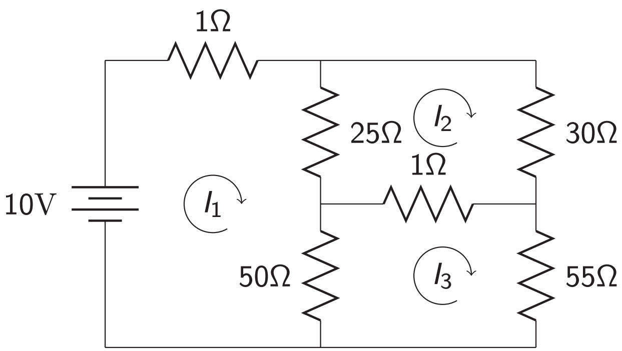
$$
\begin{aligned}
40h + 15c &= 50 \cdot 2 \\
25c &= 25 \cdot 2 + 50h
\end{aligned}
$$

Proložení kružnice danými body



$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Elektrický obvod



$$\begin{aligned}1I_1 + 25(I_1 - I_2) + 50(I_1 - I_3) &= 10\\ 25(I_2 - I_1) + 30I_2 + 1(I_2 - I_3) &= 0\\ 50(I_3 - I_1) + 1(I_3 - I_2) + 55I_3 &= 0\end{aligned}$$

Výroba TNT

uvažujme chemickou reakci toluenu a kyseliny dusičné, při které vzniká TNT a voda

$$C_7H_8 + HNO_3 \longrightarrow C_7H_5O_6N_3 + H_2O$$

vyčíslení chemické rovnice znamená nalezení poměrů jednotlivých molekul, aby počet atomů každého prvku byl na obou stranách stejný

$$xC_7H_8 + yHNO_3 \longrightarrow zC_7H_5O_6N_3 + wH_2O$$

$$\begin{aligned}7x &= 7z\\ 8x + y &= 5z + 2w\\ y &= 3z\\ 3y &= 6z + w\end{aligned}$$

Pohyb hlavy disku 1

objekt jednotkové hmotnosti se pohybuje bez tření po přímce

na počátku je v poloze 0 a má nulovou rychlost

Pohyb hlavy disku 2

po dobu 8 časových jednotek na něj působí vnější síly $f(t)$

vnější síla je konstantní vždy během jedné jednotky času, tj. $f(t) = x_j$ pro $j-1 \leq t \leq j$ a $j = 1, 2, \ldots, 8$

chceme dosáhnout toho, aby se po 8 jednotkách času poloha objektu rovnala b_1 a jeho rychlost byla b_2

vektor neznámých sil $(x_1, \ldots, x_8)^T$ musí splňovat soustavu

$$\begin{aligned}\frac{15}{2}x_1 + \frac{13}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 + \frac{9}{2}x_4 + \frac{7}{2}x_5 + \frac{5}{2}x_6 + \frac{3}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_8 &= b_1\\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= b_2\end{aligned}$$

Geometrický význam - obsah

- *Geometrický význam*
  - Dvě neznámé
  - Tři neznámé
  - Více neznámých

Jedna rovnice o dvou neznámých

$2x_1 + 3x_2 = 6$, množinu řešení si představíme jako body $[x_1, x_2]$,

parametrické vyjádření body/vektory

$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$, kde $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

normálový vektor

degenerované případy

Více rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 6 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

možnosti obecně:

- celá rovina
- přímka
- bod
- prázdná množina

Jedna rovnice o třech neznámých

$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$

normálový vektor

parametrické vyjádření body/vektory

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1$

degenerované případy

Více rovnic o třech neznámých

možnosti obecně:

- celý prostor
- rovina
- přímka
- bod
- prázdná množina

Více neznámých

například množina všech řešení soustavy o 5 neznámých je nějaká podmnožina $\mathbb{R}^5$, tj. prostoru dimenze 5

parametrické vyjádření

možnosti:

- prázdná množina
- bod
- přímka
- rovina
- 3-dimenzionální prostor obsažený v $\mathbb{R}^5$
- 4-dimenzionální prostor obsažený v $\mathbb{R}^5$
- celý 5-dimenzionální prostor $\mathbb{R}^5$

Gaussova eliminace - obsah

Příklad

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 18x_3 &= 33 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 16 \end{aligned}$$

eliminační metoda spočívá v tom, že z nějaké rovnice vypočteme jednu proměnnou a dosadíme ji do ostatních

např. z první rovnice spočteme $x_1 = -3x_2 - \frac{5}{2}x_3$
a po dosazení do druhé a třetí rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -4x_2 + \frac{21}{2}x_3 &= 33 \\ -2x_2 + 5x_3 &= 16 \end{aligned}$$

Příklad - dokončení

z druhé rovnice spočteme $x_2 = \frac{21}{8}x_3 - \frac{33}{4}$ a dosadíme do třetí

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -4x_2 + \frac{21}{2}x_3 &= 33 \\ -\frac{1}{4}x_3 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

nyní odzadu spočteme hodnoty jednotlivých proměnných

$x_3 = 2$,
$-4x_2 = 33 - \frac{21}{2}x_3 = 12$, tj. $x_2 = -3$,
$2x_1 = -6x_2 - 5x_3 = 8$, tj. $x_1 = 4$

pořadí proměnných i rovnic při eliminaci si můžeme volit

Příklad jinak

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 18x_3 &= 33 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 16 \end{aligned}$$

od druhé rovnice odečteme $\frac{3}{2}$-násobek první rovnice, potom přičteme ke třetí rovnici (-1)-násobek první

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -4x_2 + \frac{21}{2}x_3 &= 33 \\ -2x_2 + 5x_3 &= 16 \end{aligned}$$

ke třetí rovnici přičteme $(-\frac{1}{2})$-násobek druhé

pak opět navážeme *zpětnou substitucí*

Elementární úpravy

při druhé metodě eliminace jsme používali jedinou úpravu

- přičtení *k*-násobku jedné rovnice k **jiné** rovnici

další dvě úpravy, které se při řešení soustav lineárních rovnic používají, jsou

- prohození dvou rovnic
- vynásobení rovnice **nenulovým** číslem

žádná z těchto *elementárních úprav* nezmenší množinu všech řešení

každá z elementárních úprav je *vratná*, tj. její efekt lze odstranit jinou elementární úpravou

proto žádná elementární úprava žádné nové řešení ani nepřidá

množina všech řešení soustavy se elementárními úpravami nemění - jsou to *ekvivalentní úpravy*

Matice

vše podstatné o soustavě lineárních rovnic zapíšeme pomocí *rozšířené matice soustavy*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 18 & 33 \\ 2 & 4 & 10 & 16 \end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 16 \end{pmatrix}$ je *vektor pravých stran*

$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 18 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ je *matice soustavy*, tvoří ji koeficienty u neznámých

Eliminace pomocí elementárních úprav rozšířené matice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 18 & 33 \\ 2 & 4 & 10 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & \frac{21}{2} & 33 \\ 2 & 4 & 10 & 16 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & \frac{21}{2} & 33 \\ 0 & -2 & 5 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & \frac{21}{2} & 33 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

nebo jinak

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 18 & 33 \\ 2 & 4 & 10 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 18 & 33 \\ 2 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Zpětná substituce pomocí elementárních úprav

začneme poslední maticí prvního výpočtu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & \frac{21}{2} & 33 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & \frac{21}{2} & 33 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

i zpětná substituce používá pouze ekvivalentní úpravy, proto není nutné na konci dělat zkoušku

Definice matice

matice (nad $\mathbb{R}$) *typu* $m \times n$ je obdélníkové schéma reálných čísel s m řádky a n sloupci

Zápis $A = (a_{ij})_{m\times n}$ znamená, že A je matice typu $m \times n$, která má na pozici (i, j) (tedy v i-tém řádku a j-tém sloupci) číslo a_{ij}

pozor na pořadí indexů – první číslo označuje řádek, druhé sloupec

matice také zapisujeme výčtem prvků spolu s jejich umístěním

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sloupcové vektory matice

v matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ je n sloupců

každý sloupec je uspořádaná m-tice reálných čísel, tj. vektor z $\mathbb{R}^m$

první sloupec je vektor $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, označíme jej $\mathbf{a}_1$

řádkový zápis j-tého sloupce je $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$

sloupcový zápis matice je $A = (\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \cdots\, \mathbf{a}_n)$

nebo pečlivěji $A = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n)$

Řádkové vektory matice

podobně každý řádek matice $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ je n-složkový aritmetický vektor

řádkové vektory budeme označovat $\tilde{\mathbf{a}}_i$

protože vektory zapisujeme sloupcově, $\tilde{\mathbf{a}}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$

tedy $\tilde{\mathbf{a}}_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$

řádkový zápis matice je potom $A = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{a}}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_m^T \end{pmatrix}$

Matice soustavy lineárních rovnic

soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

matice soustavy

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vektor pravých stran je vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$

Rozšířená matice soustavy

rozšířená matice soustavy

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

rozšířená matice soustavy je tvořená dvěma *bloky* – maticí soustavy a vektorem pravých stran

Řádkově odstupňovaný tvar matice - příklady

Gaussova eliminace je postup jak převést matici do *řádkově odstupňovaného tvaru* pomocí elementárních řádkových úprav

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

matice je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud je na počátku každého nenulového řádku více nul než kolik je nul na počátku řádku předchozího

Řádkově odstupňovaný tvar matice obecně

matice $C = (c_{ij})_{m\times n}$ typu $m \times n$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje index $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$ takový, že řádky s indexy $r+1, \ldots, m$ jsou nulové, řádky s indexy $1, 2, \ldots, r$ jsou nenulové a platí $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$, kde k_i je nejmenší sloupcový index takový, že $c_{ik_i} \neq 0$, pro $i = 1, 2, \ldots, r$

první nenulové prvky v řádcích nazýváme *pivoty*

Gaussova eliminace

matici $A = (a_{ij})_{m\times n}$ chceme převést pomocí elementárních řádkových úprav do řádkově odstupňovaného tvaru

1. je-li A nulová matice (tj. všechny prvky jsou 0) nebo má pouze jeden řádek, skončíme (neboť A je v *řot*)
2. je-li A nenulová a má aspoň dva řádky, najdeme první *nenulový* sloupec zleva, jeho index označíme k_1
3. v k_1-ním sloupci najdeme nějaký nenulový prvek, třeba v i-tém řádku, a prohodíme první s i-tým řádkem, pokud $i \neq 1$
4. přičítáme postupně vhodné násobky prvního řádku k ostatním a vynulujeme zbylé prvky v k_1-ním sloupci pod prvním řádkem
5. celý postup opakujeme s maticí B, kterou dostaneme z A vynecháním prvního řádku

Proč to funguje

jak vypadá matice po jednotlivých krocích Gaussovy eliminace

$$
\left(\begin{array}{ccc|c|c}
0 & \cdots & 0 & ? & \mathbf{c}^T \\
0 & \cdots & 0 & \vdots & \\
\vdots & \ddots & \vdots & * & A_0 \\
0 & \cdots & 0 & \vdots &
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c|c}
0 & \cdots & 0 & * & \mathbf{d}^T \\
0 & \cdots & 0 & ? & \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & A_1 \\
0 & \cdots & 0 & ? &
\end{array}\right)
\sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c|c}
0 & \cdots & 0 & * & \mathbf{d}^T \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & A_2 \\
0 & \cdots & 0 & 0 &
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
0 & \cdots & 0 & * & \mathbf{d}^T \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & C_0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 &
\end{array}\right)
= C
$$

formální důkaz indukcí podle počtu řádků m matice A

Hodnost matice

základní definice: počet nenulových řádků v matici v *řot*, kterou dostaneme po Gaussově eliminaci z matice A nazýváme *hodnost matice A*,

značení: $r(A)$ nebo $rank(A)$

jde o velmi důležitou definici - základní číselnou charakteristiku matice

v tomto okamžiku neumíme dokázat, že hodnost matice nezávisí na tom, jaké ekvivalentní úpravy při Gaussově eliminaci použijeme

nicméně tomu tak je a hodnost rozšířené matice soustavy A rozhoduje o tom, jakou „dimenzi“ má množina všech řešení soustavy

Soustava lineárních rovnic - další příklad

použijeme Gaussovu eliminaci na rozšířenou matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 5 & 15 \\ 2 & 8 & 3 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

poslední rovnice je vždy splněná, na množinu všech řešení nemá vliv

- z druhé rovnice spočteme $x_3 = 2$
- hodnotu x_2 můžeme zvolit libovolně: $x_2 = t$, t je *parametr*
- z první rovnice pak spočteme $x_1 = 5 - 4t$

množina všech řešení je $\left\{ \begin{pmatrix} 5-4t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

Geometrické vyjádření množiny všech řešení

pro libovolnou hodnotu parametru t platí

$$\begin{pmatrix} 5-4t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4t \\ 0+t \\ 2+0t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4t \\ t \\ 0t \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

množinu všech řešení soustavy tak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

jde tedy o přímku, která prochází bodem $[5, 0, 2]$ (s polohovým vektorem $(5, 0, 2)^T$) a její směrový vektor je $(-4, 1, 0)^T$

Další geometrická vyjádření

různé volby parametru t vedou k různým řešením soustavy

volbou dvou různých hodnot parametru t dostaneme polohové vektory $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ dvou různých bodů p, q přímky

jejich rozdíl $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ je směrový vektor přímky a parametrický zápis této přímky je $\{\mathbf{p} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$

v našem případě volba $t = 0$ vede na vektor $\mathbf{p} = (5, 0, 2)^T$

volbou $t = 1$ dostáváme $\mathbf{q} = (5, 0, 2)^T + (-4, 1, 0)^T = (1, 1, 2)^T$ a směrový vektor $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = (-4, 1, 0)^T$

naše vyjádření tedy pochází z voleb $t = 0$ a $t = 1$

Homogenní soustava

tvrzení: jsou-li $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ dvě řešení soustavy $(A|\mathbf{b})$, pak jejich rozdíl $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ je řešením soustavy $(A|\mathbf{o})$

důkaz: zvolíme libovolnou rovnici $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ soustavy $(A|\mathbf{b})$

protože $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou řešením soustavy $(A|\mathbf{b})$, platí

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n = b_i,$$
$$a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n = b_i$$

odečtením obou rovnic dostaneme

$$a_{i1}(v_1 - w_1) + a_{i2}(v_2 - w_2) + \cdots + a_{in}(v_n - w_n) = 0$$

rozdíl vektorů $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ tak splňuje každou rovnici soustavy $(A|\mathbf{o})$

definice: soustavu $(A|\mathbf{o})$ nazýváme *homogenní soustava lineárních rovnic* (příslušná k soustavě $(A|\mathbf{b})$)

Větší soustava

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

bázové sloupce jsou sloupce, které obsahují nějaký pivot – v našem případě první a třetí

proměnné rozdělíme na *bázové* (x_1 a x_3) a *volné* (x_2, x_4 a x_5)

volné proměnné jsou parametry, jejich hodnoty můžeme libovolně volit: $x_2 = t_2$, $x_4 = t_4$, $x_5 = t_5$

hodnoty bázových proměnných pak dopočteme zpětnou substitucí: $x_3 = -3 - 2t_5$, $\quad x_1 = -1 - 2t_2 - 3t_4 - 2t_5$

Geometrické vyjádření

$$\text{řešení:} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -1 - 2t_2 - 3t_4 - 2t_5 \\ t_2 \\ -3 - 2t_5 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix} : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

podobně jako v prvním případě řešení vyjádříme ve tvaru:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

„vidíme“, že jde o 3-dim prostor umístěný v prostoru dimenze 5

Kuchařka

obecné řešení $(A|\mathbf{b})$: $\quad \{\mathbf{u} + t_2\mathbf{v_2} + t_4\mathbf{v}_4 + t_5\mathbf{v}_5 : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R}\}$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 \in \mathbb{R}^5$ jsou vhodné vektory

vektor $\mathbf{u}$ je konkrétní řešení soustavy $(A|\mathbf{b})$ dané volbou parametrů $t_2 = t_4 = t_5 = 0$

vektor $\mathbf{v}_2$ je konkrétní řešení příslušné homogenní soustavy $(A|\mathbf{o})$ dané volbou parametrů $t_2 = 1$ a $t_4 = t_5 = 0$

podobně $\mathbf{v}_4$ je řešení $(A|\mathbf{o})$ dané volbou $t_2 = 0$, $t_4 = 1$ a $t_5 = 0$ a $\mathbf{v}_5$ je řešení $(A|\mathbf{o})$ dané volbou $t_2 = t_4 = 0$ a $t_5 = 1$

Forma

obecné řešení také „upečeme“ tak, že do obecné formy dané počtem proměnných (v našem případě 5) a volnými proměnnými x_2, x_4, x_5

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t_2, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

doplníme neznámé složky tak, že

- spočteme jedno konkrétní řešení $(A|\mathbf{b})$ dané volbou parametrů $t_2, t_4, t_5 = 0$,
- pro každý parametr t_p najdeme vektor $\mathbf{v}_p$ jako řešení homogenní soustavy $(A|\mathbf{o})$ dané volbou $t_p = 1$ a $t_q = 0$ pro všechny ostatní patametry t_q

Neřešitelné soustavy

věta: soustava lineárních rovnic $(A|\mathbf{b})$ je neřešitelná právě když po provedení Gaussovy eliminace je vektor pravých stran bázový sloupec

důkaz: Gaussova eliminace používá pouze ekvivalentní úpravy, soustava s rozšířenou maticí $(A|\mathbf{b})$ je řešitelná právě když je řešitelná soustava s rozšířenou maticí $(C|\mathbf{d})$, která je v *řot*

je-li sloupec pravých stran $\mathbf{d}$ bázový, obsahuje soustava po Gaussově eliminaci rovnici $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = d$, kde $d \neq 0$, tato rovnice (a tedy celá soustava) je neřešitelná

v případě, že sloupec pravých stran $\mathbf{d}$ není bázový, rozdělíme proměnné na volné a bázové a pomocí zpětné substituce najdeme jednoznačné řešení soustavy pro libovolnou volbu hodnot volných proměnných

jinak řečeno: soustava $(A|\mathbf{b})$ je řešitelná právě když $r(A|\mathbf{b}) = r(A)$

Parametrické vyjádření množiny všech řešení

obecně můžeme postup při řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých s rozšířenou maticí soustavy $(A|\mathbf{b})$ popsat následovně

- matici $(A|\mathbf{b})$ převedeme do *řot* pomocí Gaussovy eliminace
- zjistíme, je-li sloupec pravých stran bázový, pokud ano, soustava je neřešitelná
- pokud ne, najdeme bázové proměnné $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ a volné proměnné x_p, $p \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}\}$
- volné proměnné $x_p = t_p$ jsou parametry, jejich počet je $n - r$
- vyjádříme obecné řešení soustavy ve tvaru $\mathbf{u} + \sum_{p \in P} t_p \mathbf{v}_p$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}_p, p \in P$ jsou vhodné vektory z $\mathbb{R}^n$
- vektor $\mathbf{u}$ najdeme například jako řešení soustavy $(A|\mathbf{b})$ dané volbou parametrů $t_p = 0$ pro $p \in P$
- pro $p \in P$ najdeme vektory $\mathbf{v}_p$ například jako řešení homogenní soustavy $(A|\mathbf{o})$ dané volbou parametru $t_p = 1$ a $t_q = 0$ pro $q \neq p$

Zaokrouhlovací chyby

reálná čísla jsou v počítačích reprezentována s určitým počtem platných míst

například *double precision floating point representation* používá 52 binárních míst, tj. zhruba 18 desetinných míst

výsledky aritmetických operací sčítání, násobení nebo dělení je na počítači nutné zaokrouhlovat na daný počet platných míst

nejsou prováděné přesně, nýbrž s malou *zaokrouhlovací chybou*

při stamilionech operací, které vyžaduje Gaussova eliminace u soustav o tisících rovnic s tisíci neznámými, se zaokrouhlovací chyby kumulují a výsledek výpočtu se může podstatně lišit od správného řešení

návrh algoritmů pro řešení velkých soustav lin. rovnic tak, aby se výsledky algoritmů příliš nelišily od správných výsledků, tj. aby byly *numericky stabilní*, je náplní *numerické lineární algebry*

Příklad

vezměme si soustavu s rozšířenou maticí $\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

její přesné řešení je $\left(\frac{1}{1{,}0001}, \frac{2{,}0003}{1{,}0001}\right)^T$

při zaokrouhlování na tři platná místa Gaussova eliminace vede na

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & 10^4 & 2 \cdot 10^4 \end{array}\right)$$

zpětná substituce vede k výsledku $(0, 2)^T$, které se od správného řešení liší významně v první složce

problém je v tom, že číslo 10^4 je tak velké, že smaže pro danou soustavu podstatný rozdíl mezi koeficientem 1 u proměnné x_2 a pravou stranou 3 ve druhé rovnici

Částečná pivotace

částečná pivotace spočívá v tom, že před eliminací nějaké proměnné přeházíme řádky tak, aby pivot byl (v absolutní hodnotě) co největší

v našem příkladu bychom napřed prohodili řádky a pokračovali
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ -10^{-4} & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

zpětná substituce vede k výsledku $(1,2)^T$, což je tak blízko správnému řešení, jak jen lze při zaokrouhlování na tři platná místa doufat

částečná pivotace není všelék na zaokrouhlovací chyby, jak ukazuje příklad soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} -10 & 10^5 & 2\cdot 10^5 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

dostali jsme ji z prvního příkladu vynásobením první rovnice 10^5

Úplná pivotace

zde je již pivot v absolutní hodnotě největší, eliminace vede na
$$\left(\begin{array}{cc|c} -10 & 10^5 & 2\cdot 10^5 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -10 & 10^5 & 2\cdot 10^5 \\ 0 & 10^4 & 2\cdot 10^4 \end{array}\right)$$
a zpětná substituce dává opět výsledek $(0,2)^T$

problém v tomto případě je ve velkém rozílu mezi velikostí prvků v prvním a druhém řádku

zde pomůže *úplná pivotace* – před každým cyklem GE změníme pořadí zbylých řádků a sloupců tak, aby pivot byl co největší

pozor: přehazování sloupců znamená přehazování proměnných

pak $\left(\begin{array}{cc|c} 10^5 & -10 & 2\cdot 10^5 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 10^5 & -10 & 2\cdot 10^5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

což vede k $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$, tj. k řešení $(1,2)^T$ původní soustavy

Špatně podmíněné soustavy

soustava $\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}835 & 0{,}667 & 0{,}168 \\ 0{,}333 & 0{,}266 & 0{,}067 \end{array}\right)$ má řešení $(1,-1)^T$

nepatrná změna druhé složky pravé strany na $0,066$ vede k
$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}835 & 0{,}667 & 0{,}168 \\ 0{,}333 & 0{,}266 & 0{,}066 \end{array}\right)$ s řešením $(-666, 834)^T$

v obou případech jde o přesné řešení, problém není v numerické stabilitě algoritmu

při řešení praktických úloh jsou často pravé strany soustav výsledkem měření a jsou tedy známé s jistou tolerancí

pokud drobná změna naměřené hodnoty podstatně mění řešení, nelze se na výsledek řešení soustavy spolehnout

takovým soustavám se říká *špatně podmíněné*

problém je v tom, že obě přímky jsou téměř rovnoběžné

Matice jako zobrazení - obsah

Sloupcový pohled na soustavu rovnic

řešíme soustavu $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$

hledáme x_1, x_2, pro které platí rovnost $\begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

levá strana $\begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

je dána maticí soustavy $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

proměnná x_1 je koeficient u sloupcového vektoru $\mathbf{a}_1$, x_2 u $\mathbf{a}_2$

jiný zápis soustavy: $x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Geometrický sloupcový pohled

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

řešení si můžeme představit geometricky jiným způsobem

????

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= b_1 \\ -x_1 + 2x_2 &= b_2 \\ x_1 - x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

sloupcový zápis soustavy je

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

otázka: jaká je nutná a postačující podmínka pro vektor pravých stran $(b_1, b_2, b_2)^T$, aby byla soustava řešitelná ?

Soustava lineárních rovnic jako zobrazení

zvolíme-li $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, pak $x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

levá strana soustavy je zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

toto zobrazení je určené maticí soustavy $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, zapisujeme je také f_A

řešit soustavu $(A|\mathbf{b})$ znamená najít takové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, že $f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$

vůbec nejčastější zápis hodnoty f_A v bodě $\mathbf{x}$ je $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

Matice jako zobrazení

obecná matice $A = (a_{ij})_{m\times n}$ určuje zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ je

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

pomocí sloupcových vektorů: $f_A(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$

stručně a nejčastěji: $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ nebo $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

- matice A má m řádků a n sloupců,
- vektor $\mathbf{x}$ má n složek,
- vektor $\mathbf{y} = f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ má m složek

Lineární kombinace

toto je naprosto základní definice: jsou-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$ reálné (nebo komplexní) aritmetické m-složkové vektory a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ reálná (nebo komplexní) čísla, pak součet

$$t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_n\mathbf{u}_n$$

nazýváme *lineární kombinace* vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ s koeficienty $t_1, t_2, \ldots, t_n$

libovolná lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$ je opět vektor z $\mathbb{R}^m$

hodnota zobrazení $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ je lineární kombinace sloupců $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ matice A s koeficienty $x_1, \ldots, x_n$

Vážené součty

čemu se rovná i-tá složka vektoru $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$?

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

tj. $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$

i-tá složka y_i výstupu $\mathbf{y}$ je *vážený součet* složek $x_1, \ldots, x_n$ vstupu $\mathbf{x}$, váhy jednotlivých složek vstupu jsou v i-tém řádku matice A

j-tý sloupec matice A říká, s jakými váhami přispívá j-tá složka x_j vstupu $\mathbf{x}$ k jednotlivým složkám $y_1, \ldots, y_m$ výstupu $\mathbf{y}$

Příklady

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1/2 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1/12 & 1/2 & 1/4 & 1/12 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0,1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad s hlavou disku

příklad soustavy lineárních rovnic popisující vliv posloupnosti vnějších sil na polohu a rychlost objektu vede na matici soustavy

$$A = \begin{pmatrix} 15/2 & 13/2 & 11/2 & 9/2 & 7/2 & 5/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vstup $(x_1, x_2, \ldots, x_8)^T$ odpovídá velikosti sil, z nichž každá působí po dobu jedné jednotky času

výstup $(y_1, y_2)^T$ udává polohu y_1 a rychlost y_2 objektu po osmi jednotkách času

z matice vidíme, že všechny vstupní síly přispívají k závěrečné rychlosti stejně

naopak závěrečná poloha je nejcitlivější na velikost první síly x_1 a nejméně citlivá na velikost poslední síly x_8

Měření/odhady

zobrazení $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ určené maticí A vyjadřuje závislost mezi dvěma proměnnými veličinami $\mathbf{y}$ a $\mathbf{x}$

praktické využití závisí na tom, kterou z proměnných máme „pod kontrolou“, můžeme ji měřit, apod.

v případě, že můžeme měřit jednotlivé složky $y_1, \ldots, y_m$ proměnné $\mathbf{y}$, vede řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ k odhadu/měření hodnoty složek $x_1, \ldots, x_n$ proměnné $\mathbf{x}$ – jde o úlohy „teorie měření“

v těchto případech má obvykle matice A více řádků než sloupců, tj. $m \geq n$

složky y_i proměnné $\mathbf{y}$ si můžeme představovat jako čidla/měřící přístroje, pomocí jejichž hodnot odhadujeme velikost proměnných $x_1, \ldots, x_n$, které nemůžeme měřit přímo

Řízení

pokud máme pod kontrolou hodnoty proměnné $\mathbf{x}$, snažíme se je nastavit tak, abychom dosáhli kýžených hodnot proměnné $\mathbf{y}$ – jde o úlohy „teorie řízení“

také v tomto případě vede úloha k řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$

v úlohách teorie řízení mají matice obvykle více sloupců než řádků, tj. $m \leq n$

soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ s „tlustou“ maticí mají většinou mnoho různých řešení

mezi nimi volíme taková, která splňují nějaké dodatečné „optimalizační“ podmínky

v úlohách teorie řízení si můžeme složky proměnné $\mathbf{x}$ představit jako joystick/ovladač/šoupátko

Matice jako úložiště dat

některá data jsou přirozeně uspořádána do matice

například závěrečné ceny akcií v jednotlivých dnech tvoří matici

uložíme je do matice, kde řádky odpovídají akciím a sloupce závěrečným cenám akcií v jednotlivých dnech

hospodářské přílohy novin přinášejí každý den nový sloupec matice

jiným příkladem matice jako úložiště dat jsou tabulky nutričních hodnot potravin

fakulta organizuje část přijímacího řízení formou pohovoru, kde skupina tří porotců známkuje uchazeče v 12 kritériích

známky můžeme uložit do matice $A = (a_{ij})$, kde a_{ij} je známka i-tého posluchače v j-tém kritériu

Vstupy do výroby a produkty

nějaká korporace vyrábí řadu produktů

k jejich výrobě používá mnoho vstupů (materiál, součástky, pracovní síly, energie, atd.)

- x_j označuje cenu jednotky vstupu j – vektor vstupů $\mathbf{x}$
- y_i je výrobní cena produktu i – vektor výstupů $\mathbf{y}$
- a_{ij} je počet jednotek vstupu j potřebných k výrobě produktu i – matice A

platí $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

i-tý řádek matice A udává počty jednotek vstupů potřebných k výrobě i-tého produktu

který produkt má výrobní cenu nejcitlivější na cenu elektrické energie ?

Digitální foto

digitální fotoaparát zaznamenává pro každý pixel jeho barvu

každou barvu lze složit ze tří základních barev - R,Y,B

intenzita každé ze tří základních barev v daném pixelu je zaznamenána pomocí 1 bytu, čili posloupností 8 nul a jedniček

celkem je tedy možných $2^8 = 256$ odstínů každé ze tří barev

ty jsou ukládány pro každou ze tří barev do samostatné matice jako celá čísla mezi -127 a $+128$

jedna fotka vyrobená fotoaparátem, který má 8 Mpixelů by tak vyžadovala paměť velikosti 24 MB

na disk velikosti 1 GB bychom mohli uložit 40 fotek

fotky se proto *komprimují*, nejznámější komprimační formát je *jpeg*

Matice incidence orientovaného grafu

jiný typ dat, která lze zapsat jako matice, jsou grafy

budeme uvažovat *orientované grafy*, ty mají nějakou množinu V *vrcholů* a nějakou množinu $E \subseteq V \times V$ *hran*

je-li $e = (u, v)$ hrana grafu, pak u je *počáteční vrchol* hrany e a v je její *koncový vrchol*

graf (V, E) popíšeme pomocí matice, jejíž řádky odpovídají hranám a sloupce vrcholům grafu

prvky matice se rovnají 0, 1 nebo -1

v řádku určeném hranou (u, v)

- prvek ve sloupci, který odpovídá počátečnímu vrcholu u je -1,
- prvek ve sloupci, který odpovídá koncovému vrcholu v je 1,
- všechny ostatní prvky se rovnají 0

Příklad matice incidence orientovaného grafu

co vyčteme ze sloupců matice grafu ?

jsou i jiné způsoby, jak graf zapsat pomocí matice

Poznámky ke shrnutí

na konci každé kapitoly bude heslovité shrnutí veškeré látky probrané v této kapitole

studujte **všechny důkazy**, je to klíčové pro pochopení látky

v úvodní kapitole jsme opakovali převážně středoškolskou látku, její znalosti považujeme za samozřejmost

za samozřejmost také považujeme studium a pochopení postupu **řešení všech příkladů** uvedených v přednáškách a ve skriptech

témata jsou rozdělena podle jednotlivých kapitol a do čtyř kategorií

v jednotlivých kategoriích jsou pak uvedena v tom pořadí, v jakém byla probírána, logické souvislosti mezi tématy shrnutí nepostihuje

Rozdělení témat do kategorií

- **klíčové**: několik pojmů, které tvoří naprostý základ „lineárně-algebraického“ uvažování; ty byste měli po zkoušce zapomenout až jako úplně poslední, nejlépe nikdy
- **základní**: tato témata jsou pro pochopení látky prvního zcela zásadní; pochopíte-li základní témata, budete rozumět i těm důležitým
- **důležité**: v této kategorii jsou uvedená buď jednoduchá témata, různé geometrické intepretace studovaných pojmů, a témata, která nejsou pro pochopení látky prvního semestru zcela zásadní (jako například pojem charakteristiky tělesa), budou však důležitá později během studia
- **pro zajímavost**: zde jsou uvedená aplikační témata, která by měla motivovat ke studiu, nebo ukázky toho, jakým směrem jsou studovaná témata dále rozvíjena v jiných oborech matematiky, případně něco pro zábavu

Soustavy lineárních rovnic - shrnutí

- **klíčové**: lineární kombinace aritmetických vektorů
- **základní**: definice matice, maticový zápis soustavy lineárních rovnic
- **základní**: Gaussova eliminace a zpětná substituce
- **základní**: parametrické vyjádření množiny všech řešení soustavy lineárních rovnic
- **základní**: hodnost matice
- **základní**: nutná a postačující podmínka pro řešitelnost soustavy lineárních rovnic
- **základní**: sloupcový pohled na soustavu lineárních rovnic
- **základní**: zobrazení určené maticí
- **důležité**: sloupcové a řádkové vektory matice
- **důležité**: geometrický význam lineární rovnice o dvou nebo třech neznámých, význam soustavy takových rovnic

Soustavy lineárních rovnic - shrnutí

- **důležité**: ekvivalentní úpravy soustavy rovnic, elementární úpravy soustavy lineárních rovnic
- **důležité**: řádkově odstupňovaný tvar matice
- **pro zajímavost**: úlohy vedoucí na soustavy lineárních rovnic
- **pro zajímavost**: zaokrouhlovací chyby, numerická stabilita řešení soustavy lineárních rovnic Gaussovo eliminací, pivotace, špatně podmíněné soustavy
- **pro zajímavost**: praktické úlohy na měření a úlohy na řízení
- **pro zajímavost**: matice jako úložiště dat, formát *jpeg*

Kapitola 3

Tělesa

Tělesa - obsah

Algebraické operace a jejich vlastnosti - obsah

Babysoustava 1

$x + 2 = 3 \quad / - 2$

$(x + 2) + (-2) = 3 + (-2)$
$x + (2 + (-2)) = 1$
$x + 0 = 1$
$x = 1$

co potřebujeme:

(S1) pro každá čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a + b) + c = a + (b + c)$

(S2) existuje číslo $0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé číslo $a \in \mathbb{R}$ platí $a + 0 = 0 + a = a$

(S3) pro každé číslo $a \in \mathbb{R}$ existuje $-a \in \mathbb{R}$ takové, že $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Binární operace

sčítání a násobení reálných čísel jsou příklady binárních operací

definice: *binární operace* na množině T je zobrazení z $T \times T$ do T

tradiční zápis $u \oplus v$ místo funkčního zápisu $\oplus((u, v))$

příklady operací splňujících podmínky (S1), (S2), (S3):

- běžné sčítání na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$
- běžné sčítání na množině $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$
- běžné násobení na množině všech nenulových reálných čísel
- sčítání funkcí na množině všech reálných funkcí reálné proměnné
- sčítání modulo n na množině $\{0, 1, \ldots, n-1\}$

Babysoustava 2

$2 \cdot x = 6 \quad / : 2$

$2^{-1} \cdot (2x) = 2^{-1} \cdot 6$
$(2^{-1} \cdot 2)x = 3$
$1x = 3$
$x = 3$

co potřebujeme:

(N1) pro každá čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(N2) existuje číslo $1 \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé číslo $a \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(N3) pro každé číslo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existuje $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Násobení versus sčítání

příklady operací splňujících (N1), (N2) a (N3)

- běžné násobení na množině $\mathbb{Q}$ racionálních čísel
- běžné násobení na množinách $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- násobení modulo **prvočíslo** p na množině $\{0, 1, \ldots, p-1\}$

nepříklady

- běžné násobení na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$
- násobení modulo 6 na množině $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- násobení modulo **složené číslo** n na množině $\{0, 1, \ldots, n-1\}$

porovnání podmínek (S1)-(S3) a (N1)-(N3)

Babysoustava 3

$$\begin{aligned} x + 3y &= 10 \\ (-2)x + 4y &= 15 \end{aligned}$$

přičteme dvojnásobek první rovnice k druhé

$2(x + 3y) + ((-2)x + 4y) = 2 \cdot 10 + 15$
$2x + 2(3y) + (-2)x + 4y = 35$
$2x + (-2)x + (2 \cdot 3)y + 4y = 35$
$(2 + (-2))x + (6 + 4)y = 35$
$0x + 10y = 35$
$0 + 10y = 35$
$10y = 35$
$\vdots$

Další podmínky

potřebovali jsme ještě

(S4) pro každá čísla $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a + b = b + a$

(D) pro každá čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$

pokud sčítání a násobení nějakých čísel splňuje podmínky (S1)-(S4), (M1)-(M3) a (D), můžeme řešit soustavy lineárních rovnic pomocí eliminace proměnných

Pojem tělesa - obsah

Definice tělesa

definice: *těleso* **T** je množina T spolu se dvěmi binárními operacemi $+$ a $\cdot$ na T splňující následující axiomy

(S1) pro každé $a, b, c \in T$ platí $(a + b) + c = a + (b + c)$

(S2) existuje prvek $0 \in T$ takový, že pro každé $a \in T$ platí $a + 0 = 0 + a = a$

(S3) pro každý prvek $a \in T$ existuje $-a \in T$ takový, že $a + (-a) = (-a) + a = 0$

(S4) pro každé $a, b \in T$ platí $a + b = b + a$

(N1) pro každé $a, b, c \in T$ platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(N2) existuje prvek $1 \in T$ takový, že pro každé $a \in T$ platí $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(N3) pro každý prvek $a \in T$, $a \neq 0$, existuje $a^{-1} \in T$ takový, že $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

(N4) pro každé $a, b \in T$ platí $a \cdot b = b \cdot a$

(D) pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(nT) T má aspoň dva prvky

Jednoduché důsledky axiomů tělesa 1

v každém tělese **T** platí

- nulový prvek je určený jednoznačně
- pro každé $a, b \in T$ má rovnice $a + x = b$ právě jedno řešení
- pro každé $a \in T$ je opačný prvek $-a$ určený jednoznačně
- jednotkový prvek je určený jednoznačně
- pro každé $a \neq 0$ a $b \in T$ má rovnice $ax = b$ právě jedno řešení
- pro každé $a \neq 0$ je inverzní prvek a^{-1} určený jednoznačně

Jednoduché důsledky axiomů tělesa 2

- pro každé $a \in T$ platí $0a = 0$
- je-li $ab = 0$, pak $a = 0$ nebo $b = 0$
- pro každé $a \in T$ platí $-a = (-1)a$
- pro každé $a, b, c \in T$ z rovnosti $a + b = a + c$ plyne $b = c$
- pro každé $b, c \in T$ a $a \neq 0$ z rovnosti $ab = ac$ plyne $b = c$
- $0 \neq 1$

Klasická a konečná tělesa

množiny $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ s obvyklými operacemi sčítání a násobení jsou tělesa

konečná tělesa $\mathbb{Z}_p$: pro každé prvočíslo p tvoří množina $\{0, 1, \dots, p-1\}$ s operacemi sčítání a násobení modulo p těleso

abychom odlišili operace sčítání a násobení v $\mathbb{Z}_p$ od běžného sčítání a násobení celých čísel, budeme je označovat $\oplus$ a $\odot$

$a \oplus b = (a + b) \mod p, \qquad a \odot b = (a \cdot b) \mod p$

k důkazu, že $\mathbb{Z}_p$ je těleso, je nutné ověřit platnost všech axiomů tělesa

protože $(a + b) \mod p \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ a také $(a \cdot b) \mod p \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, jsou $\oplus, \odot$ binární operace na množině $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$

Tělesa $\mathbb{Z}_p$

platnost většiny axiomů je snadné ověřit

např. běžné sčítání celých čísle je komutativní, tj. $a + b = b + a$, proto také $(a + b) \mod p = (b + a) \mod p$ a tedy $a \oplus b = b \oplus a$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}_p$, což dokazuje (S4)

analogicky se dokáže (N4)

stejně snadno se dokáže (N2): platí $1 \cdot a = a$, a tedy také $(1 \cdot a) \mod p = a \mod p$, tj. $1 \odot a = a$ pro každé $a \in \mathbb{Z}_p$

analogicky dokážeme platnost (S2)

(S3): opačný prvek k $a \neq 0$ se rovná $p - a$, opačný prvek k 0 je 0

(N3): existence inverzního prvku k nenulovému $a \in \mathbb{Z}_p$ plyne z důsledku na str. 1-28

(nT): množina $\mathbb{Z}_p$ má $p \geq 2$ prvků

Asociativita 1

důkaz asociativity obou operací je o něco složitější

ukážeme asociativitu násobení, axiom (N1)

zvolíme libovolná tři čísla $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$

podle druhého pozorování na str. 1-24 platí $a \odot b \equiv a \cdot b \pmod p$

podle téhož pozorování platí také $(a \odot b) \odot c \equiv (a \odot b) \cdot c \pmod p$

z reflexivity kongruencí plyne $c \equiv c \pmod p$

z $a \odot b \equiv a \cdot b \pmod p$ a $c \equiv c \pmod p$
plyne podle druhé části věty na str. 1-25
$(a \odot b) \cdot c \equiv (a \cdot b) \cdot c \pmod p$

z tranzitivity kongruencí plyne $(a \odot b) \odot c \equiv (a \cdot b) \cdot c \pmod p$

Asociativita 2

podobně dokážeme $a \cdot (b \cdot c) \equiv a \odot (b \odot c) \pmod{p}$:

protože $b \cdot c \equiv b \odot c \pmod{p}$ a $a \equiv a \pmod{p}$
plyne z druhé části věty na str. 1-25
$a \cdot (b \cdot c) \equiv a \cdot (b \odot c) \pmod{p}$

podle druhého pozorování na str. 1-24 platí
$a \cdot (b \cdot c) \equiv a \cdot (b \odot c) \pmod{p}$

z definice $\odot$ plyne $a \cdot (b \odot c) \equiv a \odot (b \odot c) \pmod{p}$
a z tranzitivity $a \cdot (b \cdot c) \equiv a \odot (b \odot c) \pmod{p}$

protože $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (běžné násobení) plyne z reflexivity
$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \pmod{p}$

opět z tranzitivity plyne $(a \odot b) \odot c \equiv a \odot (b \odot c) \pmod{p}$

vzhledem k tomu, že $(a \odot b) \odot c,\ a \odot (b \odot c) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$,
platí rovnost $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$

Distributivita

asociativita sčítání (S1) se dokáže zcela stejně

distributivita (D) se dokáže podobně

platí následující posloupnost kongruencí

$a \odot (b \oplus c) \equiv a \cdot (b \oplus c) \pmod{p}$ (definice $\odot$ a str. 1-24 dole)
$a \cdot (b \oplus c) \equiv a \cdot (b + c) \pmod{p}$ (str. 1-25 a definice $\oplus$)
$a(b + c) \equiv ab + ac \pmod{p}$ (distributivita v $\mathbb{Z}$ a reflexivita)
$ab + ac \equiv (ab) \oplus (ac) \pmod{p}$ (definice $\oplus$ a str. 1-24 dole)
$(ab) \oplus (ac) \equiv (a \odot b) \oplus (a \odot c) \pmod{p}$ (str. 1-25 a definice $\odot$)

z této posloupnosti kongruencí a z tranzitivity plyne
$a \odot (b \oplus c) \equiv (a \odot b) \oplus (a \odot c) \pmod{p}$

protože $a \odot (b \oplus c),\ (a \odot b) \oplus (a \odot c) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ plyne z
poslední kongruence rovnost $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

Další tělesa

- množina $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ s operacemi sčítání a násobení modulo 4 **není** těleso, číslo 2 nemá inverzní prvek modulo 4, neboť $2 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{4}$ a tedy $2 \cdot 2 = 0$
- čtyřprvkové těleso ale existuje, musí se v něm sčítat a násobit jiným způsobem
- každé konečné těleso musí mít p^k prvků pro nějaké prvočíslo p
- existuje vždy „jediné" těleso s p^k prvky

existuje také spousta dalších nekonečných těles

- množina $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s běžným sčítáním a násobením reálných čísel je těleso
- množina $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s běžným sčítáním a násobením komplexních čísel je také těleso

Čtyřprvkové těleso

čtyřprvkové těleso $GF(4)$ lze sestrojit z dvouprvkového tělesa $\mathbb{Z}_2$ postupem analogickým tomu, jakým jsme z tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ dostali těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$

vezmeme nějaké záhadné α (analogie imaginární jednotky i) a budeme počítat s výrazy $a + b\alpha$, kde $a, b \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, místo 1α budeme psát pouze α

tato množina má pouze čtyři prvky $\{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\}$

sčítání je jednoduché: $1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$,
$0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$, $\alpha + \alpha = (1 + 1)\alpha = 0\alpha = 0$, $\alpha + 1 = 1 + \alpha$

abychom mohli násobit, řekneme si, že $\alpha^2 = \alpha + 1$
(analogie toho, že $i^2 = -1$)

potom $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2 = \alpha + 1$, $\alpha(1 + \alpha) = \alpha + \alpha^2 = \alpha + \alpha + 1 = 1$,
$(1 + \alpha)(1 + \alpha) = 1 + (1 + 1)\alpha + \alpha^2 = 1 + \alpha + 1 = \alpha$

Charakteristika tělesa - obsah

- *Charakteristika tělesa*
  Charakteristika tělesa
  Věta o charakteristice

Charakteristika tělesa

- v tělese $\mathbb{Z}_2$ platí $1+1=0$,
- v tělese $\mathbb{Z}_3$ platí $1+1=2\neq 0$, ale $1+1+1=0$,
- v tělesech $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ platí $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}\neq 0$ pro každé přirozené číslo n

definice: říkáme, že těleso $\mathbf{T}$ má *charakteristiku* $n\geq 1$, pokud je n nejmenší přirozené číslo, pro které platí $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=0$,

říkáme, že těleso $\mathbf{T}$ má *charakteristiku* 0, pokud platí
$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}\neq 0$ pro každé přirozené číslo n

má-li $\mathbf{T}$ charakteristiku 2, platí $a+a=(1+1)a=0$ pro každé $a\in T$; také $-a=a$ a $a-b=b-a$ pro každé $a,b\in\mathbf{T}$

Věta o charakteristice

v každém tělese $\mathbf{T}$ platí

$$(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k})(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{l})=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{kl}$$

má-li $\mathbf{T}$ kladnou charakteristiku a $n=kl$ pro nějaká $k,l\geq 2$, pak z

$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n=kl}=0$ plyne

$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k}=0$ nebo $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{l}=0$

složené n tak nemůže být nejmenším kladným číslem, pro které

$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}=0$

věta: charakteristika každého tělesa $\mathbf{T}$ je buď 0 nebo prvočíslo

Konečnost a charakteristika

má-li těleso $\mathbf{T}$ charakteristiku 0, platí pro každé $n\in\mathbb{N}$
$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}\neq 0$

pokud by pro nějaká dvě přirozená čísla $m>n$ platilo
$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m}=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}$, platilo by také

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m-n}=(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m})-(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n})=0$$

a současně $m-n>0$, což by bylo ve sporu s předpokladem, že charakteristika $\mathbf{T}$ je 0; dokázali jsme tak sporem

tvrzení: má-li těleso $\mathbf{T}$ charakteristiku 0, pak je nekonečné

ekvivalentně: každé konečné těleso má kladnou charakteristiku

pozor ale: existují nekonečná tělesa s kladnou charakteristikou

Tělesa - shrnutí

- **základní**: pojem tělesa
- **důležité**: jednoduché důsledky axiomů tělesa
- **důležité**: charakteristika tělesa
- **důležité**: příklady konečných těles

v prvním semestru si lze pod tělesem představovat vždy těleso reálných čísel, v některých případech je důležité uvědomit si odlišnosti tělesa reálných čísel od tělesa komplexních čísel

Kapitola 4

Matice

Matice - obsah

Malá násobilka matic - obsah

Matice nad tělesem

matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$ jsme definovali na str. 2-24

brzy uvidíme, že výsledky počítání s maticemi závisí na tom, jak počítáme s jejich prvky

výraz *nad* $\mathbb{R}$ říká, že s prvky matice počítáme jako s reálnými čísly

někdy se hodí počítat s prvky matice jako s prvky nějakého jiného tělesa

definice: *matice typu* $m \times n$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ je obdélníkové schéma prvků tělesa $\mathbf{T}$ s m řádky a n sloupci; matice typu $m \times m$ se nazývá *čtvercová matice řádu* m

terminologie: matice typu $m \times 1$ nad $\mathbf{T}$ je m-složkový aritmetický vektor nad tělesem $\mathbf{T}$ *zapsaný sloupcově* (*sloupcový vektor*), matice typu $1 \times n$ je n-složkový aritmetický vektor nad tělesem $\mathbf{T}$ *zapsaný řádkově* (*řádkový vektor*)

Sčítání matic

dvě matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ stejného typu $m \times n$ nad stejným tělesem $\mathbf{T}$ považujeme za rovné, pokud mají na stejných místech stejné prvky, tj. pokud $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé $i = 1, \dots m$ a každé $j = 1, \dots, n$

součet matic $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ stejného typu $m \times n$ nad stejným $\mathbf{T}$ definujeme jako matici $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ typu $m \times n$

příklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 1+2 & 3+2 \\ 4+1 & 0+1 & 1+3 \end{pmatrix}$$

jsou-li matice nad $\mathbb{R}$, pak $= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

jsou-li matice nad $\mathbb{Z}_5$, pak $= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Nulová a opačná matice

opačná matice k matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ je matice $-A = (-a_{ij})$ typu $m \times n$

nulová matice typu $m \times n$ je matice $O_{m \times n} = (0)_{m \times n}$

axiomy (S1)-(S4) pro sčítání v tělese $\mathbf{T}$ vedou přímo k následujícím vlastnostem sčítání matic

jsou-li A, B, C matice téhož typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak platí

- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $A + O_{m \times n} = A$,
- $A + (-A) = O_{m \times n}$,
- $A + B = B + A$

stačí porovnat prvky na stejných místech v maticích na levé a pravé straně každé rovnosti

Součin čísla s maticí

součin čísla $r \in \mathbf{T}$ *s maticí* A typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ je matice $rA = (ra_{ij})$ typu $m \times n$

příklad: nad $\mathbb{R}$ platí

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

z axiomů tělesa plynou další vlastnosti počítání s maticemi

pro každé prvky $r, s \in \mathbf{T}$ a matice A, B téhož typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ platí

- $(r + s)A = rA + sA$,
- $r(A + B) = rA + rB$,
- $r(sA) = (rs)A$,
- $1A = A$,
- $-A = (-1)A$

Sloupce a řádky v součtu matic a součinu čísla s maticí

jsou-li $A = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_m^T \end{pmatrix}$ a $B = (\mathbf{b}_1|\cdots|\mathbf{b}_n) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{b}}_m^T \end{pmatrix}$

matice typu $m \times n$, pak

$$A + B = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1|\cdots|\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T + \tilde{\mathbf{b}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_m^T + \tilde{\mathbf{b}}_m^T \end{pmatrix}$$

podobně $rA = (r\mathbf{a}_1|\cdots|r\mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} r\tilde{\mathbf{a}}_1^T \\ \vdots \\ r\tilde{\mathbf{a}}_m^T \end{pmatrix}$

Transponovaná matice

poslední jednoduchou operací je *transponování* – záměna řádků a sloupců matice

příklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

definice: *transponovaná matice* k matici $A = (a_{ij})_{m\times n}$ je matice $A^T = (d_{ij})_{n\times m}$, kde $d_{ij} = a_{ji}$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, m$

následující tři vlastnosti transponování opět snadno ukážeme

pro každé dvě matice A, B téhož typu $m \times n$ a každé $r \in \mathbf{T}$ platí

- $(A^T)^T = A$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $(r \cdot A)^T = r \cdot A^T$

Velká násobilka matic - obsah

Opakování

ze str. 2-54: matice $A = (a_{ij})_{m\times n}$ určuje zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ je

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

pomocí sloupcových vektorů matice A:
$f_A(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a_2} + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$

výrazu na pravé straně poslední rovnosti říkáme lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a_n}$ s koeficienty $x_1, \ldots, x_n$

Od f_A zpátky k A

rovnost $\quad f_A(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$
definuje zobrazení f_A určené maticí $A = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n)$

umožňuje nám také najít matici A, známe-li pouze zobrazení f_A

stačí zvolit vhodné vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a najít $f_A(\mathbf{x})$:

je-li $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, pak $f_A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1$

je-li $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j = (0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0)^T$, pak $f_A(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j$

sloupce matice A najdeme jako hodnoty $f_A(\mathbf{e}_j)$ pro $j = 1, \ldots, n$

vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ nazýváme *vektory (prvky) kanonické báze v* $\mathbb{R}^n$

Otočení v rovině a matice 1

rovinu pootočíme o úhel α proti směru hodinových ručiček, souřadný systém neměníme

kam se přemístí bod o souřadnicích $(x_1, x_2)^T$?

$(1, 0)^T \mapsto (\cos\alpha, \sin\alpha)^T$

$(0, 1)^T \mapsto (-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$

bod $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

bude mít po otočení souřadnice

$$x_1 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Otočení v rovině a matice 2

otočení v rovině o úhel α proti směru hodinových ručiček je tedy
zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené maticí $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

otočení o úhel β je zobrazení $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené maticí
$B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

otočíme-li rovinu o β a pak o α, dostaneme otočení o úhel $\alpha + \beta$ tj.
zobrazení f_C určené maticí $C = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

platí, že $f_C = f_A f_B$

jak souvisí matice C s maticemi B a A ?

Osová souměrnost a matice

osová souměrnost vzhledem k první souřadné ose zobrazuje bod o souřadnicích $(x_1, x_2)^T$ do bodu o souřadnicích $(x_1, -x_2)^T$

tuto symetrii můžeme popsat jako zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde
$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, neboli
$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

osová souměrnost f je tedy zobrazení určené maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

jaké zobrazení dostaneme, pokud rovinu napřed pootočíme o úhel α a poté uděláme osovou symetrii vzhledem k první souřadné ose ?

Projekce na rovinu a matice

jiné geometricky motivované zobrazení je ortogonální projekce v $\mathbb{R}^3$ na rovinu určenou prvními dvěma souřadnými osami

zde máme na výběr, popíšeme-li ji jako zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nebo jako $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f je určené maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, g je určené maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Co chceme

chceme definovat součin matic AB tak, aby složené zobrazení $f_A f_B$ bylo určené maticí AB

je-li $B = (b_{kl})$ typu $n \times p$, pak zobrazení f_B určené B je definované na prostoru $\mathbb{R}^p$ (nebo obecněji $\mathbf{T}^p$) a vede do $\mathbb{R}^n$ (nebo $\mathbf{T}^n$)

k tomu, aby složení $f_A f_B$ bylo vůbec definované, musí být zobrazení f_A definované na prostoru $\mathbb{R}^n$ (nebo $\mathbf{T}^n$) a vést do nějakého prostoru $\mathbb{R}^m$ (nebo $\mathbf{T}^m$)

matice $A = (a_{ij})$ proto musí být typu $m \times n$ pro nějaké m

složené zobrazení $f_A f_B$ je definované na $\mathbb{R}^p$ (nebo $\mathbf{T}^p$) a vede do $\mathbb{R}^m$ (nebo $\mathbf{T}^m$)

to znamená, že součin AB musí být matice typu $m \times p$

obě matice A, B musí být nad stejným tělesem

Blokové schéma součinu matic

A typu $m \times n$ $\qquad$ B typu $n \times p$ $\qquad$ $C = AB$ typu $m \times p$

blokové schéma

$f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ $\qquad$ $f_B : \mathbf{T}^p \to \mathbf{T}^n$ $\qquad$ $f_C = f_A f_B : \mathbf{T}^p \to \mathbf{T}^m$

Sloupcová definice součinu matic 1

jsou dány matice $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a $B = (b_{jk})_{n\times p}$

hledáme matici C typu $m \times p$, pro kterou platí $f_C(\mathbf{x}) = f_A f_B(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$

první sloupec $\mathbf{c}_1$ matice C najdeme jako $f_C(\mathbf{e}_1)$ – viz str. 4-12

proto $\mathbf{c}_1 = f_C(\mathbf{e}_1)$ se musí rovnat $f_A f_B(\mathbf{e}_1) = f_A(\mathbf{b}_1) = A\mathbf{b}_1$, kde $\mathbf{b_1} = (b_{11}, b_{21}, \dots, b_{n1})^T$ je první sloupec matice B

tedy $\mathbf{c}_1 = b_{11}\mathbf{a}_1 + b_{21}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{n1}\mathbf{a}_n = \sum_{j=1}^n b_{j1}\mathbf{a}_j$

pro libovolné $k = 1, \dots, p$ z požadavku, aby se $\mathbf{c}_k = f_C(\mathbf{e}_k)$ rovnalo $f_A f_B(\mathbf{e}_k) = f_A(\mathbf{b}_k) = A\mathbf{b}_k$, plyne
$\mathbf{c}_k = A\mathbf{b}_k = b_{1k}\mathbf{a}_1 + b_{2k}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{nk}\mathbf{a}_n = \sum_{j=1}^n b_{jk}\mathbf{a}_j$

Sloupcová definice součinu matic 2

základní definice: *součin matic* $A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ typu $m \times n$ a $B = (b_{jk}) = (\mathbf{b}_1|\cdots|\mathbf{b}_p)$ typu $n \times p$ je matice

$$AB = (A\mathbf{b}_1|A\mathbf{b}_2|\cdots|A\mathbf{b}_p) \text{ typu } m \times p$$

pro každé $k = 1, 2, \ldots, p$, je k-tý sloupec součinu AB roven

$$A\mathbf{b}_k = b_{1k}\mathbf{a}_1 + b_{2k}\mathbf{a}_2 + \cdots + b_{nk}\mathbf{a}_n = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{a}_j$$

příklad: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$

první sloupec: $2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

zápis $A\mathbf{x}$ znamenající $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ nyní můžeme chápat jako součin matice A typu $m \times n$ s maticí $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ typu $n \times 1$

Prvková definice součinu matic 1

aritmetický vektor $A\mathbf{b}_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{a}_j$ můžeme zapsat také pomocí jeho složek

i-tá složka vektoru $A\mathbf{b}_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{a}_j$ se rovná $\sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij}$

tvrzení: matice $C = (c_{ik})_{m\times p}$ se rovná součinu AB matic $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a $B = (b_{jk})_{n\times p}$ právě když $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ pro každé $i = 1, \ldots, m$ a každé $k = 1, \ldots, p$

podmínku z tvrzení lze použít jako jinou definici součinu matic

prvek c_{ik} spočítáme podle pravidla *řádek* $\times$ *sloupec*

Prvková definice součinu matic 2

pravidlo *řádek* $\times$ *sloupec* pro výpočet prvku c_{ik} znamená standardní (bodový) skalární součin i-tého řádkového vektoru $\tilde{\mathbf{a}}_i$ matice A s k-tým sloupcovým vektorem $\mathbf{b}_k$ matice B, $c_{ik} = \tilde{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{b}_k$

spočteme ještě jednou: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$

$c_{11} = (1, 2)^T \cdot (2, 3)^T =$

čtvercová matice (t) řádu 1 je určená svým jediným prvkem $t \in \mathbf{T}$

pokud se to bude hodit, ztotožníme matici $(t)_{1\times 1}$ s prvkem t, bodový skalární součin $\tilde{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{b}_k$ pak můžeme zapsat jako součin matic (vektorů) $\tilde{\mathbf{a}}_i^T\mathbf{b}_k$

„Tok informace“

zobrazení $\mathbf{y} = f_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ určené maticí B můžeme také chápat jako „tok informace“ od $\mathbf{x}$ k $\mathbf{y}$

ukážeme si to na příkladu obecné matice $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

a pro součin $AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

Skládání rotací a součin matic

ukázali jsme, že pokud součin matic AB existuje a hledáme-li matici C takovou, že platí $f_C = f_A f_B$, pak musíme zvolit $C = AB$

neukázali jsme ale, v takovém případě skutečně platí $f_C = f_A f_B$, víme pouze, že $f_C(\mathbf{e}_k) = f_A f_B(\mathbf{e}_k)$ pro prvky standardní báze $\mathbf{e}_k$

rovnost $f_C(\mathbf{x}) = f_A f_B(\mathbf{x})$ pro všechny vektory $\mathbf{x}$ dokážeme za chvilku

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Složení rotace se symetrií

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\cos\alpha\sin\alpha \\ -2\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha - \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Asociativita

platí $(AB)C = A(BC)$ pro matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$?

ano, pokud součiny existují

součiny existují právě když A je typu $m \times n$, B je typu $n \times p$ a C je typu $p \times q$ pro nějaká přirozená čísla m, n, p, q

k důkazu asociativity použijeme prvkovou definici součinu matic

prvek na místě (i,k) v součinu $AB = (d_{ik})$ je $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

prvek na místě (i,l) v součinu $(AB)C$ se rovná
$\sum_{k=1}^{p} d_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}\right)$

prvek na místě (j,l) v součinu $BC = (e_{jl})$ je $e_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl}$

prvek na místě (i,l) v součinu $A(BC)$ se rovná
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl}\right)$

Bloková schémata

nyní můžeme ukázat, že skutečně platí $f_{AB} = f_A f_B$ pro matice $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a $B = (b_{jk})_{n\times p}$

pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ z asociativity násobení matic plyne $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$, tj. $f_{AB}(\mathbf{x}) = f_A(f_B(\mathbf{x})) = f_A f_B(\mathbf{x})$

blokové schéma pro součin matic

blokové schéma pro asociativitu

Distributivita 1

platí $A(B+C) = AB + AC$ pro $A = (a_{ij}), B = (b_{jk}), C = (c_{jk})$?

ano, pokud oba výrazy existují

výraz na levé straně existuje právě když A má typ $m \times n$ a B, C mají stejný typ $n \times p$, což je právě když existuje výraz na pravé straně

opět použijeme prvkovou definici součinu

prvek na místě (j,k) v součtu $B + C$ se rovná $b_{jk} + c_{jk}$

prvek na místě (i,k) v součinu $A(B+C)$ je $\sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$

prvek na místě (i,k) v součinu $AB = (d_{ik})$ je $d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ a v součinu $AC = (e_{ik})$ se rovná $e_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk}$

prvek na místě (i,k) v součtu $AB + AC$ je
$d_{ik} + e_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} b_{jk} + a_{ij} c_{jk})$

Distributivita 2 a NEkomutativita

podobně dokážeme rovnost $(A+B)C = AC + BC$ pokud jsou A, B stejného typu $m \times n$ a C typu $n \times p$

násobení matic **není komutativní ! ! !**

pokud oba součiny AB a BA existují, nemusí mít stejný typ

je-li A typu $m \times n$, pak k existenci obou součinů AB a BA je nutné a stačí, aby B byla typu $n \times m$

je-li $m \neq n$, pak AB je čtvercová řádu m a BA je řádu n

je-li $m = n$, jsou oba součiny čtvercové řádu n, **ani to ale nestačí**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Součin matic a násobení číslem

jsou-li $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ matice nad tělesem $\mathbf{T}$ a $r \in \mathbf{T}$,

- platí $A(rB) = r(AB) = (rA)B$

prvek na místě (i,k) v matici $A(rB)$ je $\sum_{j=1}^n a_{ij}(rb_{jk})$

prvek na místě (i,k) v $r(AB)$ je $r\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}\right) = \sum_{j=1}^n r(a_{ij} b_{jk})$

prvek na místě (i,k) v matici $(rA)B$ je $\sum_{j=1}^n (ra_{ij}) b_{jk}$

dosud známé vlastnosti součinu matic dovolují spočítat např. že

$$A(B-C) = A(B + (-1)C) = AB + A(-1)C = \\ = AB + (-1)(AC) = AB - AC,$$

pokud je součin $A(B-C)$ definován

nebo $\quad A(r_1\mathbf{u}_1 + \cdots + r_k\mathbf{u}_k) = r_1(A\mathbf{u}_1) + \cdots + r_k(A\mathbf{u}_k)$

Dvě jednoduchá pozorování

výhodnost počítání s maticemi si ukážeme na novém důkazu pozorování na str. 2-37

pozorování 1: jsou-li $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ dvě řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pak $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ je řešením homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$

důkaz: jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, platí $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ a $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, proto $A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o}$

pozorování 2: je-li $\mathbf{u} \in \mathbf{T}^n$ jedno konkrétní *(partikulární)* řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{w}$ je libovolné řešení příslušné homogenní soustavy, pak $A(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{b}$, tj. $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ je také řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

důkaz: protože předpokládáme $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ a $A\mathbf{w} = \mathbf{o}$, platí $A(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{w} = \mathbf{b} + \mathbf{o} = \mathbf{b}$

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic

tvrzení: je-li $\mathbf{u} \in \mathbf{T}^n$ jedno partikulární řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o n neznámých, pak platí
$\{\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} : A\mathbf{w} = \mathbf{o}\}$

důkaz $\subseteq$: je-li $\mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, tj. platí-li $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, pak pro $\mathbf{w} = \mathbf{y} - \mathbf{u}$ platí $A\mathbf{w} = \mathbf{o}$ podle prvního pozorování a $\mathbf{y} = \mathbf{u} + (\mathbf{y} - \mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, tj. $\mathbf{y} \in \{\mathbf{u} + \mathbf{w} : A\mathbf{w} = \mathbf{o}\}$

$\supseteq$: je-li $\mathbf{y} \in \{\mathbf{u} + \mathbf{w} : A\mathbf{w} = \mathbf{o}\}$, platí $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, kde $A\mathbf{w} = \mathbf{o}$; podle druhého pozorování $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ a tedy $\mathbf{y} \in \{\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$

Násobení a transponované matice

tvrzení: jsou-li $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a $B = (b_{jk})_{n\times p}$ matice nad $\mathbf{T}$, pak platí $\quad (AB)^T = B^T A^T$

důkaz: opět použijeme prvkovou definici součinu matic

prvek na místě (i,k) v matici $(AB)^T$ se rovná prvku na místě (k,i) v matici AB a ten se rovná $\sum_{j=1}^n a_{kj} b_{ji}$

prvek na místě (i,k) v součinu $B^T A^T$ se rovná skalárnímu součinu i-tého řádku matice B^T s k-tým sloupcem matice A^T

i-tý řádek matice B^T se rovná i-tému sloupci matice B, který se rovná $\mathbf{b}_i = (b_{1i}, \ldots, b_{ni})^T$,

k-tý sloupec matice A^T se rovná k-tému řádku matice A, tj. rovná se $\tilde{\mathbf{a}}_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})^T$

jejich standardní skalární součin je $\mathbf{b}_i \cdot \tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{b}_i^T \tilde{\mathbf{a}}_k = \sum_{j=1}^n b_{ji} a_{kj}$

Řádky v součinu matic

pro součin matic $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a $B = (b_{jk})_{n\times p}$ máme zatím

sloupcovou definici: $AB = A(\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2|\cdots|\mathbf{b}_p) = (A\mathbf{b}_1|A\mathbf{b}_2|\cdots|A\mathbf{b}_p)$

prvkovou definici: $AB = (\tilde{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{b}_k) = (\tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{b}_k)$

ukážeme si ještě řádkovou definici součinu matic

i-tý řádek v součinu AB je transponovaný k i-tému sloupci v matici $(AB)^T$

díky rovnosti $(AB)^T = B^T A^T$ můžeme k výpočtu i-tého sloupce v $(AB)^T$ použít sloupcovou definici součinu $B^T A^T$

připomeňme, že $B^T = (\tilde{\mathbf{b}}_1|\tilde{\mathbf{b}}_2|\cdots|\tilde{\mathbf{b}}_n)$ a $A^T = (\tilde{\mathbf{a}}_1|\tilde{\mathbf{a}}_2|\cdots|\tilde{\mathbf{a}}_m)$

platí $B^T A^T = B^T(\tilde{\mathbf{a}}_1|\tilde{\mathbf{a}}_2|\cdots|\tilde{\mathbf{a}}_m) = (B^T\tilde{\mathbf{a}}_1|B^T\tilde{\mathbf{a}}_2|\cdots|B^T\tilde{\mathbf{a}}_m)$

Řádková definice součinu matic

i-tý sloupec v matici $(AB)^T$ se tak rovná $B^T \tilde{\mathbf{a}}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{\mathbf{b}}_j$

i-tý řádek v matici AB je proto
$\tilde{\mathbf{a}}_i^T B = (B^T \tilde{\mathbf{a}}_i)^T = (\sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{\mathbf{b}}_j)^T = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{\mathbf{b}}_j^T$

tvrzení: i-tý řádek v součinu AB se rovná lineární kombinaci řádků matice B s koeficienty v i-tém řádku matice A

řádková definice součinu matic: $AB = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_m^T \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T B \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_m^T B \end{pmatrix}$

příklad potřetí: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$

Ukázky použití součinu matic - obsah

- *Ukázky použití součinu matic*
  - Rovnovážné stavy
  - Rekurentní vztahy
  - Počet cest v grafu

Pružiny

máme čtyři pružiny zavěšené pod sebou

horní a dolní konec je pevný

do spojů mezi pružinami dáme závaží

otázka: jak se změní poloha spojů ?

vektor posunutí spojů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$

vektor prodloužení/zkrácení pružin $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$

vektor vnitřních sil $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ v pružinách,
kterými pružiny působí na jednotlivé spoje

vektor vnějších sil $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ působících v místech spojů

Vztahy mezi vektory

přidáme-li $x_0 = x_4 = 0$ (koncové body jsou pevné),
platí $e_i = x_i - x_{i-1}$ pro $i = 1, 2, 3, 4$

platí $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = A\mathbf{x}$

Hookeův zákon: $y_i = c_i e_i$, $c_i > 0$ je tuhost pružiny

proto $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{e}$

Vyrovnání sil

pružiny působí na i-tý spoj silou $y_i - y_{i+1}$,
kladný směr je vzhůru

tyto síly vyrovnávají vnější síly působící směrem dolů

proto $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = A^T\mathbf{y}$

dostali jsme $\left\{ \begin{array}{c} A\mathbf{x} = \mathbf{e} \\ C\mathbf{e} = \mathbf{y} \\ A^T\mathbf{y} = \mathbf{f} \end{array} \right\}$, neboli $A^TCA\mathbf{x} = \mathbf{f}$

Elektrický obvod

máme obvod se třemi uzly, čtyřmi odpory, spoji, jedním zdrojem napětí a jedním zdrojem proudu

označíme $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ vektor potenciálů, tj. potenciálních energií elektrického pole v jednotlivých uzlech

víme, že napětí mezi dvěma uzly se rovná rozdílu potenciálů v těchto uzlech

proudy procházející jednotlivými odpory popíšeme vektorem $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$

pro řešení obvodu spoje libovolně orientujeme

proud procházející spojem ve směru orientace hrany vyjde kladný, opačným směrem záporný

Napětí na odporech

strukturu obvodu popíšeme maticí incidence

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

napětí na odporu vyjádříme jako rozdíl potenciálů mezi příslušnými uzly, konvence je, že potenciál klesá ve směru procházejícího proudu

v našem případě jsou napětí na jednotlivých odporech, nebereme-li v úvahu zdroje napětí, postupně $x_1 - x_3$, $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$, $x_2 - x_3$

napětí vyjádříme maticově jako $-A_0\mathbf{x}$

Druhý Kirchhoffův zákon (o napětích)

v uzavřeném obvodu se součet napětí na odporech rovná součtu napětí zdrojů

je nutné vzít v úvahu, přispívá-li zdroj napětí kladnému směru proudu ve větvi, kde leží, pak je kladný, nebo zápornému, pak je záporný

v našem případě je záporný

započítáme jej k napětí na odporu ve větvi kde se zdroj nachází, tj. k napětí na R_3

to se tak rovná $-9 + x_2 - x_3$

napětí na odporech popíšeme vektorem $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$

Ohmův zákon

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

možných více zdrojů napětí popíšeme vektorem $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$, pak $\mathbf{e} = \mathbf{b} - A_0\mathbf{x}$

vztah mezi napětím a proudem popisuje Ohmův zákon: *napětí = odpor × proud*

Ohmův zákon zapíšeme maticově

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

První Kirchhofův zákon (o proudech)

pokud označíme C matici převrácených hodnot odporů, dostaneme $\mathbf{y} = C\mathbf{e}$, matice C je diagonální s kladnými prvky na hlavní diagonále

první Kirchhoffův zákon říká, že součet proudů vcházejících do uzlu se rovná součtu proudů vycházejících z uzlu

$-y_1 - y_2 = 0, \ \ y_2 + 1 = y_3 + y_4, \ \ y_1 + y_3 + y_4 = 1$

maticový zápis prvního Kirhchofova zákona je

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soustava rovnic pro obvod

je-li zdrojů proudu více, zapíšeme $A_0^T\mathbf{y} = \mathbf{f}$, kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ je vektor zdrojů proudu

dostali jsme $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e} = \mathbf{b} - A_0\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{e} \\ \mathbf{f} = A_0^T\mathbf{y} \end{array} \right\}$

neboli $A_0^T C A_0\, \mathbf{x} = A_0^T C\mathbf{b} - \mathbf{f}$

součet každého řádku matice A_0 je rovný 0, proto $A_0\mathbf{x} = \mathbf{o}$ pro každý konstantní vektor $\mathbf{x}$

$A_0^T C A_0\, \mathbf{x} = A_0^T C\mathbf{b} - \mathbf{f}$ nemá jednoznačné řešení

jednoznačnosti dosáhneme, pokud předem položíme jeden z potenciálů rovný 0

volbou $x_3 = 0$ „uzemníme“ třetí uzel, z matice A_0 vynecháme třetí sloupec a počítáme pouze x_1, x_2

Fibonacciho posloupnost

Fibonacciho posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je definována prvními dvěma prvky $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a *rekurentním vztahem* $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$ pro každé $i = 0, 1, \ldots$

několik prvních členů posloupnosti: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

otázka: čemu se rovná n-tý člen ?

mezi členy posloupnosti platí vztah $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = CC\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = CC^2\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$

obecně $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$, vyjde $a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$

Jiná úloha na mocnění matic

systém má tři možné stavy

- 1 - funguje
- 2 - nefunguje
- 3 - je v opravě

na obrázku jsou pravděpodobnosti jak se změní stav během jednoho časového úseku

na začátku je ve stavu 1, tj. funguje

$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 & 1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$ je *přechodová matice*

$\mathbf{p}(n) = (p_1(n), p_2(n), p_3(n))^T$, $p_i(n)$ je pravděpodobnost, že je systém v čase n ve stavu i, $\ \mathbf{p}(0) = (1, 0, 0)^T$

$\mathbf{p}(n+1) = A\,\mathbf{p}(n), \quad \mathbf{p}(n) = A^n\,\mathbf{p}(0)$

Možné otázky

ke zodpovězení následujících otázek musíme umět spočítat mocniny A^n

- pokud systém přestane fungovat, jaká je průměrná doba nutná k tomu, aby opět začal fungovat ?
- jaký je celkový podíl času, kdy je systém funkční ?
- jaký je celkový podíl času, kdy je systém v opravě ?

Letecká spojení 1

na obrázku jsou vyznačena letecká spojení mezi městy X_1, X_2, X_3, X_4

otázka: kolik je spojení mezi X_i a X_k s nejvýše třemi přestupy ?

spojení mezi městy X_1, X_2, X_3, X_4 popíšeme maticí

$$A = (a_{ij})_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} = 1$ právě když ex. přímá linka z X_i do X_j; jinak $a_{ij} = 0$

co říká matice $A^2 = (b_{ik})$?

Letecká spojení 2

platí $b_{ik} = a_{i1}a_{1k} + a_{i2}a_{2k} + a_{i3}a_{3k} + a_{i4}a_{4k} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}a_{jk}$

sčítanec $a_{ij}a_{jk} = 1$ právě když $a_{ij} = 1 = a_{jk}$, tj. právě když existuje spoj z X_i do X_j a současně existuje spoj z X_j do X_k

jinak řečeno, $a_{ij}a_{jk} = 1$ právě když existuje spojení z X_i do X_k s přestupem v X_j

b_{ik} se tak rovná počtu cest z X_i do X_k s jedním přestupem

indukcí podle $n \geq 1$ dokážeme, že prvek na místě (i,k) v matici A^{n+1} se rovná počtu spojení z X_i do X_k s přesně n přestupy

odpověď na naši otázku sedí na místě (i,k) v součtu matic $A + A^2 + A^3 + A^4$

Řádkové úpravy pomocí elementárních matic - obsah

Elementární matice

definice: *jednotková matice* řádu n je matice $I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$

jednotková matice je čtvercová matice, která má na hlavní diagonále prvky 1 a mimo ni prvky 0, $I_n = (\mathbf{e}_1|\cdots|\mathbf{e}_n)$

základní vlastnost jednotkových matic je

- pro libovolnou matici A typu $m \times n$ platí $I_m A = A = A I_n$

definice: *elementární matice* řádu n je libovolná matice, kterou dostaneme z matice I_n nějakou elementární řádkovou úpravou

příklady elementárních matic řádu 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efekt násobení elementární maticí zleva

vše je dáno řádkovou definicí součinu matic – i-tý řádek v součinu AB je lineární kombinace řádků pravého činitele B s koeficienty v i-tém řádku levého činitele A

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_3^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_1^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T \\ t\tilde{\mathbf{b}}_3^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T \\ t\tilde{\mathbf{b}}_1^T + \tilde{\mathbf{b}}_3^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T + t\tilde{\mathbf{b}}_3^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_3^T \end{pmatrix}$$

Obecné elementární matice 1

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 & \dots & 1 && \\ && \vdots & \ddots & \vdots && \\ && 1 & \dots & 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& t &&& \\ &&&& \ddots && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

přehození řádků — násobení řádku nenulovým číslem

všechny nevyznačené prvky na hlavní diagonále jsou 1,
všechny nevyznačené prvky mimo hlavní diagonálu jsou 0

Obecné elementární matice 2

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 &&& \\ && \vdots & \ddots && \\ && t & \dots & 1 & \\ &&&&\ddots& \\ &&&&& 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 & \dots & t & \\ &&& \ddots & \vdots & \\ &&&& 1 & \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

přičtení t-násobku jednoho řádku k jinému řádku

všechny ostatní prvky mimo hlavní diagonálu jsou 0,
všechny prvky na hlavní diagonále jsou 1

???

co se stane, vynásobíme-li matici elementární maticí **zprava** ?

Diagonální a trojúhelníkové matice

definice: čtvercová matice $A = (a_{ij})$ se nazývá *diagonální*, pokud má všechny prvky mimo hlavní diagonálu nulové, tj. pokud pro každé $i \neq j$ platí $a_{ij} = 0$

nazývá se *horní trojúhelníková*, pokud má všechny prvky pod hlavní diagonálou nulové, tj. pokud pro každé $i > j$ platí $a_{ij} = 0$

nazývá se *dolní trojúhelníková*, pokud má všechny prvky nad hlavní diagonálou nulové, tj. pokud pro každé $i < j$ platí $a_{ij} = 0$

- matice je diagonální právě když je současně horní i dolní trojúhelníková
- el. matice pro násobení řádku nenulovým číslem je diagonální
- el. matice pro přičtení násobku nějakého řádku k řádku **pod** ním je **dolní** trojúhelníková
- el. matice pro přičtení násobku nějakého řádku k řádku **nad** ním je **horní** trojúhelníková

Součin diagonálních a trojúhelníkových matic

- matice je dolní trojúhelníková právě když matice k ní transponovaná je horní trojúhelníková

tvrzení:

- součin diagonálních matic je diagonální matice
- součin horních trojúhelníkových matic je horní trojúhelníková
- součin dolních trojúhelníkových matic je dolní trojúhelníková

důkaz: $C = AB$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times n}$, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

- je-li $i \neq k$, pak pro každé $j = 1, \dots, n$ platí $i \neq j$ nebo $j \neq k$; potom buď $a_{ij} = 0$ nebo $b_{jk} = 0$, proto $c_{ik} = 0$
- je-li $i > k$, pak pro každé $j = 1, \dots, n$ platí $i > j$ nebo $j > k$; potom buď $a_{ij} = 0$ nebo $b_{jk} = 0$, proto $c_{ik} = 0$
-

Regulární matice - obsah

Invertovatelné matice

základní definice: čtvercová matice A řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$ se nazývá *invertovatelná*, pokud existuje čtvercová matice X řádu n nad $\mathbf{T}$, pro kterou platí $AX = I_n = XA$, matice X se pak nazývá *inverzní matice* k matici A; **označení** inverzní matice: A^{-1}

tvrzení: je-li A invertovatelná matice, pak je inverzní matice k matici A určená jednoznačně

důkaz: jsou-li X, Y inverzní matice k A, pak platí
$X = XI_n = X(AY) = (XA)Y = I_nY = Y$

příklad matice, která není invertovatelná: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Regulární matice

čtvercová matice A řádu n určuje zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$

pro zobrazení $f_{I_n} : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ určené jednotkovou maticí I_n platí $f_{I_n}(\mathbf{x}) = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$

zobrazení f_{I_n} je tedy identické zobrazení $id_{\mathbf{T}^n}$ na množině $\mathbf{T}^n$

je-li A invertovatelná a X inverzní matice k A, pak z $AX = I_n$ plyne $f_A f_X = f_{I_n} = id_{\mathbf{T}^n}$ a z $XA = I_n$ plyne $f_X f_A = f_{I_n} = id_{\mathbf{T}^n}$

f_X je tedy inverzní zobrazení k f_A a proto je zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ určené invertovatelnou maticí A vzájemně jednoznačné podle pozorování na str. 1-41

základní definice: čtvercová matice A řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$ se nazývá *regulární*, pokud určuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$

Regulární $\Leftrightarrow$ invertovatelná

invertovatelná $\Rightarrow$ regulární bylo dokázáno na předchozí straně

regulární $\Rightarrow$ invertovatelná potřebujeme dokázat

je-li A regulární matice řádu n, je zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ vzájemně jednoznačné

to znamená, že pro každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{T}^n$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ takový, že $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

tj. soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má jednoznačné řešení pro každý vektor $\mathbf{b}$

potřebujeme najít matici X řádu n takovou, že $AX = I_n = XA$

Výpočet inverzní matice 1

je-li $AX = I_n$ a $X = (\mathbf{x}_1|\cdots|\mathbf{x}_n)$, pak
$AX = (A\mathbf{x}_1|\cdots|A\mathbf{x}_n) = I_n = (\mathbf{e}_1|\cdots|\mathbf{e}_n)$,
kde vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ jsou prvky kanonické báze v $\mathbf{T}^n$

k nalezení inverzní matice X musíme vyřešit soustavy $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ pro $j = 1, \ldots, n$

z předpokladu, že A je regulární plyne, že všechny tyto soustavy mají jednoznačné řešení

to znamená, že všechny proměnné jsou bázové, žádná volná

pokud $(A|\mathbf{e}_j) \sim (C|\mathbf{b}_j)$ a $(C|\mathbf{b}_j)$ je v *řot*, je v každém sloupci matice C nějaký pivot, všechny řádky matice C jsou tedy nenulové

proto hodnost $r(A) = n$ (a také $r(A|\mathbf{e}_j) = n$, protože $(A|\mathbf{e}_j)$ je řešitelná)

Výpočet inverzní matice 2

místo přímého výpočtu řešení $\mathbf{x}_j$ zpětnou substitucí pokračujeme v el. řádkových úpravách stejně jako na str. 2-23

vynásobením vhodným číslem změníme každý pivot na 1 a pak vynulujeme všechny prvky nad ním (pod ním už nulové jsou)

dostaneme tak $(A|\mathbf{e}_j) \sim (C|\mathbf{b}_j) \sim (I_n|\mathbf{d}_j)$

$\mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j$ je jediné řešení soustavy $(A|\mathbf{e}_j)$, tj. $A\mathbf{d}_j = \mathbf{e}_j$

poslední trik spočívá v tom, že neřešíme soustavy $(A|\mathbf{e}_j)$ každou zvlášť, ale řešíme je všechny najednou

matici $(A|I_n)$ převedeme pomocí *eřú* do tvaru $(I_n|D)$

potom $AD = A(\mathbf{d}_1|\cdots|\mathbf{d}_n) = (A\mathbf{d}_1|\cdots|A\mathbf{d}_n) = (\mathbf{e}_1|\cdots|\mathbf{e}_n) = I_n$

matice D je jediný možný kandidát na A^{-1}, zbývá ověřit $DA = I_n$

Opravdu dostaneme inverzní matici

jestliže $(A|I_n) \sim (I_n|D)$, vyjádříme každou *eřú* pomocí násobení elementární maticí zleva

existují tedy elementární matice $E_1, E_2, \ldots, E_k$ řádu n takové, že $E_k \cdots E_2 E_1 (A|I_n) = (I_n|D)$

nyní stačí uvědomit si, např. pomocí sloupcové definice součinu, že $E_k \cdots E_2 E_1 (A|I_n) = (E_k \cdots E_2 E_1 A | E_k \cdots E_2 E_1 I_n)$

platí tedy $(E_k \cdots E_2 E_1 A | E_k \cdots E_2 E_1 I_n) = (I_n|D)$

z porovnání pravých bloků dostáváme $E_k \cdots E_2 E_1 I_n = D$,
z rovnosti mezi levými bloky pak plyne $E_k \cdots E_2 E_1 A = DA = I_n$

víme už, že $AD = I_n$, matice D je tedy inverzní k A, $A^{-1} = D$

Příklad

najdeme inverzní matici k $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

nevěřící Tomášové si udělají zkoušku:

Shrnutí

důležitá věta: pro čtvercovou matici A řádu n nad $\mathbf{T}$ jsou následující podmínky ekvivalentní

1. A je regulární
2. zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ je na množinu $\mathbf{T}^n$
3. zobrazení f_A je prosté
4. soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{o}$
5. Gaussova eliminace převede A do horní trojúhelníkové matice s nenulovými prvky na hlavní diagonále (tj. bez nulových řádků)
6. A lze převést pomocí *eřú* do matice I_n
7. A je invertovatelná

důkaz:

Vztah inverze a dalších operací

tvrzení: jsou-li A, B regulární/invertovatelné matice stejného řádu n nad $\mathbf{T}$ a $t \in \mathbf{T}$ nenulový prvek, pak platí

- A^{-1} je regulární a $(A^{-1})^{-1} = A$
- A^T je regulární a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- tA je regulární a $(tA)^{-1} = t^{-1}A^{-1}$
- AB je regulární a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

důkaz: stačí vždy ověřit, že matice vpravo je inverzní k té vlevo

Důsledky

důsledek shrnutí: každá elementární matice je regulární/invertovatelná

důkaz: elementární matici E dostaneme z jednotkové jednou *eřú*, ty jsou ale vratné, takže z E dostaneme jednotkovou matici také jednou *eřú*; z podmínky 6. shrnutí plyne, že E je regulární/invertovatelná

důsledky důsledku shrnutí:

- součin elementárních matic je regulární matice
- jsou-li A, B matice typu $m \times n$ a $A \sim B$, pak existuje regulární matice R řádu m taková, že $RA = B$

důkaz: elementární matice jsou regulární a součin regulárních matic je regulární

je-li $A \sim B$, existují elementární matice $E_1, \dots, E_k$ tak, že $E_k \cdots E_1 A = B$ a součin el. matic $E_k \cdots E_1 = R$ je regulární

Shrnutí - druhá část

pokračování důležité věty: pro čtvercovou matici A řádu n nad $\mathbf{T}$ jsou následující podmínky ekvivalentní

7. A je invertovatelná
8. existuje matice X taková, že $AX = I_n$
9. existuje matice Y taková, že $YA = I_n$
10. A lze vyjádřit jako součin elementárních matic

důkaz: víme už, že podmínka 7. je ekvivalentní jakékoliv z podmínek 1.-6.

důsledek: pro matice C, D stejného typu C, D platí $C \sim D$ právě když existuje regulární matice R řádu m taková, že $RC = D$

Příklady inverzních matic

pokud chápeme geometrický význam matice A, tj. zobrazení f_A, můžeme napsat inverzní matici přímo

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

snadno také napíšeme inverzní matice k elementárním maticím

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gaussova eliminace bez prohazování řádků

v případě některých regulárních matic se při Gaussově eliminaci obejdeme bez prohazování řádků, protože pivoty vycházejí nenulové

řešíme soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -8 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -8 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

dostali jsme ekvivalentní soustavu $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ s horní trojúhelníkovou maticí U, kde $(U|\mathbf{c}) = GFE(A|\mathbf{b})$ pro nějaké el. matice E, F, G

Od A k U a zpět

platí $U = (GFE)A$ a $\mathbf{c} = GFE\,\mathbf{b}$, kde

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

elementární matice jsou regulární, takže $A = (E^{-1}F^{-1}G^{-1})U$ a

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{1} & 0 & 1 \end{pmatrix}, G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}$$

spočteme $E^{-1}F^{-1}G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & 1 \end{pmatrix} = L$

LU-rozklad

dostali jsme tak vyjádření $A = LU$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L je dolní trojúhelníková matice s jednotkami na hlavní diagonále, U je horní trojúhelníková matice s pivoty na hlavní diagonále

pokud při Gaussově eliminaci regulární matice nepoužíváme přehazování řádků, je rozklad $A = LU$ záznamem o proběhlé GE

U je výsledek Gaussovy eliminace použité na A

L obsahuje informace o tom, jaké násobky řádků jsme odečítali od řádků pod nimi

Využití LU-rozkladu

řešíme soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s regulární maticí A

známe LU rozklad matice A: $A = LU$

řešení soustavy $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rozdělíme na řešení dvou soustav

napřed vyřešíme soustavu $L\mathbf{c} = \mathbf{b}$ s dolní trojúhelníkovou maticí L, *přímou substitucí* najdeme vektor $\mathbf{c}$

potom vyřešíme soustavu $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ *zpětnou substitucí*

platí $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = L\mathbf{c} = \mathbf{b}$, takto nalezené $\mathbf{x}$ řeší soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

tento postup je mimořádně výhodný, pokud potřebujeme řešit soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro různá $\mathbf{b}$, ale se stejnou maticí soustavy A

jednou Gaussovo eliminací najdeme rozklad $A = LU$

pak už vystačíme jenom s přímou a zpětnou substitucí

Inverzní matice k trojúhelníkovým maticím

pro regulární matici A platí

- je-li A diagonální, pak je A^{-1} také diagonální,
- je-li A dolní trojúhelníková, pak je A^{-1} také dolní trojúhelníková,
- je-li A horní trojúhelníková, pak je A^{-1} také horní trojúhelníková

důkaz: ukážeme jenom druhé tvrzení

při Gaussově eliminaci dolní trojúhelníkové matice A vystačíme pouze s přičítáním násobků nějakého řádku k řádkům pod ním, používáme elementární matice, které jsou dolní trojúhelníkové

dostaneme diagonální matici, vhodnými násobky řádků ji upravíme na jednotkovou, příslušné elementární matice jsou diagonální

platí tedy $E_k \cdots E_1 A = I_n$, kde $E_1, \dots, E_k$ jsou dolní trojúhelníkové matice, $A^{-1} = E_k \cdots E_1$ je proto také dolní trojúhelníková

Věta o LU-rozkladu

je-li A regulární matice řádu n, u které při Gaussově eliminaci nemusíme prohazovat řádky, pak existují jednoznačně určené matice L a U řádu n, pro které platí

- $A = LU$
- L je dolní trojúhelníková s jednotkami na hlavní diagonále
- U je horní trojúhelníková s nenulovými prvky na hlavní diagonále

důkaz: protože A je regulární, Gaussova eliminace ji převede do horní trojúhelníkové matice U s nenulovými prvky na hlavní diagonále - podmínka 5. shrnutí na str. 4-67

$E_k \cdots E_2 E_1 A = U$ pro nějaké el. matice, které jsou všechny dolní trojúhelníkové s jednotkami na hlavní diagonále, tedy $E_k \cdots E_2 E_1$ je také dolní trojúhelníková s jednotkami na hlavní diagonále

potom $A = LU$, kde $L = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1}$ je dolní trojúhelníková matice s jednotkami na hlavní diagonále

Důkaz jednoznačnosti LU-rozkladu

jsou-li $A = L_1 U_1$ a $A = L_2 U_2$ dva LU-rozklady matice A, platí

$L_1 U_1 = L_2 U_2$, tj. $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$

matice $L_2^{-1} L_1$ je dolní trojúhelníková s jednotkami na hlavní diagonále

matice $U_2 U_1^{-1}$ je horní trojúhelníková

matice $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$ je tedy diagonální s jednotkami na hlavní diagonále

proto $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I_n$, tj. $L_1 = L_2$ a $U_1 = U_2$

Poznámky

- mnohé matice vznikající při řešení praktických úloh mají LU-rozklad, patří mezi ně matice typu $A^T C A$, které jsme dostali při řešení úlohy o pružinách nebo u elektrického obvodu
- později si ukážeme, že čtvercová matice A má LU-rozklad právě tehdy, když každý hlavní minor matice A je regulární
- ne každá regulární matice má LU-rozklad, nejjednodušší příklad je $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- pro každou regulární matici A řádu n existuje *permutační matice* P (permutační matice je matice, která má v každém řádku a každém sloupci právě jeden prvek rovný 1 a ostatní nulové), pro kterou platí, že PA má LU-rozklad
- permutační matice v součinu PA přehazuje řádky A
- jakým způsobem je třeba přeházet řádky A tak, aby existoval LU-rozklad $PA = LU$, zjistíme v průběhu Gaussovy eliminace

Inverze zprava a zleva - obsah

- *Inverze zprava a zleva*
  Charakterizace
  Význam existence jednostranných inverzí

Matice inverzní zprava

tvrzení: pro matici A typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ je ekvivalentní

- existuje matice X taková, že $AX = I_m$
- zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ je na $\mathbf{T}^m$

důkaz $\Downarrow$: pokud existuje X taková, že $AX = I_m$, musí být X typu $n \times m$

X určuje $f_X : \mathbf{T}^m \to \mathbf{T}^n$ a platí $f_A f_X = f_{AX} = f_{I_m} = id_{T^m}$

podle pozorování na str. 1-40 je zobrazení f_A na $\mathbf{T}^m$

$\Uparrow$: protože $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ je na $\mathbf{T}^m$, existuje pro každý prvek $\mathbf{e}_j$ kanonické báze v $\mathbf{T}^m$ prvek $\mathbf{x}_j \in \mathbf{T}^n$ takový, že $f_A(\mathbf{x}_j) = A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$

vektory $\mathbf{x}_j$ srovnáme do sloupců matice $X = (\mathbf{x}_1|\cdots|\mathbf{x}_m)$, pak platí

$AX = A(\mathbf{x}_1|\cdots|\mathbf{x}_m) = (A\mathbf{x}_1|\cdots|A\mathbf{x}_m) = (\mathbf{e}_1|\cdots|\mathbf{e}_m) = I_m$

Matice inverzní zleva

tvrzení: pro matici A typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ je ekvivalentní

- existuje matice X taková, že $XA = I_n$
- zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ je prosté

důkaz $\Downarrow$: pokud existuje X taková, že $XA = I_n$, musí mít typ $n \times m$

platí $f_X f_A = f_{XA} = f_{I_n} = id_{\mathbf{T}^n}$, zobrazení f_A je tedy prosté (viz 1-82)

$\Uparrow$: je-li zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ prosté, má soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{o}$; všechny proměnné $x_1, \dots, x_n$ jsou proto bázové

Gaussova eliminace převede A do *řot* C, tj. $A \sim C$, prvních n řádků v C je nenulových, všechny ostatní jsou nulové

stejně jako v algoritmu pro hledání inverzní matice změníme pomocí *eřú* všechny pivoty na 1 a vynulujeme prvky nad nimi

platí tedy $A \sim \begin{pmatrix} I_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{pmatrix}$ a $E_k \cdots E_1 A = \begin{pmatrix} I_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{pmatrix}$ pro vhodné el. matice $E_1, \dots, E_k$

X tvoří prvních n řádků matice $E = E_k \cdots E_1$, ta splňuje $XA = I_n$

Matice pro úlohy měření

nechť $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ je úloha na měření, A je matice typu $m \times n$

hodnoty $y_1, \dots, y_m$ můžeme měřit a z naměřených hodnot počítáme neznámé hodnoty $x_1, \dots, x_n$

dobře navržený systém měření, tj. matice A, musí mít tu vlastnost, že příslušné zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je prosté

pokud by pro dva různé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ platilo $A\mathbf{u} = A\mathbf{v}$, pro nenulový vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ a libovolné reálné číslo t by platilo $A(t\mathbf{w}) = t(A\mathbf{w}) = tA(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = t(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}) = t\mathbf{o} = \mathbf{o}$

uvnitř prověřovaného systému by se cosi dělo a všechny přístroje by byly na 0; proto je nutné, aby $m \geq n$

systém měření musí být také odolný vůči poruchám měření

porouchané čidlo (řádek v A) vynecháme a stále by mělo být $m \geq n$

u úloh na měření je typicky $m >> n$, matice A jsou „hubené“

Matice pro úlohy řízení

je-li A je matice typu $m \times n$ a $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ úloha řízení, můžeme měnit hodnoty proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a snažíme se dosáhnout předem daných hodnot proměnných $y_1, \ldots, y_m$

v takovém případě je dobré, aby zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bylo na, aby každého možného stavu $(y_1, \ldots, y_m)^T$ šlo dosáhnout

k tomu je třeba, aby platilo $m \leq n$

chceme-li mít více než jednu možnost jak volbou hodnot proměnných $x_1, \ldots, x_n$ dosáhnout stavu $y_1, \ldots, y_m$, je třeba aby platilo $m < n$

typická matice pro úlohy řízení má více sloupců než řádků, je „tlustá“

tak jako matice pro řízení pohybu hlavy disku

Matice - shrnutí

- **základní**: součet matic a skalární násobek matice, jejich vlastnosti
- **základní**: součin matic, sloupcová, prvková a řádková definice
- **základní**: asociativita součinu matic, distributivita součinu matic vzhledem k jejich sčítání
- **základní**: motivace součinu matic pomocí vztahu mezi složením zobrazení určených maticemi a zobrazením určeným jejich součinem
- **základní**: invertovatelné a regulární matice, nejrůznější ekvivalentní definice, i z pozdějších kapitol
- **důležité**: matice jednoduchých geometrických zobrazení v rovině
- **důležité**: vztah mezi množinou všech řešení soustavy lineárních rovnic a množinou všech řešení příslušné homogenní soustavy

Matice - shrnutí

- **důležité**: transponovaná matice k součinu matic
- **důležité**: elementární matice, jejich souvislost s elementárními řádkovými úpravami matice
- **důležité**: diagonální a trojúhelníkové matice, jejich součin, inverzní matice k regulárním trojúhelníkovým maticím
- **důležité**: inverzní matice k součinu regulárních matic, transponovaná matice k regulární matici
- **důležité**: matice inverzní zleva a zprava k maticím, které nejsou čtvercové
- **pro zajímavost**: sestavení soustavy rovnic pro rovnovážné stavy (pružiny, elektrický obvod)
- **pro zajímavost**: úlohy vedoucí na umocňování matice
- **pro zajímavost**: Gaussova eliminace bez prohazování řádků, LU-rozklad matice a jeho jednoznačnost

Kapitola 5

Vektorové prostory

Vektorové prostory - obsah

- *Pojem vektorového prostoru*
- *Podprostory*
- *Lineární obal*
- *Lineární nezávislost*
- *Dimenze*

Pojem vektorového prostoru - obsah

- *Pojem vektorového prostoru*
  Motivace
  Definice vektorového prostoru

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic 1

na str. 2-43 jsme vyjádřili libovolné řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s maticí soustavy A typu $m \times n$ ve tvaru

$$\mathbf{u} + \sum_{p \in P} t_p \mathbf{v}_p,$$

kde $P \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina indexů všech volných (nebázových) proměnných

vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{T}^n$ je jedno partikulární řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

vektory $\mathbf{v}_p$, $p \in P$, jsou nějaká řešení homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$

skutečnost, že jejich lineární kombinace $\sum_{p \in P} t_p \mathbf{v}_p$ je také řešením homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, plyne z jednoduchého porování

pozorování: jsou-li vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{T}^n$ řešením homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ a $s, t \in \mathbf{T}$, pak $r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ je také řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$

důkaz:

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic 2

ukázali jsme tak znovu, že každé řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ můžeme vyjádřit jako součet $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ jednoho partikulárního řešení $\mathbf{u}$ této soustavy a nějakého řešení $\mathbf{w}$ homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$

oproti tvrzení na str. 4-32 navíc víme, že množina všech řešení homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ se rovná množině všech lineárních kombinací

$$\left\{ \sum_{p \in P} t_p \mathbf{v}_p : t_p \in \mathbf{T} \right\}$$

nějakých vektorů $\mathbf{v}_p$, $p \in P$

jak efektivní je toto vyjádření množiny všech řešení homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ a tedy také obecné soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

je množina všech řešení vždy přímka, pokud má soustava jednu volnou proměnnou ?

je to vždy rovina, pokud má soustava dvě volné proměnné ?

Lineární kombinace matic, funkcí, posloupností, apod.

matice stejného typu můžeme sčítat a násobit číslem

můžeme proto zkoumat také lineární kombinace matic, výrazy typu

$$t_1 A_1 + t_2 A_2 + \cdots + t_k A_k$$

ve *Fourierově analýze* je důležité zjistit, s jakou přesností lze reálnou funkci $f(x)$ jedné reálné proměnné vyjádřit jako součet

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{k} a_n \sin nx + \sum_{n=0}^{k} b_n \cos nx$$

periodických funkcí

víme také, že jsou-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní posloupnosti reálných čísel, pak

$$s(a_n)_{n=1}^{\infty} + t(b_n)_{n=1}^{\infty} = (sa_n + tb_n)_{n=1}^{\infty}$$

je rovněž konvergentní posloupnost

Sčítání a skalární násobek

abychom mohli počítat s lineárními kombinacemi matic, funkcí, posloupností, musíme umět matice, funkce, posloupnosti sčítat

sčítání je vždy binární operace – součet matic stejného typu je opět matice téhož typu, součet reálných funkcí jedné reálné proměnné je opět reálná funkce jedné reálné proměnné, atd.

dále musíme umět násobit matice, funkce, posloupnosti číslem, součin čísla s maticí je opět matice, součin čísla s funkcí je funkce, součin čísla s posloupností je posloupnost, atd.

čísla budou vždy prvky nějakého tělesa, budeme jim říkat *skaláry*

součin skaláru s maticí **není binární operace** – násobíme různé věci, číslo s maticí, číslo s funkcí, číslo s posloupností, apod.

proto také mluvíme o *skalárním násobku* matice, vektoru, funkce, místo o součinu

Základní definice - definice vektorového prostoru

vektorový prostor $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ je množina V spolu s binární operací $+$ sčítání prvků V a skalárním násobením $\cdot$ prvků tělesa T s prvky množiny V, které mají následující vlastnosti

(vS1) pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(vS2) existuje prvek $\mathbf{o} \in V$ takový, že pro každé $\mathbf{u} \in V$ je $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$

(vS3) pro každé $\mathbf{u} \in V$ existuje $-\mathbf{u} \in V$ takové, že $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$

(vS4) pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(vN1) pro každé $\mathbf{u} \in V$ a každé $r, s \in T$ platí $r \cdot (s \cdot \mathbf{u}) = (r \cdot s) \cdot \mathbf{u}$

(vN2) pro každé $\mathbf{u} \in V$ platí $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(vD1) pro každé $\mathbf{u} \in V$ a každé $r, s \in T$ je $(r + s) \cdot \mathbf{u} = r \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{u}$

(vD2) pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a každé $r \in \mathbf{T}$ platí $r \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}$

prvky množiny $\mathbf{V}$ nazýváme *vektory*, prvky tělesa $\mathbf{T}$ jsou *skaláry*

Příklady vektorových prostorů

- množina T^n všech n-složkových aritmetických vektorů nad tělesem $\mathbf{T}$ s běžnými operacemi sčítání aritmetických vektorů a jejich násobení prvkem $t \in T$; tento prostor nazýváme *aritmetický vektorový prostor* dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ a označujeme jej $\mathbf{T}^n$
- množina $Ker\,A$ všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, kde A je matice typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$, s operacemi sčítání aritmetických vektorů a jejich násobení skalárem z $\mathbf{T}$; všimněte si, že $Ker\,A \subseteq \mathbf{T}^n$
- množina $T^{m \times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ s operacemi sčítání matic a násobení matic skalárem $t \in \mathbf{T}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, označujeme jej $\mathbf{T}^{m \times n}$
- množina všech reálných polynomů s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

Další příklady vektorových prostorů

- množina všech reálných funkcí $f : X \to \mathbb{R}$ s operacemi $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ a $(rf)(x) = r \cdot f(x)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ pro každou množinu X
- je-li $X = \mathbb{N}$, jde o množinu všech posloupností reálných čísel s obvyklými operacemi sčítání posloupností a násobení posloupnosti reálným číslem
- množina všech konvergentních posloupností reálných čísel s obvyklými operacemi
- množina všech spojitých funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s obvyklými operacemi sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem
- množina všech diferencovatelných funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s obvyklými operacemi
- množina všech reálných funkcí jedné reálné proměnné, které mají spojité derivace všech řádů, s obvyklými operacemi
- atd., atd.

Jednoduché vlastnosti vektorových prostorů

následující vlastnosti vektorových prostorů budeme používat automaticky

tvrzení: v každém vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ platí

- nulový prvek $\mathbf{o}$ je určen jednoznačně,
- rovnice $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ má pro pevná $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ právě jedno řešení,
- opačný prvek $-\mathbf{v}$ je prvkem $\mathbf{v}$ určen jednoznačně,
- $0\mathbf{v} = \mathbf{o}$ pro libovolný prvek $\mathbf{v} \in V$
- $a\mathbf{o} = \mathbf{o}$ pro libovolný skalár $a \in T$
- je-li $a\mathbf{v} = \mathbf{o}$, pak buď $a = 0$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$
- $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ pro každý prvek $\mathbf{v} \in V$, speciálně $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$

Podprostory - obsah

Vektorový prostor podmnožinou jiného

u některých příkladů vektorových prostorů je jeden podmnožinou druhého

množina všech konvergentních posloupností reálných čísel je podmnožinou množiny všech posloupností reálných čísel

množina všech spojitých reálných funkcí jedné reálné proměnné je podmnožinou množiny všech reálných funkcí jedné reálné proměnné

množina všech diferencovatelných funkcí jedné reálné proměnné je podmnožinou množiny všech spojitých reálných funkcí

množina *Ker A* všech řešení homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ s maticí soustavy typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ je podmnožinou aritmetického prostoru $\mathbf{T}^n$ všech n-složkových aritmetických vektorů nad $\mathbf{T}$

množina všech reálných polynomů stupně nejvýše n je podmnožinou množiny všech reálných polynomů

Definice podprostoru

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $U \subseteq V$ neprázdná podmnožina V taková, že

- kdykoliv $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, pak také $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$,
- kdykoliv $\mathbf{u} \in U$ a $r \in \mathbf{T}$, pak také $r\mathbf{u} \in U$

pak množina U spolu s operacemi sčítání vektorů a skalárního násobku převzatými z $\mathbf{V}$ je vektorový prostor

důkaz: sčítání je binární operace na U, neboť $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ pro každé prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$; skalární násobek $r\mathbf{u} \in U$ pro každé $\mathbf{u} \in U$ a $r \in \mathbf{T}$
axiomy vektorového prostoru jsou splněné pro prvky množiny U, protože jsou splněné pro prvky V a operace v U jsou operace ve $\mathbf{V}$ zúžené na U

definice: říkáme, že vektorový prostor $\mathbf{U}$ je *podprostor* vektorového prostoru $\mathbf{V}$, pokud je $U \subseteq V$ a operace v $\mathbf{U}$ jsou zúžením (pocházejí z) operací ve $\mathbf{V}$; **značení**: $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$

Některé zřejmé podprostory

každý vektorový prostor $\mathbf{V}$ má dva *triviální podprostory*, jedním je jednoprvkový (*nulový*) prostor $\{\mathbf{o}\}$ a druhým celý prostor $\mathbf{V}$

pokud nějaký podprostor $\mathbf{U}$ prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ obsahuje nějaký nenulový vektor $\mathbf{u}$, musí obsahovat všechny jeho skalární násobky $r\mathbf{u}$ pro každé $r \in \mathbf{T}$

množina $\{r\mathbf{u} : r \in \mathbf{T}\}$ je uzavřená

- na sčítání, neboť $r\mathbf{u} + s\mathbf{u} = (r+s)\mathbf{u}$ pro každé $r, s \in \mathbf{T}$
- a na skalární násobky, neboť $t(r\mathbf{u}) = (tr)\mathbf{u}$ pro každé $r, t \in \mathbf{T}$

je proto podprostorem $\mathbf{V}$, tj. $\{r\mathbf{u} : r \in \mathbf{T}\} \leq \mathbf{V}$ pro každé $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$

každý nenulový podprostor $\mathbf{U}$ prostoru $\mathbf{V}$ tak s každým prvkem $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ musí obsahovat celý podprostor $\{r\mathbf{u} : r \in \mathbf{T}\}$

Podprostory $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

v případě prostoru $\mathbb{R}^2$ a vektoru $\mathbf{o} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ tvoří podprostor $\{r\mathbf{u} : r \in \mathbf{T}\}$ přímku procházející počátkem a vektorem $\mathbf{u}$

pokud podprostor $\mathbf{U} \leq \mathbb{R}^2$ obsahuje kromě přímky $\{r\mathbf{u} : r \in \mathbb{R}\}$ ještě nějaký další vektor $\mathbf{v} \notin \{r\mathbf{u} : r \in \mathbb{R}\}$, musí obsahovat také celou přímku $\{s\mathbf{v} : s \in \mathbb{R}\}$
musí proto obsahovat také všechny vektory $\{r\mathbf{u} + s\mathbf{v} : r, s \in \mathbb{R}\}$ a tedy celou rovinu $\mathbb{R}^2$

podobně nahlédneme, že jediné netriviální podprostory $\mathbb{R}^3$ jsou přímky a roviny procházející počátkem

Jádro matice

definice: je-li A matice typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak podprostor $Ker\,A = \{\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$ aritmetického prostoru $\mathbf{T}^n$ nazýváme *jádro matice A* nebo také *nulový prostor* matice A

jádro matice A je tedy vektorový prostor tvořený všemi řešeními homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$

prostor $Ker\,A^T$ je podprostorem $\mathbf{T}^m$

bývá také nazýván *levý nulový prostor* matice A, neboť pro $\mathbf{y} \in \mathbf{T}^m$ platí $\mathbf{y} \in Ker\,A^T$ právě když $A^T\mathbf{y} = \mathbf{o}$ což je právě když $(A^T\mathbf{y})^T = \mathbf{o}^T$ a to je právě když $\mathbf{y}^T A = \mathbf{o}^T$

Lineární obal - obsah

- *Lineární obal*
  Lineární obal je podprostor
  Sloupcový a řádkový prostor matice

Definice lineárního obalu

viděli jsme, že každý netriviální podprostor $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$ lze popsat jako množinu všech lineárních kombinací jednoho nebo dvou vektorů

na str. 5-5 jsme viděli, že také jádro $Ker\,A$ matice A lze vyjádřit jako množinu všech lineárních kombinací vektorů $\mathbf{v}_p$, $p \in P$

základní definice: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $X \subseteq V$ prvků , pak *lineární obal* množiny X definujeme jako množinu všech možných lineárních kombinací prvků množiny X s koeficienty z tělesa $\mathbf{T}$, tj. jako množinu
$\{r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + \cdots + r_k\mathbf{u}_k : \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in X, r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{T}, k \in \mathbb{N}_0\}$

označení: $\langle X \rangle$, je-li $X = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l\}$ konečná, pak používáme také označení $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l \rangle$ místo $\langle \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l\} \rangle$

otázky: čemu se rovná $\langle \emptyset \rangle$? platí $X \subseteq \langle X \rangle$ pro každou $X \subseteq V$?

Lineární obal je podprostor

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$, pak lineární obal $\langle X \rangle$ libovolné množiny $X \subseteq V$ je podprostor $\mathbf{V}$

důkaz: ukážeme, že množina $\langle X \rangle \subseteq V$ je neprázdná a uzavřená na sčítání i na násobení skalárem a použijeme tvrzení na str. 5-14

vždy $\mathbf{o} \in \langle X \rangle$, v definici $\langle X \rangle$ stačí zvolit $k = 0$

jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dva prvky $\langle X \rangle$, pak $\mathbf{u} = r_1\mathbf{u}_1 + \cdots + r_k\mathbf{u}_k$ a $\mathbf{v} = s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_l\mathbf{v}_l$ pro nějaké prvky $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l \in X$ a skaláry $r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_l \in \mathbf{T}$

potom $\mathbf{u} + \mathbf{v} = r_1\mathbf{u}_1 + \cdots + r_k\mathbf{u}_k + s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_l\mathbf{v}_l \in \langle X \rangle$

rovněž $t\mathbf{u} = (tr_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (tr_k)\mathbf{u}_k \in \langle X \rangle$ pro každý skalár $t \in \mathbf{T}$

definice: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$ a $\langle X \rangle = \mathbf{V}$ pro nějakou množinu $X \subseteq \mathbf{V}$, pak říkáme, že X *generuje* prostor $\mathbf{V}$ nebo také, že X je *množina generátorů* $\mathbf{V}$

Jednoduché vlastnosti lineárního obalu

pozorování: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $X, Y \subseteq V$, pak platí

1. je-li $X \subseteq Y$, pak $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$
2. $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ právě když $X \subseteq \langle Y \rangle$
3. je-li X podprostor $\mathbf{V}$, pak $X = \langle X \rangle$
4. množina $X \subseteq V$ je podprostor $\mathbf{V}$ právě když platí $\langle X \rangle = X$
5. $\langle X \rangle$ je „nejmenší“ podprostor $\mathbf{V}$ obsahující X

Lineární obal konečné posloupnosti prvků $\mathbf{V}$

v posloupnosti $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l)$ se mohou některé prvky opakovat, v množině $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$ je každý prvek nejvýše jednou

tvrzení: je-li $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l)$ posloupnost prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$, pak $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle = \{r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_l\mathbf{v}_l : r_1, \dots, r_l \in \mathbf{T}\}$

důkaz $\supseteq$: je-li $\mathbf{u} = r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_l\mathbf{v}_l$, pak každý prvek $\mathbf{v}_i \in \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$ a tedy $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$ podle definice lineárního obalu

$\subseteq$: je-li $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$, pak $\mathbf{u} = s_1\mathbf{u}_1 + \cdots + s_k\mathbf{u}_k$, kde $\mathbf{u}_i \in \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$ pro každé $i = 1, \dots, k$

pokud $\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_q = \mathbf{v}_j$ pro nějaké $p, q \in \{1, \dots, k\}$ nahradíme sčítance $s_p\mathbf{u}_p$ a $s_q\mathbf{u}_q$ jejich součtem $(s_p + s_q)\mathbf{v}_j$

takto postupně upravíme součet $\mathbf{u} = s_1\mathbf{u}_1 + \cdots + s_k\mathbf{u}_k$ do tvaru $\mathbf{u} = t_{i_1}\mathbf{v}_{i_1} + \cdots + t_{i_m}\mathbf{v}_{i_m}$, kde prvky $\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_m}$ jsou navzájem různé

do poslední sumy přidáme sčítance $0\mathbf{v}_j$ pro všechna $j \neq i_1, \dots, i_m$

Sloupcový a řádkový prostor matice

základní definice: *sloupcový prostor* matice $A = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n)$ typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ je lineární obal $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ posloupnosti jejích sloupcových vektorů, **značení**: $Im\,A$

řádkový prostor matice A je prostor $Im\,A^T$, tj. lineární obal $\langle \tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_m \rangle$ posloupnosti řádkových vektorů matice A

podle tvrzení na předchozí str. 5-22 se lineární obal $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ rovná množině všech možných lineárních kombinací $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ sloupcových vektorů A, tj. $Im\,A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{T}^n\} = \{f_A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{T}^n\}$

sloupcový prostor matice A se proto také nazývá *obor hodnot* matice A

řádkový prostor matice A se pak nazývá obor hodnot matice A^T

Příklady 1

Pro reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

sloupcový prostor $Im\,A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

řádkový prostor $Im\,A^T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

příklad: jak poznáme, že $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T \in Im\,A$?

řešení: platí $(b_1, b_2)^T \in Im\,A$ právě když existují koeficienty $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

což platí právě když soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je řešitelná

Příklady 2

v prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ reálných čtvercových matic řádu 2 se

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ rovná:

v prostoru polynomů s reálnými koeficienty se lineární obal $\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ rovná:

v prostoru polynomů stupně nejvýše 3 s reálnými koeficienty se $\langle 1 - x^2, x - x^3 \rangle$ rovná:

v prostoru všech posloupností reálných čísel označme $e_i = (\delta_{in})_{n=1}^{\infty}$ pro $i \in \mathbb{N}$; lineární obal $\langle \{e_i; i \in \mathbb{N}\} \rangle$ se rovná:

Čtyři základní prostory určené maticí

každá matice A typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ definuje čtyři prostory:

$\mathit{Ker}\,A$ a $\mathit{Im}\,A^T$ jsou podprostory aritmetického prostoru $\mathbf{T}^n$

$\mathit{Ker}\,A^T$ a $\mathit{Im}\,A$ jsou podprostory aritmetického prostoru $\mathbf{T}^m$

řešení soustavy lineárních rovnic jsme našli pomocí *eřú*

víme, že *eřú* nemění množinu řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$

nemění proto ani jádro/nulový prostor $\mathit{Ker}\,A$ matice A

provést posloupnost *eřú* na matici A je totéž jako ji vynásobit zleva regulární maticí

Vliv elementárních řádkových úprav na prostory matice

tvrzení: je-li A matice typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ a R regulární matice řádu m, pak platí

- $\mathit{Ker}\,A = \mathit{Ker}\,(RA)$, tj. *eřú* nemění jádro matice
- $\mathit{Im}\,A^T = \mathit{Im}\,(RA)^T$, tj. *eřú* nemění řádkový prostor matice

důkaz: ukážeme napřed, že $\mathit{Ker}\,A \subseteq \mathit{Ker}\,(RA)$

je-li $\mathbf{x} \in \mathit{Ker}\,A$, pak $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, a tedy také $RA\mathbf{x} = \mathbf{o}$, tj. $\mathbf{x} \in \mathit{Ker}\,(RA)$;

protože R^{-1} je také regulární matice, plyne z právě dokázané inkluze $\mathit{Ker}\,(RA) \subseteq \mathit{Ker}\,(R^{-1}RA) = \mathit{Ker}\,A$

druhé tvrzení plyne z řádkové definice součinu matic

každý řádek v součinu RA je lineární kombinací řádků matice A a tedy leží v $\mathit{Im}\,A^T$, proto $\mathit{Im}\,(RA)^T \subseteq \mathit{Im}\,A^T$

tedy také $\mathit{Im}\,A^T = \mathit{Im}\,(R^{-1}RA)^T \subseteq \mathit{Im}\,(RA)^T$

Vliv elementárních sloupcových úprav na prostory matice

elementární řádkové úpravy **mění** levý nulový prostor $\mathit{Ker}\,A^T$ a sloupcový prostor $\mathit{Im}\,A$ matice A; platí ale

tvrzení: je-li A matice typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ a R regulární matice řádu n, pak platí

- $\mathit{Ker}\,A^T = \mathit{Ker}\,(AR)^T$, tj. *esú* nemění levý nulový prostor
- $\mathit{Im}\,A = \mathit{Im}\,(AR)$, tj. *esú* nemění sloupcový prostor

důkaz: lze postupovat jako v důkazu předchozího tvrzení

nebo předchozí tvrzení využijeme; víme už také, že R^T je regulární matice, že $(AR)^T = R^T A^T$, a že $(A^T)^T = A$

proto $\mathit{Ker}\,(AR)^T = \mathit{Ker}\,(R^T A^T) = \mathit{Ker}\,A^T$

také $\mathit{Im}\,A = \mathit{Im}\,(A^T)^T = \mathit{Im}\,(R^T A^T)^T = \mathit{Im}\,((AR)^T)^T = \mathit{Im}\,(AR)$

Lineární nezávislost - obsah

- *Lineární nezávislost*
  Definice lineární (ne)závislosti
  Lineární (ne)závislost posloupnosti sloupcových vektorů matice
  Steinitzova věta o výměně

Naprosto základní definice

toto je naprosto základní definice: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, pak posloupnost vektorů $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *lineárně závislá*, pokud některý z vektorů $\mathbf{u}_i$ je lineární kombinací zbývajících vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_k$

v opačném případě se posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ nazývá *lineárně nezávislá*

kdy je jednoprvková posloupnost $(\mathbf{u}_1)$ lineárně závislá ?

kdy je dvouprvková posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ lineárně závislá ?

jak je to s prázdnou posloupností ( ) ?

Jednoduché vlastnosti

definovali jsme lineárně závislou nebo nezávislou posloupnost vektorů

nikoliv posloupnost lineárně závislých (nebo nezávislých) vektorů

- každá posloupnost obsahující nulový vektor je lineárně ... ?
- každá posloupnost obsahující jeden vektor na dvou různých místech je lineárně ... ?
- musí každá lineárně závislá posloupnost obsahovat nějaký vektor dvakrát ?
- posloupnost $(\mathbf{u}, \mathbf{v},\ \mathbf{u} +\ \mathbf{v})$ je vždy lineárně ... ?

Ekvivalentní definice lineární závislosti

tvrzení: posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ prvků prostoru $\mathbf{V}$ je lineárně závislá právě když aspoň jeden z prvků $\mathbf{u}_i$ je lineární kombinací předchozích prvků $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}$ této posloupnosti

důkaz $\Rightarrow$: je-li posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ lineárně závislá, platí pro nějaké $i = 1, \dots, k$, že $\mathbf{u}_i = \sum_{j \neq i} a_j \mathbf{u}_j$,

najdeme největší l, pro které je skalár $a_l \neq 0$

je-li $l < i$, platí $\mathbf{u}_i = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_{i-1} \mathbf{u}_{i-1}$

je-li $l > i$, vyjádříme $a_l \mathbf{u}_l = \mathbf{u}_i - \sum_{j<l, j \neq i} a_j \mathbf{u}_j$

poslední rovnost vynásobíme a_l^{-1} a vyjádříme tak $\mathbf{u}_l$ jako lineární kombinaci předchozích prvků $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{l-1}$

$\Leftarrow$: je-li naopak pro nějaký index i prvek $\mathbf{u}_i = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_{i-1} \mathbf{u}_{i-1}$, platí rovněž

$\mathbf{u}_i = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_{i-1} \mathbf{u}_{i-1} + 0\mathbf{u}_{i+1} + \dots + 0\mathbf{u}_k$

Ekvivalentní definice lineární nezávislosti

posloupnost matic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

je lineárně ......?

tvrzení z přechozího slajdu lze formulovat také jako ekvivalentní podmínku lineární nezávislosti

tvrzení: posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ vektorů prostoru $\mathbf{V}$ je lineárně nezávislá právě když žádný z vektorů $\mathbf{u}_i$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci předchozích prvků této posloupnosti

poznámka 1: lineární závislost nebo nezávislost posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ nezávisí na pořadí prvků v této posloupnosti

poznámka 2: každá podposloupnost lineárně nezávislé posloupnosti je opět lineárně nezávislá

Lineární závislost a nezávislost množin

poznámka 1 říká, že lineární závislost nebo nezávislost posloupnosti prvků $\mathbf{V}$ závisí pouze na prvcích této posloupnosti, nikoliv na jejich pořadí

definice: *konečná množina* $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ se nazývá *lineárně nezávislá*, je-li lineárně nezávislá posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$

nekonečná množina $X \subseteq V$ prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *lineárně nezávislá*, pokud je každá její konečná podmnožina lineárně nezávislá

libovolná množina $X \subseteq V$ se nazývá *lineárně závislá*, pokud není lineárně nezávislá

příklady: množina polynomů $\{x^n; n \in \mathbb{N}\}$ v prostoru všech polynomů s reálnými koeficienty je ......

množina $\{e_i; i \in \mathbb{N}\}$ v prostoru všech posloupností reálných čísel je

Ještě jedna ekvivalentní definice lineární závislosti

definice: lineární kombinace $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_k\mathbf{u}_k$ prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *netriviální*, pokud je aspoň jeden z koeficientů $a_1, \dots, a_k$ různý od 0; lineární kombinace $0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \dots + 0\mathbf{u}_k$ se nazývá *triviální*

tvrzení: posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je lineárně závislá právě když existuje netriviální lineární kombinace $a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$

důkaz $\Rightarrow$: je-li $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ lineárně závislá, pak existuje prvek $\mathbf{u}_i$, který je lineární kombinací ostatních prvků, tj.
$\mathbf{u}_i = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_{i-1}\mathbf{u}_{i-1} + a_{i+1}\mathbf{u}_{i+1} + a_k\mathbf{u}_k$, tj. ex. netriviální *LK* $\quad a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_{i-1}\mathbf{u}_{i-1} + (-1)\mathbf{u}_i + a_{i+1}\mathbf{u}_{i+1} + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$

$\Leftarrow$: je-li netriviální lineární kombinace $a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, aspoň jeden z koeficientů $a_i \neq 0$; potom $a_i\mathbf{u}_i = -\sum_{j \neq i} a_j\mathbf{u}_j$ a tedy $\mathbf{u}_i = -a_i^{-1} \sum_{j \neq i} a_j\mathbf{u}_j$, tj. prvek $\mathbf{u}_i$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů posloupnosti, ta je proto *LZ*

A ještě jedna ekvivalentní definice lineární nezávislosti

poslední tvrzení můžeme ekvivalentně formulovat také takto

tvrzení: posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je lineárně nezávislá právě když z rovnosti $a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$ plyne $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

příklad: ukážeme, že posloupnost matic

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

prvků prostoru $\mathbf{T}^{2\times2}$, je linárně nezávislá; platí-li

$$a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pak $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a tedy $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

A ještě jedna ekvivalentní definice lineární nezávislosti

tvrzení: posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ je lineárně nezávislá právě když každý prvek $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ lze nejvýše jedním způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_k\mathbf{u}_k$ prvků posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$

důkaz $\Rightarrow$: jsou-li $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_k\mathbf{u}_k$ a $\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + \dots + b_k\mathbf{u}_k$ dvě vyjádření $\mathbf{v}$ jako lineární kombinace prvků $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, dostaneme jejich odečtením $\mathbf{o} = (a_1 - b_1)\mathbf{u}_1 + \dots + (a_k - b_k)\mathbf{u}_k$; protože posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je lineárně nezávislá, plyne z tvrzení na přechozím slajdu, že $a_i = b_i$ pro každé $i = 1, \dots, k$

$\Leftarrow$: triviální lineární kombinace $0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$; je-li $a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$ libovolná lineární kombinace, pak z předpokladu jednoznačnosti vyjádření vektoru $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ jako lineární kombinace prvků $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ plyne $a_i = 0$ pro $i = 1, \dots, k$; podle tvrzení na předchozím slajdu je posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ lineárně nezávislá

Lineární nezávislost posloupnosti sloupcových vektorů

tvrzení: je-li $A = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n)$ matice typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak posloupnost $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ sloupcových vektorů matice A je lineárně nezávislá v aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^m$ právě když homogenní soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{o}$

důkaz $\Rightarrow$: je-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, platí $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$; protože posloupnost $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ je lineárně nezávislá, platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ a tedy $\mathbf{x} = \mathbf{o}$

$\Leftarrow$: je-li naopak $s_1\mathbf{a}_1 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$, plyne odtud $A(s_1, \ldots, s_n)^T = s_1\mathbf{a}_1 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$, tj. vektor $(s_1, \ldots, s_n)^T$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$; ta má ale pouze nulové řešení, tedy $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$, což dokazuje, že posloupnost sloupcových vektorů $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ je lineárně nezávislá

srovnání se str. 4-82 a str. 4-83

Lineární závislost posloupnosti sloupcových vektorů

na str. 5-27 jsme dokázali rovnost $Ker\, A = Ker\,(RA)$ pro každou matici A typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ a regulární matici R řádu m

lineární kombinace sloupcových vektorů A $\; s_1\mathbf{a}_1 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$ právě když $\; (s_1, \ldots, s_n)^T \in Ker\, A = Ker\,(RA)$ $\;$ právě když lineární kombinace sloupcových vektorů RA $\; s_1(R\mathbf{a}_1) + \cdots + s_n(R\mathbf{a}_n) = \mathbf{o}$

poslední formulace říká, že nějaká netriviální lineární kombinace sloupců matice A se rovná $\mathbf{o}$ právě když ta samá (tj. se stejnými koeficienty) lineární kombinace sloupců matice RA se rovná $\mathbf{o}$

Důsledky

důsledek 1: sloupcový vektor $\mathbf{a}_i$ matice A lze vyjádřit jako lineární kombinaci předcházejících vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$ právě když sloupcový vektor $R\mathbf{a}_i$ lze vyjádřit jako tutéž lineární kombinaci předchozích sloupcových vektorů $R\mathbf{a}_1, \ldots, R\mathbf{a}_{i-1}$

důsledek 2: posloupnost sloupcových vektorů $(\mathbf{a}_{k_1}, \mathbf{a}_{k_2}, \ldots, \mathbf{a}_{k_r})$ matice A, kde $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$, je lineárně nezávislá právě když posloupnost sloupcových vektorů $(R\mathbf{a}_{k_1}, R\mathbf{a}_{k_2}, \ldots, R\mathbf{a}_{k_r})$ matice RA je lineárně nezávislá

důsledek 3: je-li $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$ a $j \neq k_i$ pro všechna $ki = 1, \ldots, r$, pak platí $\mathbf{a}_j = c_1\mathbf{a}_{k_1} + \cdots + c_r\mathbf{a}_{k_r}$ pro nějaké skaláry $c_1, \ldots, c_r$ právě když $R\mathbf{a}_j = c_1(R\mathbf{a}_{k_1}) + \cdots + c_r(R\mathbf{a}_{k_r})$

Konečně generované prostory

základní definice: vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ nazýváme *konečně generovaný*, pokud existuje konečná množina $X \subseteq V$, která generuje celý prostor $\mathbf{V}$, tj. $\langle X \rangle = \mathbf{V}$

příklady:

- aritmetický prostor $\mathbb{R}^n$ **je** konečně generovaný pro každé $n \in \mathbb{N}$
- aritmetický prostor $\mathbf{T}^n$ **je** konečně generovaný pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé těleso $\mathbf{T}$
- prostor matic $\mathbf{T}^{m\times n}$ **je** konečně generovaný pro každé těleso $\mathbf{T}$ a každé $m, n \in \mathbb{N}$
- prostor všech konvergentních posloupností reálných čísel **není** konečně generovaný
- prostor všech reálných polynomů **není** konečně generovaný
- prostor všech spojitých reálných funkcí jedné reálné proměnné **není** konečně generovaný

Báze

je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$ a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ lineárně nezávislá posloupnost prvků $\mathbf{V}$ taková, že $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \mathbf{V}$, pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_n \rangle \neq \mathbf{V}$

žádná vlastní podposloupnost posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ tak prostor $\mathbf{V}$ negeneruje, viz druhé tvrzení na str. 5-21

toto je naprosto základní definice: posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ se nazývá *báze prostoru* $\mathbf{V}$ pokud je lineárně nezávislá a $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \mathbf{V}$

pozorování: posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}$ právě když lze každý prvek $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinaci $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$

existence vyjádření $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní tomu, že lineární obal $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \mathbf{V}$

jednoznačnost je ekvivalentní lineární nezávislosti posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ podle tvrzení na str. 5-37

Příklady

- posloupnost $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prvků kanonické báze v aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ je báze v $\mathbf{T}^n$;

  posloupnost $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je lineárně nezávislá, neboť z rovnosti $a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = \mathbf{o}$ plyne $(a_1, \dots, a_n)^T = \mathbf{o}$ a tedy $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, pouze triviální LK prvků $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ se rovná $\mathbf{o}$

  dále platí $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle = \mathbf{T}^n$ neboť pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (r_1, \dots, r_n)^T \in \mathbf{T}^n$ je $\mathbf{a} = r_1\mathbf{e}_1 + \cdots + r_n\mathbf{e}_n$
- $((3,3,3)^T)$ je báze v podprostoru $\langle (1,1,1)^T \rangle \leq \mathbb{R}^3$
- co je báze v nulovém prostoru $\{\mathbf{o}\}$?
- navrhněte nějakou bázi v prostoru matic $\mathbf{T}^{2\times 3}$
- navrhněte nějakou bázi v prostoru reálných polynomů stupně nejvýše n

Další příklad

příklad: tvoří posloupnost aritmetických vektorů $((1,1,1)^T, (1,2,3)^T, (4,5,6)^T)$ bázi v prostoru $\mathbb{R}^3$?

řešení: vyjdeme z porozování/ekvivalentní definice na str. 5-42, že posloupnost vektorů $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ tvoří bázi v $\mathbb{R}^3$ právě když lze každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vyjádřit jednoznačně jako lineární kombinaci $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{b}$

napíšeme si vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ do sloupců matice $A = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3)$; pak platí $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{b}$ právě když $A(x_1, x_2, x_3)^T = \mathbf{b}$

posloupnost vektorů $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ je proto báze v $\mathbb{R}^3$ právě když má soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jednoznačné řešení pro každou pravou stranu $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, což je právě když je zobrazení $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzájemně jednoznačné, což je právě když matice A je regulární

regularitu matice můžeme ověřit libovolnou z ekvivalentních podmínek na str. 4-67 a str. 4-70, např. pomocí podmínky 5.

Báze jsou minimální posloupnosti generující prostor

$\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{T}$ a $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \mathbf{V}$ pro nějaké vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{V}$

pokud posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ není lineárně nezávislá, existuje v ní vektor $\mathbf{u}_i$, který je lineární kombinací ostatních vektorů, tj. $\mathbf{u}_i \in \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$

pomocí první a druhé vlastnosti ze str. 5-21 dokážeme, že platí $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \mathbf{V}$

to znamená, že z $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ můžeme vynechat vektor $\mathbf{u}_i$ a zbylé prvky stále generují celý prostor $\mathbf{V}$

tvrzení: je-li $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ minimální posloupnost prvků prostoru $\mathbf{V}$ taková, že $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = \mathbf{V}$, pak je $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ lineárně nezávislá a tedy báze ve $\mathbf{V}$

Důsledek - existence báze

důsledek 1: z každé konečné posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ generující prostor $\mathbf{V}$ lze vybrat bázi

důkaz: mezi všemi podposloupnostmi posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ vybereme nějakou minimální podposloupnost $(\mathbf{u}_{j_1}, \mathbf{u}_{j_2}, \ldots, \mathbf{u}_{j_k})$, která stále ještě generuje prostor $\mathbf{V}$

ta je podle předchozího tvrzení lineárně nezávislá a $\langle \mathbf{u}_{j_1}, \mathbf{u}_{j_2}, \ldots, \mathbf{u}_{j_k} \rangle = \mathbf{V}$, je to tedy báze prostoru $\mathbf{V}$

důsledek 2: každý konečně generovaný vektorový prostor $\mathbf{V}$ obsahuje nějakou bázi

všechny základní poznatky o bázích v konečně generovaných vektorových prostorech plynou z následující důležité věty

Toto je naprosto základní věta

Steinitzova věta o výměně: je-li $\mathbf{V}$ konečně generovaný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost prvků $\mathbf{V}$ a $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ je množina generátorů prostoru $\mathbf{V}$, pak $k \leq n$ a po vhodném přečíslování vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ množina $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ také generuje prostor $\mathbf{V}$

důkaz: budeme postupovat indukcí podle délky k lineárně nezávislé posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$

je-li $k = 0$, pak jistě $0 = k \leq n$ a množina $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ generuje $\mathbf{V}$

nechť $k \geq 1$ a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je daná lineárně nezávislá posloupnost

indukční předpoklad je, že pro lineárně nezávislou posloupnost $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1})$ (ta je lineárně nezávislá coby podposloupnost lineárně nezávislé posloupnosti vektorů) platí $k - 1 \leq n$ a po vhodném přečíslování vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ množina $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ generuje prostor $\mathbf{V}$

Pokračování důkazu Steinitzovy věty o výměně

platí $\mathbf{u}_k \in \mathbf{V} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, tj.

$\mathbf{u}_k = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + a_k\mathbf{v}_k + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ pro nějaké skaláry $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$

kdyby platilo $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$, tj. kdyby $\mathbf{u}_k = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}$, byl by vektor $\mathbf{u}_k$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$, což by bylo ve sporu s lineární nezávislostí posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$

existuje proto nějaké $j \geq k$ takové, že $a_j \neq 0$; potom platí

$$a_j\mathbf{v}_j = -a_1\mathbf{u}_1 \cdots - a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_k - a_k\mathbf{v}_k \cdots - a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} - a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} \cdots - a_n\mathbf{v}_n$$

proto $\mathbf{v}_j \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$

dostáváme tak $\mathbf{V} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle =$
$\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle =$
$\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$

Dimenze - obsah

Důsledek Steinitzovy věty o výměně

tvrzení: v konečně generovaném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ mají libovolné dvě báze stejný počet prvků

důkaz: jsou-li $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ a $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l)$ dvě báze ve $\mathbf{V}$, pak podle Steinitzovy věty $k \leq l$, neboť $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je lineárně nezávislá posloupnost a množina $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$ generuje prostor $\mathbf{V}$

stejně tak je podle Steinitzovy věty $l \leq k$, protože posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l)$ je lineárně nezávislá a množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ generuje prostor $\mathbf{V}$

toto je naprosto základní definice: je-li $\mathbf{V}$ konečně generovaný vektorový prostor nad $\mathbf{T}$ pak *dimenze prostoru* $\mathbf{V}$ je počet prvků libovolné báze prostoru $\mathbf{V}$, **označení**: $\dim(\mathbf{V})$

příklad: $\dim(\mathbf{T}^n) = \dots$, $\dim(\mathbf{T}^{m\times n}) = \dots\dots$ pro každé těleso $\mathbf{T}$ a každé $m, n \in \mathbb{N}$

Další důsledek Steinitzovy věty o výměně

tvrzení: je-li $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l\}$ množina generátorů vektorového prostoru $\mathbf{V}$, pak každou lineárně nezávislou posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ prvků $\mathbf{V}$ lze doplnit na bázi prostoru $\mathbf{V}$ pomocí nějakých prvků z $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l\}$

důkaz: napřed z posloupnosti $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l)$ vybereme bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ postupným vynecháváním prvků, které jsou lineární kombinací ostatních podle Důsledku 1 na str. 5-46; znamená to také, že $\dim(\mathbf{V}) = n$

podle Steinitzovy věty o výměně lze množinu $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ přeuspořádat tak, že posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ generuje prostor $\mathbf{V}$

z této posloupnosti lze vybrat bázi $\mathbf{V}$; pokud bychom nějaký prvek skutečně vynechali, dostali bychom bázi $\mathbf{V}$ s méně než n prvky, což by bylo ve sporu s předchozím důsledkem Steinitzovy věty

proto je posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ báze $\mathbf{V}$

A ještě jeden důsledek Steinitzovy věty

tvrzení: v každém vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ dimenze n platí

1. každá množina generátorů $\mathbf{V}$ obsahuje aspoň n prvků
2. každá n-prvková posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, jejíž prvky generují $\mathbf{V}$, je báze ve $\mathbf{V}$
3. každá *LN* posloupnost ve $\mathbf{V}$ obsahuje nejvýše n prvků
4. každá n-prvková *LN* posloupnost ve $\mathbf{V}$ je báze $\mathbf{V}$

důkaz: 1. ve $\mathbf{V}$ existuje báze s n prvky, ta je *LN* a podle Steinitzovy věty má nejvýše tolik prvků jako libovolná generující množina ve $\mathbf{V}$
2. z každé generující posloupnosti lze vybrat bázi podle důsledku 1. na str. 5-46, tato vybraná báze má n prvků
3. podle Steinitzovy věty má každá *LN* posloupnost nejvýše tolik prvků jako libovolná generující množina, tj. jako libovolná báze
4. každou *LN* posloupnost lze rozšířit do báze podle důsledku Steinitzovy věty na str. 5-51

Čtyři ekvivalentní definice báze

tvrzení: pro posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ prvků vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ jsou následující podmínky ekvivalentní

1. $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze ve $\mathbf{V}$
2. $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je maximální lineárně nezávislá posloupnost ve $\mathbf{V}$
3. $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je minimální posloupnost taková, že $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ generuje $\mathbf{V}$
4. každý prvek $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$

důkaz: 1. $\Leftrightarrow$ 4. viz poznámka po definici báze na str. 5-42

1. $\Rightarrow$ 2.

2. $\Rightarrow$ 3.

3. $\Rightarrow$ 1.

Dimenze podprostoru

věta: každý podprostor $\mathbf{U}$ konečně generovaného vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je také konečně generovaný a platí $\dim(\mathbf{U}) \leq \dim(\mathbf{V})$

důkaz: sporem dokážeme, že $\mathbf{U}$ je konečně generovaný; předpokládejme, že není a dokážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje lineárně nezávislá posloupnost $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ prvků $\mathbf{U}$

protože $\mathbf{U} \neq \langle \emptyset \rangle = \{\mathbf{o}\}$, existuje nenulový prvek $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}$, posloupnost $(\mathbf{u}_1)$ je lineárně nezávislá, což dokazuje případ $k = 1$

pokud pro nějaké $k \geq 1$ existuje *LN* posloupnost $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ prvků $\mathbf{U}$, platí $\mathbf{U} \neq \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$, protože předpokládáme, že $\mathbf{U}$ není konečně generovaný

zvolme $\mathbf{u}_{k+1} \in \mathbf{U} - \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$

Dimenze podprostoru - dokončení důkazu

posloupnost $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1})$ je pak *LN*, neboť žádný z jejích prvků není lineární kombinací předchozích; pro vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ to platí proto, že posloupnost $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je *LN*, pro vektor $\mathbf{u}_{k+1}$ to platí proto, že $\mathbf{u}_{k+1} \notin \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$

ve $\mathbf{V}$ tak existuje libovolně dlouhá *LN* posloupnost prvků $\mathbf{U}$, což je ve sporu se Steinitzovo větou o výměně, neboť v prostoru $\mathbf{V}$ existuje nějaká konečná množina generátorů

$\mathbf{U}$ je tedy konečně generovaný, každá jeho báze je lineárně nezávislá ve $\mathbf{V}$ a má tedy nejvýše tolik prvků jako libovolná báze ve $\mathbf{V}$, neboť ta $\mathbf{V}$ generuje

proto $\dim(\mathbf{U}) \leq \dim(\mathbf{V})$

Gaussova-Jordanova eliminace

definice: matice D typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ je v *redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru*, pokud je v řádkově odstupňovaném tvaru a každý bázový sloupec v D má jedinou nenulovou složku rovnou 1

Gaussova-Jordanova eliminace je postup jak každou matici A převést do redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru pomocí elementárních řádkových úprav

1. napřed Gaussovo eliminací převedeme A do *řot*
2. poté vynásobíme nenulové řádky tak, aby byl každý pivot rovný 1
3. nakonec postupně vynulujeme v každém bázovém sloupci všechny prvky nad pivotem přičítáním vhodných násobků příslušného řádku s pivotem k řádkům nad ním

pozorování: Gaussova-Jordanova eliminace převede libovolnou matici do matice v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru

Bázové sloupce matice

definice: je-li $A = (\mathbf{a}_1 | \cdots | \mathbf{a}_n)$ matice typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$, pak sloupcový vektor $\mathbf{a}_i$ nazýváme *bázový sloupec matice* A pokud $\mathbf{a}_i \notin \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1} \rangle$; ostatní sloupce matice A jsou *nebázové*

tvrzení: posloupnost bázových sloupců matice A tvoří bázi sloupcového prostoru $Im\,(A)$ matice A

důkaz: vynecháme-li z posloupnosti vektorů nějaký vektor lineárně závislý na předchozích, nezměníme tím jejich lineární obal

vyškrtáme-li z posloupnosti $(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n)$ postupně odzadu nebázové sloupce, zůstanou v ní pouze sloupce bázové, které budou i nadále generovat sloupcový prostor $Im\,(A)$

posloupnost bázových sloupců je lineárně nezávislá, protože žádný z nich není lineární kombinací předchozích

je to proto báze prostoru $Im\,(A) = \langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$

Příklad

příklad: najdeme bázové sloupce v reálné matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

pro matice v řádkově odstupňovaném tvaru máme dvě definice bázových sloupců - jedna říká, že jsou to sloupce obsahující pivot, viz str. 2-38, druhá říká, že jsou to sloupce, které nejsou lineární kombinací předchozích, viz předchozí str. 5-57

tvrzení: je-li $D = (\mathbf{d}_1|\cdots|\mathbf{d}_n) = (d_{ij})_{m\times n}$ matice v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru, pak sloupec $\mathbf{d}_j$ obsahuje pivot právě když není lineární kombinací předchozích

Vztahy mezi sloupci

důkaz: matice $D = (d_{ij})_{m\times n}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, existují tedy sloupcové indexy $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_r \le n$ splňující definici na str. 2-30; pivoty jsou prvky na místech (i, k_i) pro $i = 1, \ldots, r$, sloupce obsahující pivoty jsou $\mathbf{d}_{k_i}$ pro $i = 1, \ldots, r$

protože D je v redukovaném *řot*,
platí $\mathbf{d}_{k_i} = \mathbf{e}_i$ pro $i = 1, \ldots, r$;
dále $d_{ij} = 0$ pro $i = 1, \ldots, r$ a $j < k_i$,
$\mathbf{d}_{k_i}$ tedy není *LK* předchozích sloupců

pokud $\mathbf{d}_j$ neobsahuje pivot, platí $j \neq k_i$ pro $i = 1, \ldots, r$
je-li i největší z čísel $1, 2, \ldots, r$ pro které platí $k_i < j$,
je $d_{lj} = 0$ pro $l > i$ a proto $\mathbf{d}_j = d_{1j}\mathbf{e}_1 + d_{2j}\mathbf{e}_2 + \cdots + d_{ij}\mathbf{e}_i$;
proto jsou sloupce neobsahující pivot lineární kombinací předchozích

Příklad

matici A můžeme převést do redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru Gaussovo-Jordanovo eliminací

předchozí tvrzení říká, jaké jsou indexy bázových sloupců v matici, která je v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru

podle důsledku 1 na str. 5-40 jsou to také indexy bázových sloupců v matici A

protože Jordanův dodatek ke Gaussově eliminaci nemění polohu pivotů, stačí převést A do *řot* pouze Gaussovo eliminací

příklad: najdeme ještě jednou bázové sloupce v reálné matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice

tvrzení: dimenze sloupcového prostoru $Im(A)$ matice A se rovná počtu bázových sloupců matice C v řádkově odstupňovaném tvaru, kterou dostaneme z A pomocí *eřú*, a ten se rovná počtu nenulových řádků v matici C

základní definice: je-li A matice nad $\mathbf{T}$, pak dimenzi sloupcového prostoru $Im(A)$ matice A nazýváme *hodnost matice A*;
označení: $rank(A)$ nebo také jenom $r(A)$

hodnost matice A v příkladu na předchozí straně se tedy rovná 2

pozorování: pro každou matici A typu $m \times n$ platí $rank(A) \le n$

Full rank decomposition

matice A na str. 5-60 má dva bázové sloupce, jsou to $\mathbf{a}_2$ a $\mathbf{a}_4$; všechny sloupce matice A jsou jejich lineárními kombinacemi, proto ji můžeme vyjádřit jako součin

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tvrzení: každou matici A typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ s hodností $rank(A) = r$ můžeme vyjádřit jako součin $A = BC$, kde matici B typu $m \times r$ tvoří bázové sloupce matice A a matici C typu $r \times n$ tvoří nenulové řádky matice D v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru, kterou dostaneme z A pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace

Příklad využití full rank decomposition

matici A řádu 1000 s hodností $rank(A) = 100$ m můžeme vyjádřit jako součin $A = BC$, kde B je typu 1000×100 a C je typu 100×1000

pro uložení každé z matic B, C potřebujeme 10^5 hodnot skalárů, zatímco pro uložení matice A potřebujeme 10^6 skalárů, pětkrát více

máme-li spočítat součin $A\mathbf{x}$ pro nějaké $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^{1000}$, potřebujeme k tomu $10^3 \cdot 10^3 = 10^6$ násobení

počítáme-li součin $B(C\mathbf{x})$ potřebujeme pro výpočet $C\mathbf{x}$ celkem 10^5 násobení a pro výpočet $B(C\mathbf{x})$ dalších 10^5 násobení (aritmetický vektor $C\mathbf{x}$ má 100 složek)

k nalezení matic B, C potřebujeme provést Gaussovo-Jordanovo eliminaci na matici A; eliminace jednoho sloupce Gaussovo eliminací vyžaduje nejvýše $10^3 \cdot 10^3$ násobení

protože $rank(A) = 100$, stačí 100 cyklů Gaussovy eliminace, ta proto vyžaduje celkem nejvýše 10^8 násobení

Důkaz full rank decomposition

navazuje na důkaz ekvivalence dvou definic bázových sloupců pro matice v redukovaném *řot* na str. 5-59

tam jsme ukázali, že pro nebázové sloupce $\mathbf{d}_j$ v matici D platí

$\mathbf{d}_j = d_{1j}\mathbf{e}_1 + d_{2j}\mathbf{e}_2 + \cdots + d_{ij}\mathbf{e}_i = d_{1j}\mathbf{d}_{k_1} + d_{2j}\mathbf{d}_{k_2} + \cdots + d_{ij}\mathbf{d}_{k_i}$

protože i je největší číslo, pro které $k_i < j$, platí $d_{lj} = 0$ pro každé $l = i+1, \ldots, r$

proto $\mathbf{d}_j = d_{1j}\mathbf{d}_{k_1} + d_{2j}\mathbf{d}_{k_2} + \cdots + d_{ij}\mathbf{d}_{k_i} + d_{i+1,j}\mathbf{d}_{k_{i+1}} + \cdots + d_{rj}\mathbf{d}_{k_r}$

protože $D = RA$ pro nějakou regulární matici R, platí také $\mathbf{a}_j = d_{1j}\mathbf{a}_{k_1} + d_{2j}\mathbf{a}_{k_2} + \cdots + d_{ij}\mathbf{a}_{k_i} + d_{i+1,j}\mathbf{a}_{k_{i+1}} + \cdots + d_{rj}\mathbf{a}_{k_r}$

bázové sloupce matice A napíšeme do sloupců matice $B = (\mathbf{a}_{k_1}|\cdots|\mathbf{a}_{k_r})$, potom $\mathbf{a}_j = B\mathbf{d}_j$

pro bázové sloupce matice D platí $\mathbf{d}_{k_i} = \mathbf{e}_i$, proto $\mathbf{a}_{k_i} = 0\mathbf{a}_{k_1} + \cdots + 0\mathbf{a}_{k_{i-1}} + 1\mathbf{a}_{k_i} + 0\mathbf{a}_{k_{i+1}} + \cdots + 0\mathbf{d}_{k_r} = B\mathbf{d}_{k_i}$

proto platí $A = B(\mathbf{c}_1|\cdots|\mathbf{c}_n) = BC$

Dimenze řádkového prostoru matice

tvrzení: je-li A matice typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$, pak dimenze řádkového prostoru $Im\,(A^T)$ matice A se rovná počtu nenulových řádků v matici C v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru, kterou dostaneme z A pomocí *eřú*

důkaz: existuje regulární matice R, pro kterou platí $RA = C$

podle tvrzení na str. 5-27 platí rovnost řádkových prostorů $Im\,(A^T) = Im\,(RA)^T = Im\,(C^T)$, proto také $\dim(A^T) = \dim(C^T)$

označíme $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$ indexy bázových sloupců C

protože $c_{ik_i} \neq 0$ a $c_{lk_i} = 0$ pro každé $l < i$, není řádkový vektor $\tilde{\mathbf{c}}_i^T$ LK předchozích řádkových vektorů pro žádné $i = 1, \ldots, r$

posloupnost $(\tilde{\mathbf{c}}_1^T, \ldots, \tilde{\mathbf{c}}_r^T)$ nenulových řádkových vektorů je LN

protože $Im\,(C^T) = \langle \tilde{\mathbf{c}}_1^T, \ldots, \tilde{\mathbf{c}}_r^T \rangle$, je to báze $Im\,(C^T)$

platí tedy $\dim(C^T) = r$ a proto také $\dim Im\,(A^T) = r$

Hodnost A se rovná hodnosti A^T

z tvrzení na předchozí straně ihned plyne

důležitá věta: pro každou matici A typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ platí $rank(A) = rank(A^T)$

důkaz: $rank(A) = \dim(Im\, A)$, $rank(A)^T = \dim(Im\, A^T)$ a obě dimenze se rovnají počtu r nenulových řádků v matici C, kterou dostaneme z A Gaussovo eliminací, viz tvrzení na str. 5-61 a na str. 5-65

důsledek: platí $rank(A) \le m, n$ pro každou matici A typu $m \times n$

definice: pokud pro matici A typu $m \times n$ platí rovnost $rank(A) = \min\{m, n\}$, říkáme, že má A *plnou hodnost* (*full rank*)

Hodnost součinu matic

tvrzení: jsou-li A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$ nad stejným $\mathbf{T}$, pak platí $rank(AB) \le rank(A), rank(B)$

důkaz: protože $AB = (A\mathbf{b}_1 | \cdots | A\mathbf{b}_p)$, platí podle bodu 2. na str. 5-21

$Im\,(AB) = \langle A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_p \rangle \subseteq \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle = Im\, A$

podle věty o dimenzi podprostoru na str. 5-54 platí

$rank(AB) = \dim(Im\,(AB)) \le \dim(Im\, A) = rank(A)$

z věty o rovnosti hodnosti matice a matice transponované plyne

$rank(AB) = rank((AB)^T) = rank(B^T A^T) \le rank(B^T) = rank(B)$

příklad: jsou-li $\mathbf{u} \in \mathbf{T}^m$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{T}^n$ dva aritmetické vektory, čemu se rovná hodnost $rank(\mathbf{u}\mathbf{v}^T)$ matice $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ typu $m \times n$?

příklad: je-li A matice typu $m \times n$ a $rank(A) = 1$, pak *full rank decomposition* říká, že $A =$

Shrnutí - třetí část

pokračování pokračování důležité věty ze str. 4-67 a str. 4-70: pro čtvercovou matici A řádu n je ekvivalentní

1. matice A je regulární
11. $rank(A) = n$
12. posloupnost sloupcových vektorů $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ je LN
13. $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle = \mathbf{T}^n$
14. posloupnost sloupcových vektorů $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ je báze $\mathbf{T}^n$
15. posloupnost řádkových vektorů $(\tilde{\mathbf{a}}_1^T, \ldots, \tilde{\mathbf{a}}_n^T)$ je LN
16. $\langle \tilde{\mathbf{a}}_1^T, \ldots, \tilde{\mathbf{a}}_n^T \rangle = \mathbf{T}^n$
17. posloupnost řádkových vektorů $(\tilde{\mathbf{a}}_1^T, \ldots, \tilde{\mathbf{a}}_n^T)$ je báze $\mathbf{T}^n$

důkaz:

Další poznatky

tvrzení: je-li A matice typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$, R regulární matice řádu m a S regulární matice řádu n, pak platí $rank(RA) = rank(A) = rank(AS)$

důkaz:

Frobeniova věta: soustava lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad $\mathbf{T}$ je řešitelná právě když $rank(A) = rank(A|\mathbf{b})$

důkaz:

Dimenze jádra matice

je-li A matice typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$, pak číslo $r = rank(A) = \dim(Im\, A)$ se rovná počtu bázových sloupců v matici A a bázové sloupce odpovídají bázovým proměnným

označíme $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-r}$ indexy nebázových sloupců, proměnné $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ jsou potom volné proměnné

každá volba hodnot volných proměnných $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ určuje jednoznačně řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$, jak jsme zjistili ve druhé kapitole

pro každé $p = 1, \ldots, n-r$ označíme $\mathbf{v}_p$ řešení určené volbou hodnot volných proměnných $x_{j_p} = 1$ a $x_{j_q} = 0$ pro $q \neq p$

ukážeme, že posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-r})$ je báze jádra $Ker\, A$ matice A; víme, že $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-r} \in Ker\, A$

každá lineární kombinace $t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_{n-r}\mathbf{v}_{n-r}$ leží v $Ker\, A$, neboť $Ker\, A$ je podprostor $\mathbf{T}^n$

Věta o dimenzi jádra a obrazu

je-li $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in Ker\, A$, definujeme lineární kombinaci $\mathbf{v} = x_{j_1}\mathbf{v}_1 + \cdots + x_{j_{n-r}}\mathbf{v}_{n-r} \in Ker\, A$

pro každé $k = 1, \ldots, n-r$ se j_k-tá složka vektoru $\mathbf{v}$ rovná x_{j_k}, tj. rovná se j_k-té složce vektoru $\mathbf{x}$

proto $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ a tedy $Ker\, A = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-r} \rangle$

abychom dokázali lineární nezávislost posloupnosti $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-r})$, vezmeme libovolnou lineární kombinaci $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n-r}\mathbf{v}_{n-r} = \mathbf{o}$

porovnáním j_k-tých složek v poslední rovnosti dostáváme $a_k = 0$ pro každé $k = 1, \ldots, n-r$, podle tvrzení na str. 5-36 je posloupnost $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-r})$ *LN* a tedy báze v $Ker\, A$

věta o dimenzi jádra a obrazu: pro každou matici A typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ platí $\dim(Ker\, A) + \dim(Im\, A) = n = \dim(Ker\, A) + rank(A)$

Průnik podprostorů

tvrzení: jsou-li $\mathbf{U} \leq \mathbf{W}$ a $\mathbf{V} \leq \mathbf{W}$ podprostory vektorového prostoru $\mathbf{W}$ nad $\mathbf{T}$, pak průnik $U \cap V$ je také podprostor $\mathbf{W}$

důkaz: stačí ukázat, že množina $U \cap V$ je uzavřená na součet a skalární násobek prvků, viz tvrzení na str. 5-14

jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \cap V$, pak $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$, protože U je podprostor $\mathbf{W}$, a ze stejného důvodu také $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$; proto $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U \cap V$

je-li navíc $t \in \mathbf{T}$, pak $t\mathbf{u} \in U$ a $t\mathbf{u} \in V$, neboť U, V jsou podprostory $\mathbf{W}$ a proto také $t\mathbf{u} \in U \cap V$

poznámka: úplně stejně lze dokázat, že průnik $\bigcap_{i \in I} U_i$ libovolných podprostorů $\mathbf{U}_i \subseteq \mathbf{W}$ prostoru $\mathbf{W}$ je opět podprostor $\mathbf{W}$

Součet podprostorů

definice: jsou-li $\mathbf{U} \leq \mathbf{W}$ a $\mathbf{V} \leq \mathbf{W}$ podprostory vektorového prostoru $\mathbf{W}$ nad $\mathbf{T}$, pak lineární obal $\langle U \cup V \rangle$ nazýváme *součet podprostorů* $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$; **označení**: $\mathbf{U} + \mathbf{V}$

důvodem pro tuto terminologii je následující

tvrzení: pro libovolné podprostory $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ prostoru $\mathbf{W}$ platí $\langle U \cup V \rangle = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}$

důkaz $\supseteq$: je-li $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{v} \in V$, je $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \langle U \cup V \rangle$

$\subseteq$: je-li $\mathbf{w} \in \langle U \cup V \rangle$, je $\mathbf{w} = r_1\mathbf{w}_1 + \cdots + r_k\mathbf{w}_k$, kde $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in U \cup V$ a $r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{T}$

součet $r_1\mathbf{w}_1 + \cdots + r_k\mathbf{w}_k$ přeuspořádáme tak, abychom napřed sčítali členy obsahující prvky $\mathbf{w}_i \in U$ a v druhé části zbylé prvky, kde všechna $\mathbf{w}_j$ leží ve V

protože $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ jsou podprostory $\mathbf{W}$, součet první části se rovná nějakému $\mathbf{u} \in U$ neboť $\mathbf{U}$ je podprostor $\mathbf{W}$ a součet zbylé části se rovná $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$; to dokazuje, že $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}$

Součet podmnožin

obecně definujeme *součet podmnožin* $X, Y \subseteq \mathbf{W}$ vektorového prostoru $\mathbf{W}$ jako množinu $X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}$

součet $X + Y$ není obecně podprostor $\mathbf{W}$

množina všech řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se podle tvrzení na str. 4-32 rovná součtu

$$\{\mathbf{u}\} + Ker\,A,$$

kde $\mathbf{u}$ je jedno partikulární řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $Ker\,A$ je množina/podprostor všech řešení příslušné homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$

tuto množinu zapisujeme také jako

$$\mathbf{u} + Ker\,A$$

Věta o dimenzi součtu a průniku podprostorů

věta: jsou-li $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ konečně generované podprostory vektorového prostoru $\mathbf{W}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak platí
$\dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V})$

důkaz: průnik $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ je konečně generovaný prostor coby podprostor konečně generovaného prostoru $\mathbf{U}$ (podle věty o dimenzi podprostoru konečně generovaného prostoru)

podle důsledku 2 na str. 5-46 v něm existuje nějaká báze $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k)$, kde $k = \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V})$

podle tvrzení na str. 5-51 doplníme $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k)$ na bázi $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_l)$ podprostoru $\mathbf{U}$, kde $l = \dim(\mathbf{U})$

podobně ji doplníme na bázi $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m)$ podprostoru $\mathbf{V}$, kde $m = \dim(\mathbf{V})$

ukážeme, že $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m)$ je báze $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ a tím dokážeme, že $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = l + m - k$

Pokračování důkazu

k důkazu, že $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m)$ je LN, použijeme ekvivalentní definici lineární nezávislosti ze str. 5-37

platí-li pro nějaké skaláry $a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_l, c_{k+1}, \ldots, c_m \in \mathbf{T}$
$a_1\mathbf{w}_1 + \cdots + a_k\mathbf{w}_k + b_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + b_l\mathbf{u}_l + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{o}$,
přepíšeme tuto rovnost do tvaru
$a_1\mathbf{w}_1 + \cdots + a_k\mathbf{w}_k + b_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + b_l\mathbf{u}_l = -c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - \cdots - c_m\mathbf{v}_m$

obě strany jsou vyjádřením téhož prvku $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, levá strana říká, že $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, pravá že $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, společně pak říkají $\mathbf{x} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$

proto existuje vyjádření $\mathbf{x} = d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_k\mathbf{w}_k$

z rovností $d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_k\mathbf{w}_k = \mathbf{x} = -c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - \cdots - c_m\mathbf{v}_m$
plyne $d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_k\mathbf{w}_k + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{o}$

protože je posloupnost $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m)$ LN, plyne odtud $d_1 = \cdots = d_k = c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$

Dokončení důkazu

potom také $a_1\mathbf{w}_1 + \cdots + a_k\mathbf{w}_k + b_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + b_l\mathbf{u}_l = \mathbf{o}$ a proto rovněž $a_1 = \cdots = a_k = b_{k+1} = \cdots = b_l = 0$, protože báze $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_l)$ podprostoru $\mathbf{U}$ je LN

všechny koeficienty v lineární kombinaci
$a_1\mathbf{w}_1 + \cdots + a_k\mathbf{w}_k + b_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + b_l\mathbf{u}_l + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{o}$,
jsou tak rovné 0, $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m)$ je LN

zbývá dokázat $\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle = \mathbf{U} + \mathbf{V}$

libovolný prvek $\mathbf{y} \in \mathbf{U} + \mathbf{V}$ lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$\mathbf{u} = r_1\mathbf{w}_1 + \cdots + r_k\mathbf{w}_k + r_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + r_l\mathbf{u}_l$ a
$\mathbf{v} = s_1\mathbf{w}_1 + \cdots + s_k\mathbf{w}_k + s_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + s_m\mathbf{v}_m$
pro nějaké skaláry $r_1, \ldots, r_l, s_1, \ldots, s_m \in \mathbf{T}$

proto $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (r_1 + s_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (r_k + s_k)\mathbf{w}_k + r_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + r_l\mathbf{u}_l + s_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + s_m\mathbf{v}_m$

Příklad

v prostoru $\mathbb{R}^4$ najdeme dimenzi průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ podprostorů

$$\mathbf{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle, \mathbf{V} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

generátory $\mathbf{U}$ zapíšeme do řádků matice a využijeme toho, že *eřú* nemění řádkový prostor matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zjistili jsme, že $\dim(\mathbf{U}) = 2$; podobně zjistíme $\dim(\mathbf{V})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{tj. } \dim(\mathbf{V}) = 2$$

Příklad - dokončení

nakonec zjistíme $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V})$

generátory $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ dostaneme jako sjednocení generátorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zjistili jsme, že $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 3$

podle věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů dostáváme $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 1$, podprostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ se protínají v přímce

Souřadnice vzhledem k bázi

je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$ a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ báze ve $\mathbf{V}$, pak podle podmínky 4. z tvrzení na str. 5-53 lze každý prvek $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ vyjádřit jednoznačně jako lineární kombinaci

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$$

definice: aritmetický vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbf{T}^n$ nazýváme *vektor souřadnic prvku* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *vzhledem k bázi* $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru $\mathbf{V}$, platí-li $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$; **označení**: $[\mathbf{v}]_B$

příklad: matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ má vzhledem k bázi

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ souřadnice $[A]_B = (1, 2, 3, 4)^T$

Kanonická báze v $\mathbf{T}^n$

zatímco vzhledem k bázi

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

má stejná matice A souřadnice $[A]_C = (1, 1, 1, 1)^T$

příklad: na str. 5-43 jsem viděli, že posloupnost vektorů $K_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je báze v aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$ nad $\mathbf{T}$

je-li $\mathbf{v} = (r_1, \ldots, r_n)^T$ libovolný vektor z $\mathbf{T}^n$, pak platí $\mathbf{v} = r_1\mathbf{e}_1 + \cdots + r_n\mathbf{e}_n$, což znamená, že vzhledem k bási K_n má vektor $\mathbf{v}$ souřadnice $\mathbf{v}_{K_n} = (r_1, \ldots, r_n)^T = \mathbf{v}$

v aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$ jsou vektory zadané pomocí svých souřadnic vzhledem k bázi $K_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$; $[\mathbf{v}]_{K_n} = \mathbf{v}$

definice: báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{T}^n$ se nazývá *kanonická (standardní) báze* prostoru $\mathbf{T}^n$

Změna báze v $\mathbb{R}^2$

příklad: v reálném aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^2$ máme dánu bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ a vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; jak najdeme souřadnice $[\mathbf{v}]_B = (s_1, s_2)^T$ vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi B ?

neznámé souřadnice $(s_1, s_2)^T$ musí splňovat vektorovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

označíme-li $\mathbf{u}_1 = (1,2)^T$ a $\mathbf{u}_2 = (-2,3)^T$, pak matici soustavy

můžeme zapsat jako $(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2) = ([\mathbf{u}_1]_K|[\mathbf{u}_2]_K)$

to znamená, že $[\mathbf{v}]_K = ([\mathbf{u}_1]_K|[\mathbf{u}_2]_K)\,[\mathbf{v}]_B$

Změna báze v $\mathbf{T}^n$

v aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$ máme nějakou bázi $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$; chceme najít souřadnice $[\mathbf{v}]_B = (s_1, \dots, s_n)$ vektoru $\mathbf{v} \in \mathbf{T}^n$ vzhledem k bázi B

tyto souřadnice musí splňovat rovnost $\mathbf{v} = s_1\mathbf{u}_1 + \cdots + s_n\mathbf{v}_n$

protože vektory z $\mathbf{T}^n$ dostáváme zadané souřadnicemi vzhledem ke kanonické bázi, můžeme poslední rovnost přepsat ve tvaru

$[\mathbf{v}]_K = s_1[\mathbf{u}_1]_K + \cdots + s_n[\mathbf{u}_n]_K = ([\mathbf{u}_1]_K|\cdots|[\mathbf{u}_n]_K)\,[\mathbf{v}]_B$

definice: je-li $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ báze v $\mathbf{T}^n$ a K kanonická báze v $\mathbf{T}^n$, pak matice $([\mathbf{u}_1]_K|\cdots|[\mathbf{u}_n]_K)$ se nazývá *matice přechodu* od báze B k bázi K; **označení**: $[id]^B_K$

tvrzení: je-li $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ báze v $\mathbf{T}^n$ a K kanonická báze v $\mathbf{T}^n$, pak pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{T}^n$ platí $[\mathbf{v}]_K = [id]^B_K\,[\mathbf{v}]_B$

Obecná matice přechodu

v obecném konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ není žádná „speciální/kanonická“ báze

máme-li dvě báze $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a $C = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ve $\mathbf{V}$, jak souvisí souřadnice $[\mathbf{w}]_B$ nějakého vektoru $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ vzhledem k bázi B s jeho souřadnicemi $[\mathbf{w}]_C$ vzhledem k bázi C ?

vektor $\mathbf{w}$ vyjádříme jako LK prvků obou bází:

$\mathbf{w} = r_1\mathbf{u}_1 + \cdots + r_n\mathbf{u}_n$, tj. $[\mathbf{w}]_B = (r_1, \dots, r_n)^T$

$\mathbf{w} = s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_n\mathbf{v}_n$, tj. $[\mathbf{w}]_C = (s_1, \dots, s_n)^T$

nyní vyjádříme každý vektor $\mathbf{v}_j$ báze C jako LK prvků báze B:

$\mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{u}_1 + a_{2j}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{u}_n$, tj. $[\mathbf{v}_j]_B = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^T$

definice: jsou-li $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a $C = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ dvě báze ve $\mathbf{V}$, pak matici $([\mathbf{v}_1]_B|[\mathbf{v}_2]_B|\cdots|[\mathbf{v}_n]_B)$ nazýváme *matice přechodu* od báze C k bázi B; **označení**: $[id]^C_B$

Přepočet souřadnic pomocí matice přechodu

tvrzení: jsou-li $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a $C = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ dvě báze ve $\mathbf{V}$, pak pro každý vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ platí $[\mathbf{w}]_B = [id]^C_B\,[\mathbf{w}]_C$, kde $[id]^C_B$ je matice přechodu od báze C k bázi B

důkaz: označíme $A = [id]^C_B = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$, kde $\mathbf{a}_j = [\mathbf{v}_j]_B$ pro každé $j = 1, \dots, n$; pak platí

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^n s_j\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n s_j \sum_{i=1}^n a_{ij}\mathbf{u}_i =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n s_j a_{ij}\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}s_j \right) \mathbf{u}_i$$

odtud plyne, že i-tá složka vektoru souřadnic $[\mathbf{w}]_B$ se rovná součinu i-tého řádku matice přechodu A s vektorem souřadnic $[\mathbf{w}]_C$

pomocí prvkové definice součinu plyne rovnost $[\mathbf{w}]_B = [id]^C_B\,[\mathbf{w}]_C$

Vektorové prostory - shrnutí

- **klíčové**: lineární obal množiny, množina generátorů vektorového prostoru
- **klíčové**: lineárně závislá/nezávislá posloupnost vektorů, lineárně závislá/nezávislá množina vektorů
- **klíčové**: báze vektorového prostoru, dimenze vektorového prostoru
- **základní**: definice vektorového prostoru, příklady prostorů funkcí, posloupností, lze v nich dělat lineární kombinace
- **základní**: podprostory vektorového prostoru, podprostory aritmetických prostorů, uzavřenost na obě operace
- **základní**: sloupcový a řádkový prostor matice, oba nulové prostory matice
- **základní**: různé ekvivalentní definice lineární závislosti a nezávislosti posloupnosti prvků vektorového prostoru

Vektorové prostory - shrnutí

- **základní**: lineární závislost a nezávislost posloupnosti sloupcových vektorů matice, bázové a nebázové sloupce matice
- **základní**: existence báze v konečně generovaném prostoru
- **základní**: Steinitzova věta o výměně a její důsledky
- **základní**: věta o dimenzi podprostoru konečně generovaného prostoru
- **základní**: rovnost dimenze řádkového a sloupcového prostoru matice
- **základní**: hodnost součinu matic
- **základní**: věta o dimenzi jádra a obrazu matice
- **základní**: věta o dimenzi součtu a průniku podprostorů
- **základní**: souřadnice vektoru vzhledem k bázi
- **základní**: matice přechodu o jedné báze k druhé, přepočet souřadnic vektoru vzhledem ke dvěma různým bázím

Vektorové prostory - shrnutí

- **důležité**: jednoduché důsledky axiomů vektorového prostoru
- **důležité**: vliv elementárních řádkových a sloupcových úprav na čtyři základní prostory matice
- **důležité**: součet podmnožin vektorového prostoru
- **důležité**: kanonická báze aritmetického prostoru
- **pro zajímavost**: skeletní rozklad (full rank decomposition) matice, jeho využití

při studiu této kapitoly je vhodné rozlišit části, které se týkají obecných vektorových prostorů, a ty studovat samostatně

části, které se týkají matic, jsou aplikací vlastností obecných vektorových prostorů na prostory určené maticí

Kapitola 6

Determinanty

Determinanty - obsah

- *Motivace*
- *Permutace*
- *Obecné determinanty*

Motivace - obsah

- *Motivace*
  Determinanty matic řádu 2
  Determinanty matic řádu 3

Historie a motivace 1

determinant je funkce, která každé čtvercové matici A řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$ přiřazuje nějaký prvek $t \in \mathbf{T}$, **značení**: $\det A$

determinant se původně používal při řešení soustav lineárních rovnic

má-li soustava regulární matici, lze pomocí determinantů formulovat „vzoreček“ pro její řešení

toto použití má význam pouze při ručním řešení „malých soustav“ s několika málo neznámými

jeho výpočetní složitost je obrovská (exponenciální) a pro řešení soustav s velkým počtem neznámých jsou determinanty nepoužitelné

Gaussova eliminace je mnohem rychlejší

Historie a motivace 2

druhý význam determinantů je geometrický

v případě reálných matic A řádu $n = 2, 3$ znaménko determinantu udává, mění-li zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orientaci prostoru („dělá z pravé levou“) nebo nemění

absolutní hodnota $|\det A|$ pak říká, jak zobrazení f_A mění plochy (v případě $n = 2$) nebo objemy (v případě $n = 3$) zobrazovaných objektů

tento geometrický význam determinantů je základem věty o substituci pro vícerozměrné integrály

DOWN WITH DETERMINANTS !!

Orientace v reálné rovině

reálná matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ určuje zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

předpisem $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

do roviny si nakreslíme písmeno F a podíváme se, kam se zobrazí zobrazením f_A

budeme chtít, aby platilo $\det A > 0$, pokud A nemění orientaci, a aby platilo $\det A < 0$, pokud A orientaci mění

matice $I_2 = (\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2)$ orientaci nemění, matice $(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1)$ ji mění

Plocha rovnoběžníku

zobrazení f_A zobrazí čtverec o stranách $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ na rovnoběžník o stranách $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21})^T$ a $\mathbf{a}_2 = (a_{12}, a_{22})^T$

jak spočítáme plochu rovnoběžníku?

můžeme to udělat geometricky

nebo využít lineárních vlastností plochy a orientace

$\det(\mathbf{a}_1|t\mathbf{a}_2) = t\det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2)$

pro každou matici A a $t \in \mathbb{R}$

Lineární vlastnosti

dále platí $\det(\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_1) =$ pro každou matici A

proto také $\det(t\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2) = t\det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$

$\det(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1|\mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2) + \det(\mathbf{b}_1|\mathbf{a}_2)$

$\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) =$, $\det(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1) =$, $\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_2) =$

Formule pro determinant 2. řádu

nyní můžeme spočítat $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2)$

vyjádříme $\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{a}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2$

a využijeme formulky odvozené na předchozích stránkách

$\det A = \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2) =$

$\det(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2|\mathbf{a}_2) =$

$a_{11}\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{a}_2) + a_{21}\det(\mathbf{e}_2|\mathbf{a}_2) =$

$a_{11}\det(\mathbf{e}_1|a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) + a_{21}\det(\mathbf{e}_2|a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) =$

$a_{11}a_{12}\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1) + a_{11}a_{22}\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) + a_{21}a_{12}\det(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1) =$
$+a_{21}a_{22}\det(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_2) =$

$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Orientace v $\mathbb{R}^3$

stejně jako v rovině budeme chtít, aby pro reálnou matici A řádu 3 platilo $\det A > 0$, pokud $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zobrazuje „pravou rukavici" na „pravou" a $\det A < 0$, pokud f_A zobrazuje „pravou" na „levou"

při výpočtu determinantu řádu 2 jsme to potřebovali vědět zejména pro matice, jejichž sloupce jsou prvky kanonické báze

experimentálně tak zjistíme, že by mělo platit

$\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3)$

$\det(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_1)$

$\det(\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2)$

$\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_2)$

$\det(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_3)$

$\det(\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1)$

$\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|-\mathbf{e}_3)$

$\det(-\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3)$

Objem rovnoběžnostěnu

pro reálnou matici $A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3)$ řádu 3 budeme opět chtít, aby číslo $|\det A|$ udávalo objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, který je obrazem jednotkové krychle určené vektory kanonické báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ zobrazením f_A

je-li posloupnost vektorů $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ lineárně závislá, má obor hodnot zobrazení f_A dimenzi nejvýše 2 a objem rovinného obrazu jednotkové krychle se rovná 0

speciálně to znamená např. $\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_2) = \det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_3) = 0$ atd.

a také
$\det(0\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) = \det(\mathbf{a}_1|0\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) = \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|0\mathbf{a}_3) = 0\det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3)$

Lineární vlastnosti objemu

dále si uvědomíme, že změna znaménka jednoho z vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ znamená změnu orientace prostoru a tedy
$\det(-\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) = \det(\mathbf{a}_1|-\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) = \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|-\mathbf{a}_3) = -\det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3)$

stejně jako ve dvoudimenzionálním případě zjistíme, že pro každé reálné $t > 0$ platí

$\det(t\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) = \det(\mathbf{a}_1|t\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) = \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|t\mathbf{a}_3) = t\det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3)$

a započteme-li rovněž změnu orientace, platí totéž i pro $t < 0$

podobně jako v rovině také ověříme, že platí
$\det(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) = \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) + \det(\mathbf{b}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3)$
$\det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2|\mathbf{a}_3) = \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) + \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{b}_2|\mathbf{a}_3)$
$\det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3) = \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) + \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{b}_3)$

pro každé vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$

Formule pro determinant 3. řádu

je-li $A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3)$, vyjádříme opět
$\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3$ a $\mathbf{a}_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3$ a s použitím lineárních vlastností spočítáme

$\det A = \det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) =$

$\det(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3|a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3|a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) =$

$\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} a_{k1}a_{l2}a_{m3}\det(\mathbf{e}_k|\mathbf{e}_l|\mathbf{e}_m) =$

$a_{11}a_{22}a_{33}\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3) + a_{11}a_{32}a_{23}\det(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_2) +$

$a_{21}a_{12}a_{33}\det(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_3) + a_{21}a_{32}a_{13}\det(\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_1) +$

$a_{31}a_{12}a_{23}\det(\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2) + a_{31}a_{22}a_{13}\det(\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1) =$

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$

Sarrusovo pravidlo

determinant matice $A = (a_{ij})$ řádu 3 označujeme $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

znaménka u jednotlivých součinů zjistíme pomocí *Sarrusova pravidla* - pod determinant zapíšeme prvé dva řádky ještě jednou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

součiny zleva doprava dolů mají znaménko $+$, zprava doleva $-$:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Permutace - obsah

Výběry prvků jako permutace

každý sčítanec je součinem tří prvků matice A, které jsou vybrány tak, aby v každém řádku a každém sloupci ležel právě jeden

k definici determinantu matice A řádu n budeme potřebovat vybírat n prvků z A tak, abychom opět vybrali jeden prvek z každého řádku a každého sloupce

tento výběr můžeme popsat zobrazením $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$

vybereme-li z j-tého sloupce prvek v i-tém řádku, definujeme $\pi(j) = i$

protože vybíráme z každého sloupce jeden prvek, je zobrazení π definováno v každém bodě $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

protože vybíráme z každého řádku jeden prvek, je zobrazení π vzájemně jednoznačné

Definice permutace

definice: *permutace* na množině X je vzájemně jednoznačné zobrazení $\pi : X \to X$; množinu všech permutací na množině X označujeme S_X; je-li $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, používáme také označení S_n

identické zobrazení id_X na množině X je vzájemně jednoznačné a tedy permutace, nazýváme je *identická permutace* na množině X; označujeme je také ι_X

protože každá permutace $\pi : X \to X$ je vzájemně jednoznačné zobrazení, inverzní zobrazení $\pi^{-1} : X \to X$ je také vzájemně jednoznačné a tedy permutace na X; nazýváme je *inverzní permutace* k π

jsou-li π, ρ dvě permutace na X, pak složené zobrazení $\rho\pi$, které každému $x \in X$ přiřazuje prvek $\rho(\pi(x))$, je také permutace na X

Vlastnosti skládání permutací

s následujícími třemi vlastnostmi skládání permutací jsme se již setkali několikrát

- pro každé tři permutace $\sigma, \rho, \pi \in S_X$ platí $\sigma(\rho\pi) = (\sigma\rho)\pi$
- pro každou permutaci $\pi \in S_X$ platí $\iota_X\pi = \pi\iota_X = \pi$
- pro každou permutaci $\pi \in S_X$ platí $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = \iota_X$

permutace na konečné množině X můžeme zapsat tabulkou, do prvního řádku napíšeme prvky X, do druhého řádku napíšeme pod každé $x \in X$ hodnotu $\pi(x)$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 & 8 & 5 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

v každém řádku je každý prvek množiny X právě jednou

Graf permutace

permutaci můžeme také nakreslit

definice: *cyklus* délky k *v permutaci* $\pi \in S_X$ je posloupnost $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ prvků X, pro které platí $\pi(x_1) = x_2$, $\pi(x_2) = x_3, \dots, \pi(x_{k-1}) = x_k$ a $\pi(x_k) = x_1$
pozorování: každá permutace na konečné množině X se rozkládá na disjunktní sjednocení cyklů; pomocí cyklů ji také můžeme zapsat:
$(1, 2, 3, 7)(4, 6, 8)(5)$, říká se tomu *cyklický zápis permutace*

pokud je jasné, kolik prvků množina X má, můžeme cykly délky 1 v cyklickém zápisu vynechat; pak jde o *redukovaný cyklický zápis*

Transpozice

na pořadí cyklů v zápisu nezáleží; stejně tak můžeme jakýkoliv prvek daného cyklu zvolit jako první

$(6, 8, 4)(3, 7, 1, 2)$ je redukovaný cyklický zápis téže permutace na množině $\{1, \dots, 8\}$

definice: permutaci π na množině X nazýváme *cyklus délky* $k \geq 2$, obsahuje-li jeden cyklus délky k a ostatní cykly mají délku 1; *transpozice* na množině X je cyklus délky 2

tvrzení: každou permutaci na konečné množině lze složit z transpozic

důkaz: vezmeme libovolný cyklus $(x_1, \dots, x_k)$ délky $k \geq 2$ v permutaci π; potom platí například
$(x_1, \dots, x_k) = (x_1, x_2)(x_2, x_3) \cdots (x_{k-1}, x_k)$
nebo také $(x_1, \dots, x_k) = (x_1, x_k) \cdots (x_1, x_3)(x_1, x_2)$
každá permutace je složení disjunktních cyklů délky aspoň 2

Složení permutace s transpozicí

tvrzení: je-li π permutace na konečné množině X a (x, y) transpozice na X, pak platí

- počet cyklů v permutacích π a $(x, y)\pi$ se liší o 1
- počet cyklů v permutacích π a $\pi(x, y)$ se liší o 1
- počet sudých cyklů v permutacích π a $(x, y)\pi$ se liší o 1
- počet sudých cyklů v permutacích π a $\pi(x, y)$ se liší o 1

důkaz: dokážeme první a třetí tvrzení, rozlišíme dva případy

případ 1: prvky x, y leží ve stejném cyklu permutace π

tento cyklus je $(x = x_1, x_2, \dots, x_k, y = y_1, y_2, \dots, y_l)$

ve složené permutaci $(x, y)\pi$ se tento cyklus rozpadne na dva cykly

$(x, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)(y, y_2, \dots, y_l)$

ostatní cykly v permutaci π se nezmění, počet cyklů v permutaci $(x, y)\pi$ je o 1 větší než v permutaci π

Dokončení důkazu

je-li číslo $k+l$ sudé, pak jsou buď obě čísla k, l sudá a počet sudých cyklů v $(x, y)\pi$ je o 1 větší, nebo jsou obě čísla k, l lichá a počet sudých cyklů v $(x, y)\pi$ je o 1 menší

je-li číslo $k+l$ liché, pak je jedno z čísel k, l sudé a druhé liché, počet sudých cyklů v $(x, y)\pi$ je o 1 větší

případ 2: prvky x, y leží v různých cyklech permutace π
$(x = x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ a $(y = y_1, y_2 \ldots, y_l)$
v permutaci $(x, y)\pi$ se oba cykly propojí do jednoho cyklu
$(x = x_1, x_2, \ldots, x_k, y = y_1, y_2, \ldots, y_l)$

Sudé a liché permutace

důsledek: pro každou permutaci π na konečné množině X nastává právě jedna z následujících možností

- každé vyjádření π jako složení transpozic obsahuje sudý počet transpozic; to nastává právě když počet sudých cyklů v π je sudý
- každé vyjádření π jako složení transpozic obsahuje lichý počet transpozic; to nastává právě když počet sudých cyklů v π je lichý

definice: permutace π na konečné množině X se nazývá *sudá*, pokud obsahuje sudý počet cyklů sudé délky; říkáme také, že *znaménko* π je 1 a zapisujeme to $sgn(\pi) = 1$

pokud má π lichý počet sudých cyklů, říkáme že je π *lichá* permutace, její znaménko je -1 a zapisujeme to $sgn(\pi) = -1$

Jednoduché vlastnosti znaménka

příklad: $sgn((4, 3, 2, 1)(7, 8)(5, 9, 10)(11, 12)) = -1$

tvrzení: je-li X konečná množina a $\pi, \rho \in S_X$, pak platí

- $sgn(\iota_X) = 1$
- $sgn(\pi^{-1}) = sgn(\pi)$
- $sgn(\rho\pi) = sgn(\rho) sgn(\pi)$

důkaz:
- identická permutace má 0 sudých cyklů
- inverzní permutace π^{-1} má cykly stejných délek jako permutace π
- je-li $\pi = t_k \cdots t_1$ vyjádření π jako složení transpozic, platí $sgn(\pi) = (-1)^k$; podobně je-li $\rho = s_l \cdots s_1$, kde $s_1, \ldots, s_l$ jsou transpozice, pak $sgn(\rho) = (-1)^l$; potom $\rho\pi = s_l \cdots s_1 t_k \cdots t_1$ je vyjádření $\rho\pi$ jako složení transpozic, proto $sgn(\rho\pi) = (-1)^{l+k} = sgn(\rho) \cdot sgn(\pi)$

„15“

Permutace a matice

definice: čtvercová matice $P = (p_{ij})$ řádu n se nazývá *permutační*, pokud je v každém sloupci a každém řádku právě jeden prvek rovný 1 a ostatní prvky jsou rovné 0

každá permutační matice P určuje permutaci $\pi \in S_n$ definovanou předpisem $\pi(j) = i$ právě když $p_{ij} = 1$; skutečnost, že π je permutace, vyplývá z definice permutační matice

různé permutační matice řádu n určují různé permutace na množině $\{1, \ldots, n\}$

naopak, každé permutaci $\pi \in S_n$ odpovídá nějaká permutační matice $P_\pi = (p_{ij})$, která ji určuje; stačí zvolit

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud platí} \quad \pi(j) = i \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Skládání permutací a násobení matic

existuje tak vzájemně jednoznačné zobrazení mezi permutacemi na množině $\{1, \ldots, n\}$ a permutačními maticemi řádu n

toto zobrazení přiřazuje permutaci $\pi \in S_n$ matici P_π

tvrzení: pro každé permutace $\pi, \rho \in S_n$ platí

- $P_\rho P_\pi = P_{\rho\pi}$
- $(P_\pi)^{-1} = (P_\pi)^T = P_{\pi^{-1}}$

důkaz: • označíme $P_\rho = (p_{ij})$ a $P_\pi = (q_{jk})$; prvek na místě (i, k) v součinu $P_\rho P_\pi$ je $\sum_{j=1}^n p_{ij} q_{jk}$ a rovná se 1 právě když existuje j takové, že $p_{ij} = 1$ a $q_{jk} = 1$, což je právě když $\rho(j) = i$ a $\pi(k) = j$, což je právě když $\rho\pi(k) = i$

protože v každém sloupci matice P_π je právě jeden prvek rovný 1 a ostatní jsou 0, všechny ostatní prvky součinu $P_\rho P_\pi$ se rovnají 0

proto $P_\rho P_\pi = P_{\rho\pi}$

- druhé tvrzení plyne přímo z definic

Obecné determinanty - obsah

- *Obecné determinanty*
  - Základní vlastnosti
  - Vliv elementárních úprav
  - Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce
  - Adjungovaná matice
  - Vandermondův determinant a sdílení tajemství

Definice

definice: je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$, pak *determinant* matice A definujeme jako

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} sgn\,(\pi)\, a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n}$$

příklad: je-li $A = (a_{ij})$ matice řádu 2, má množina S_2 všech permutací na množině $\{1, 2\}$ pouze dva prvky - identickou permutaci $\iota = (1)(2)$ a transpozici $(1, 2)$

identické permutaci odpovídá součin $a_{11}a_{22}$ se znaménkem $sgn\,(\iota) = 1$, transpozici $(1, 2)$ odpovídá součin $a_{21}a_{12}$ se znaménkem $sgn\,((1, 2)) = -1$

proto $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Determinant matice řádu 3

příklad: je-li $A = (a_{ij})$ matice řádu 3, má množina všech permutací na množině $\{1, 2, 3\}$ celkem 6 prvků

π	$sgn\,(\pi)$	
ι	1	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$(1,2,3)$	1	$a_{21}a_{32}a_{13}$
$(1,3,2)$	1	$a_{31}a_{12}a_{23}$
$(1,2)(3)$	-1	$-a_{21}a_{12}a_{33}$
$(1,3)(2)$	-1	$-a_{31}a_{22}a_{13}$
$(1)(2,3)$	-1	$-a_{11}a_{32}a_{23}$

proto $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23}$

Determinant trojúhelníkové matice

tvrzení: je-li $A = (a_{ij})$ horní trojúhelníková matice, pak platí $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

důkaz: ukážeme, že jediný ze sčítanců v definici determinantu, který může být případně nenulový, je ten určený identickou permutací ι

podíváme se na sčítanec $sgn\,(\pi)\, a_{\pi(1),1}a_{\pi(2),2}\cdots a_{\pi(n),n}$

protože je A horní trojúhelníková, platí $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i > j$

aby mohl být součin $a_{\pi(1),1}a_{\pi(2),2}\cdots a_{\pi(n),n}$ nenulový, musí být $\pi(j) \leq j$ pro každé $j = 1, \ldots, n$

to znamená, že musí být $\pi(1) = 1$, $\pi(2) \leq 2$, a protože je π prosté zobrazení, musí být $\pi(2) = 2$

podobně musí být $\pi(3) = 3, \ldots, \pi(n) = n$, neboli $\pi = \iota$

ze sumy definující $\det A$ tak zbývá pouze $sgn\,(\iota)\, a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

Determinant transponované matice

tvrzení: pro každou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n nad $\mathbf{T}$ platí $\det A = \det(A^T)$

důkaz: označíme $A^T = (b_{ij})$, tedy $b_{ij} = a_{ji}$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$

v součtu definujícím $\det(A^T)$ vezmeme sčítanec určený permutací π, tj. $sgn\,(\pi)\, b_{\pi(1),1}b_{\pi(2),2}\cdots b_{\pi(n),n}$

ten se rovná $sgn\,(\pi)\, a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)}\cdots a_{n,\pi(n)}$

po přeuspořádání je to $sgn\,(\pi)\, a_{\pi^{-1}(1),1}a_{\pi^{-1}(2),2}\cdots a_{\pi^{-1}(n),n} = sgn\,(\pi^{-1})\, a_{\pi^{-1}(1),1}a_{\pi^{-1}(2),2}\cdots a_{\pi^{-1}(n),n}$, neboť $sgn\,(\pi) = sgn\,(\pi^{-1})$

což je sčítanec v součtu definujícím $\det A$ určený permutací π^{-1}

protože $(\pi^{-1})^{-1} = \pi$ pro každou permutaci π, plyne z právě dokázaného, že sčítanec v $\det(A^T)$ určený π^{-1} se rovná sčítanci v $\det A$ určeném π

v $\det A$ a v $\det(A^T)$ tak sčítáme zcela stejné součiny

Lineární vlastnosti determinantu

důsledek: platí $\det A = \sum_{\pi \in S_n} sgn\,(\pi) a_{1,\pi(1)}a_{2,\pi(2)}\cdots a_{n,\pi(n)}$

tvrzení: pro čtvercovou matici $A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ řádu n nad $\mathbf{T}^n$, libovolný vektor $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$, každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ a skalár $t \in \mathbf{T}$ platí

- $\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{a}_j + \mathbf{b}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) =$
  $\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{b}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n)$
- $\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|t\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) =$
  $t\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) = t\det A$

důkaz: • $\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{a}_j + \mathbf{b}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) =$

$\sum_{\pi \in S_n} sgn\,(\pi) a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(j-1),j-1}(a_{\pi(j),j} + b_{\pi(j)})a_{\pi(j+1),j+1}\cdots a_{\pi(n),n} =$

$\sum_{\pi \in S_n} sgn\,(\pi) a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n} +$

$\sum_{\pi \in S_n} sgn\,(\pi) a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(j-1),j-1} b_{\pi(j)} a_{\pi(j+1),j+1}\cdots a_{\pi(n),n} =$

$\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{b}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n)$

Další elementární sloupcové a řádkové úpravy

dokončení důkazu: • $\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|t\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n)=$
$\sum_{\pi\in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(j-1),j-1}(t a_{\pi(j),j}) a_{\pi(j+1),j+1}\cdots a_{\pi(n),n} =$
$t\sum_{\pi\in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n} = t\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$

druhá část předchozího tvrzení říká, že pokud vynásobíme nějaký sloupec matice A skalárem t, determinant nové matice získáme tak, že vynásobíme determinant původní matice t

protože $\det A = \det(A^T)$, stejný vliv na hodnotu determinantu matice má vynásobení nějakého řádku matice A skalárem t

tvrzení: prohození dvou řádků čtvercové matice $A = (a_{ij})$ změní znaménko $\det A$; podobně prohození dvou sloupců matice A změní znaménko $\det A$

Důkaz

dokážeme změnu znaménka $\det A$ při prohození sloupců

v původní matici $A = (\cdots|\mathbf{a}_k|\cdots|\mathbf{a}_l|\cdots)$ prohodíme sloupce $\mathbf{a}_k$ a $\mathbf{a}_l$ (předpokládáme $k < l$)

dostaneme matici $B = (b_{ij}) = (\cdots|\mathbf{a}_l|\cdots|\mathbf{a}_k|\cdots)$, kde $b_{ij} = a_{ij}$ pro každé i a každé $j \neq k, l$, dále $b_{ik} = a_{il}$ a $b_{il} = a_{ik}$ pro každé i

zvolíme libovolnou permutaci $\pi \in S_n$ a označíme $\sigma = \pi(k, l)$

sčítanec určený π v součtu definujícím $\det B$ se rovná
$sgn(\pi) b_{\pi(1),1}\cdots b_{\pi(k),k}\cdots b_{\pi(l),l}\cdots b_{\pi(n),n} =$
$sgn(\pi) a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(k),l}\cdots a_{\pi(l),k}\cdots a_{\pi(n),n} =$
$-sgn(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(l),l}\cdots a_{\sigma(k),k}\cdots a_{\sigma(n),n}$,
tj. rovná se minus sčítanci určenému permutací σ v $\det A$

protože $\sigma(k, l) = \pi$, sčítanec určený σ v $\det B$ se rovná minus sčítanci určeném π v $\det A$

Dokončení důkazu

proto součet sčítanců v $\det B$ určených π a σ se rovná minus součtu sčítanců v $\det A$ určených π a σ

platí tedy $\det B = -\det A$

protože $\det A = \det(A^T)$, také přehození dvou řádků v A způsobí změnu znaménka $\det A$

důsledek: pro každou permutaci $\rho \in S_n$ platí
$\det(\mathbf{a}_{\rho(1)}|\mathbf{a}_{\rho(2)}|\cdots|\mathbf{a}_{\rho(n)}) = sgn(\rho)\det(\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n)$

důkaz: stačí vyjádřit permutaci ρ jako složení transpozic a použít předchozí tvrzení

Pomocné tvrzení

má-li matice $A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ nad $\mathbf{T}$ dva stejné sloupce, platí $\det A = 0$

důkaz: předpokládáme $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_l$, platí tedy $a_{ik} = a_{il}$ pro každé i

použijeme ekvivalentní definici determinantu na str. 6-33:
$\det A = \sum_{\pi\in S_n} sgn(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)}\cdots a_{n,\pi(n)}$

zvolíme libovolnou permutaci $\pi \in S_n$ a označíme $\sigma = (k, l)\pi$; platí $sgn(\pi) = -sgn(\sigma)$, proto $\pi \neq \sigma$

je-li $\pi(i) \neq k, l$ platí $\pi(i) = \sigma(i)$ a tedy $a_{i,\pi(i)} = a_{i,\sigma(i)}$

je-li $\pi(i) = k$, pak $\sigma(i) = l$ a $a_{i,\pi(i)} = a_{ik} = a_{il} = a_{i,\sigma(i)}$; podobně $a_{j,\pi(j)} = a_{j,\sigma(j)}$ pokud $\pi(j) = l$

proto $sgn(\pi) a_{1,\pi(1)}\cdots a_{n,\pi(n)} + sgn(\sigma) a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)} = 0$

odtud plyne $\det A = 0$

Efekt třetí elementární sloupcové (řádkové) úpravy

tvrzení: přičteme-li v matici $A = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ násobek jednoho řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci), determinant $\det A$ se nezmění

důkaz: dokážeme pro sloupce a použijeme $\det A = \det(A^T)$

přičteme-li t-násobek i-tého sloupce k j-tému, dostaneme matici $B = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|t\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n)$

pak $\det B = \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|t\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|t\mathbf{a}_i|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) = \det A$

přičteme-li t-násobek i-tého řádku k j-tému řádku, dostaneme matici C, pro kterou platí

$\det C = \det(C^T) = \det(\tilde{\mathbf{a}}_1|\cdots|\tilde{\mathbf{a}}_{j-1}|t\tilde{\mathbf{a}}_i + \tilde{\mathbf{a}}_j|\tilde{\mathbf{a}}_{j+1}|\cdots|\tilde{\mathbf{a}}_n) = \det(\tilde{\mathbf{a}}_1|\cdots|\tilde{\mathbf{a}}_{j-1}|t\tilde{\mathbf{a}}_i|\tilde{\mathbf{a}}_{j+1}|\cdots|\tilde{\mathbf{a}}_n) + \det(\tilde{\mathbf{a}}_1|\cdots|\tilde{\mathbf{a}}_{j-1}|\tilde{\mathbf{a}}_j|\tilde{\mathbf{a}}_{j+1}|\cdots|\tilde{\mathbf{a}}_n) = \det A^T = \det A$

První metoda výpočtu determinantů

známe efekt *eřú* a *esú* na determinant; pomocí těchto úprav matici převedeme do horní trojúhelníkové nebo dolní trojúhelníkové matice a pak vynásobíme prvky na hlavní diagonále

příklad: spočteme

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 12$$

Determinanty elementárních matic

tvrzení: pro každou elementární matici E a libovolnou matici A, obě řádu n, platí $\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)$

důkaz: každou elementární matici dostaneme z jednotkové matice I_n jednou *eřú*; $\det I_n = 1$

matici E pro přehození řádků, dostaneme z I_n prohozením dvou řádků, tedy $\det E = -1$ a $\det(EA) = (-1)\det A = \det(E)\det(A)$

matice E pro vynásobení řádku nenulovým skalárem je diagonální, tedy $\det E = t$ a $\det(EA) = t \det A = \det(E)\det(A)$

a nakonec matice E pro přičtení t-násobku jednoho řádku k jinému je horní (nebo dolní) trojúhelníková s jednotkami na hlavní diagonále, proto $\det E = 1$ a $\det(EA) = \det A = \det(E)\det(A)$

Charakterizace regularity pomocí determinantu

tvrzení: pro čtvercovou matici A nad $\mathbf{T}$ je ekvivalentní

1. matice A je regulární

18. $\det A \neq 0$

důkaz: pomocí *eřú* převedeme A do *řot* C

existují tedy elementární matice $E_1, \ldots, E_k$ takové, že $C = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = E_k(E_{k-1} \cdots E_1 A)$

podle předchozího tvrzení platí $\det C = \det(E_k)\det(E_{k-1} \cdots E_1 A) = \det(E_k) \cdots \det(E_1)\det(A)$

podle téže věty je $\det E \neq 0$ pro každou elementární matici E

proto $\det A \neq 0$ právě když $\det C \neq 0$

protože C je horní trojúhelníková matice, platí $\det C \neq 0$ právě když má C na hlavní diagonále samé nenulové prvky, což je právě když je A regulární

Věta o součinu determinantů

věta: pro každé dvě čtvercové matice A, B řádu n platí
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

důkaz: není-li A regulární, platí $rank(A) < n$ a také $\det A = 0$

rovněž $rank(AB) \leq rank(A) < n$, součin AB není regulární a tedy
$\det(AB) = 0 = \det A \det B$

je-li A regulární, vyjádříme ji jako součin $A = E_k \cdots E_2 E_1$
elementárních matic

podle tvrzení na str. 6-40 platí
$\det(AB) = \det(E_k \cdots E_2 E_1 B) =$
$\det(E_k) \cdots \det(E_2) \det(E_1) \det(B) =$
$\det(E_k) \cdots \det(E_2 E_1) \det(B) = \cdots =$
$\det(E_k \cdots E_2 E_1) \det B = \det(A) \det(B)$

geometrický význam věty o součinu determinantů

Cramerovo pravidlo

důsledek: pro regulární matici A platí $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

důkaz: z rovnosti $AA^{-1} = I_n$ plyne pomocí tvrzení o součinu determinantů, že $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$

Cramerovo pravidlo: je-li $A = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ regulární matice řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{T}^n$ a $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ jednoznačně určený vektor řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pak platí pro každé $j = 1, \ldots, n$

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

kde A_j je matice, kterou dostaneme z A nahrazením j-tého sloupce $\mathbf{a}_j$ sloupcem pravých stran $\mathbf{b}$

důkaz: platí $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{a}_i$

Dokončení důkazu Cramerova pravidla

potom platí $\det A_j = \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{b}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) =$
$\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{a}_i|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) =$
$\sum_{i=1}^n x_i \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{a}_i|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) =$
$x_j \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) = x_j \det A$

protože $\det A \neq 0$ (neboť A je regulární), plyne odtud vzorec pro x_j

příklad: najdeme druhou složku řešení soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right)$:

platí $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 12$ a $\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -36$

a tedy $x_2 = -3$

Algebraický doplněk

definice: je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n nad $\mathbf{T}$ a $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pak *algebraický doplněk* nebo také *kofaktor* prvku a_{ij} je skalár $m_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$, kde M_{ij} je matice, kterou dostaneme z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce

příklad v matici $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ spočteme kofaktor

m_{21} prvku a_{21}: $m_{21} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(18 - 24) = 6$

podobně $m_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 18 = -9$

Rozvoj determinantu podle sloupce

věta: je-li $A = (a_{ij})$ matice řádu n a $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pak platí
$\det A = a_{1j}m_{1j} + a_{2j}m_{2j} + \cdots + a_{nj}m_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}m_{ij}$

důkaz: v každém součinu v $\det A = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$ je právě jeden činitel z j-tého sloupce matice A a to $a_{\pi(j),j}$

pro každý prvek a_{ij} sdružíme sčítance, které jej obsahují, a vytkneme jej; dokážeme, že po vytknutí zůstane součet rovný m_{ij}

1. krok důkazu: budeme předpokládat, že $\mathbf{a}_n = \mathbf{e}_n$; pak platí

$\det A = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} =$

$\sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} sgn(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} =$

$\sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} sgn(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1} =$

$(-1)^{n+n} \sum_{\pi \in S_{n-1}} sgn(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1} =$
$(-1)^{n+n} \det M_{nn} = m_{nn}$

Krok za krokem

2. krok důkazu: nyní předpokládáme, že $\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_i$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$

matici A upravíme tak, že napřed pomocí $n - j - 1$ transpozic sloupců přesuneme sloupec $\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_i$ na místo n-tého sloupce tak, aby se pořadí ostatních sloupců nezměnilo

dále pomocí $n - i - 1$ transpozic řádků upravíme matici tak, aby se poslední sloupec matice rovnal $\mathbf{e}_n$ a pořadí ostatních řádků se nezměnilo; dostaneme tak matici B, jejíž minor N_{nn} se rovná minoru M_{ij} matice A a n-tý sloupec $\mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n$; podle 1. kroku

$\det A = (-1)^{n-j-1+n-i-1} \det B = (-1)^{i+j} \det N_{nn} =$
$(-1)^{i+j} \det M_{ij} = m_{ij}$

3. krok důkazu: vektor $\mathbf{a}_j$ matice A se rovná $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i$; pak

$\det A = \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) =$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{e}_i|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}m_{ij}$

Rozvoj determinantu podle řádku

opětovným použitím rovnosti $\det A = \det(A^T)$ dostaneme

větu o rozvoji determinantu podle řádku: pro matici A řádu n a libovolné $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ platí $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}m_{ij}$

příklad: spočteme rozvojem podle prvního řádku ještě jednou

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = (36-48) - 2(36-36) + 3(32-24) = 12$$

Obecný postup: pro rozvoj determinantu obvykle vybíráme řádek nebo sloupec s velkým počtem prvků rovných 0

takový řádek nebo sloupec často napřed vytvoříme pomocí elementárních řádkových nebo sloupcových úprav

Adjungovaná matice

definice: *kofaktorová matice* ke čtvercové matici $A = (a_{ij})$ je matice $M = (m_{ij})$ tvořená algebraickými doplňky prvků a_{ij}, *adjungovaná matice* k matici A je matice M^T transponovaná ke kofaktorové matici M, **značení**: *adj A*

tvrzení o falešném rozvoji: pro čtvercovou matici A řádu n a libovolné dva různé indexy $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí
$a_{1l}m_{1k} + a_{2l}m_{2k} + \cdots + a_{nl}m_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{il}m_{ik} = 0$
důkaz: označíme $B = (b_{ij})$ matici, kterou dostaneme z A tak, že nahradíme k-tý sloupec $\mathbf{a}_k$ l-tým sloupcem $\mathbf{a}_l$, ostatní sloupce jsou beze změny

$\det B = 0$ podle pomocného tvrzení na str. 6-37

algebraický doplněk prvku b_{ik} v B se rovná algebraickému doplňku m_{ik} prvku a_{ik} v A

rozvojem $\det B$ podle k-tého sloupce dostaneme
$0 = \det B = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}m_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{il}m_{ik}$

Formulka pro inverzní matici

tvrzení: pro čtvercovou matici A řádu n platí
$adj\,(A) \cdot A = A \cdot adj\,(A) = \det(A) \cdot I_n$

důkaz: prvek na místě (k,l) v součinu $adj\,(A) \cdot A$ se rovná skalárnímu součinu k-tého řádku matice $adj\,A = M^T$ s l-tým sloupcem matice A, tj. k-tého sloupce kofaktorové matice M s l-tým sloupcem matice A

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ik} a_{il} = \begin{cases} 0 & \text{pokud} \quad k \neq l, \quad \text{(falešný rozvoj)} \\ \det A & \text{pokud} \quad k = l, \quad \text{(rozvoj podle sloupce)} \end{cases}$$

proto $adj\,(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$

rovnost $A \cdot adj\,(A) = \det(A) \cdot I_n$ dokážeme podobně a nebo aplikujeme právě dokázanou rovnost na matici A^T

důsledek: je-li matice A regulární, pak platí

$$A^{-1} = \frac{adj\,A}{\det A}$$

Inverzní matice k matici řádu 2

pro regulární matici $A = (a_{ij})$ řádu 2 tak platí

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^{-1} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

pro regulární matici $A = (a_{ij})$ řádu 3 platí

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$(\det A)^{-1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Vandermondova matice

úloha: je dáno těleso $\mathbf{T}$, n jeho navzájem různých prvků $a_1, \dots, a_n$ a dalších n prvků $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{T}$

máme najít polynom $f(x) = k_0 + k_1 x + \cdots + k_{n-1} x^{n-1}$ stupně nejvýše $n-1$ s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$, který v zadaném bodě a_i nabývá předepsané hodnoty b_i pro každé $i = 1, \dots, n$

řešení: musí platit $f(a_i) = k_0 + k_1 a_i + \cdots + k_{n-1} a_i^{n-1} = b_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$

neznámé koeficienty $k_0, \dots, k_{n-1} \in \mathbf{T}$ tak musí splňovat soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Vandermondův determinant

matice této soustavy se nazývá *Vandermondova matice* a její determinant *Vandermondův determinant*

tvrzení: pro libovolné $n \geq 2$ a prvky $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{T}$ platí

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

důkaz: přečíst ve skriptech

jsou-li prvky $a_1, \dots, a_n$ navzájem různé, je Vandermondova matice regulární, soustava pro neznámé koeficienty $k_0, \dots, k_{n-1}$ má jednoznačné řešení a polynom $f(x)$ je proto určený jednoznačně

nazývá se *Lagrangeův interpolační polynom*

Digitální klíče ke korunovačním klenotům

zvolíme nějaké dostatečně velké prvočíslo p, sejf s korunovačními klenoty otevře náhodně zvolené číslo $d \in \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$

klíčník musí informaci o klíči d rozdělit mezi 7 státních a církevních hodnostářů tak, aby jej bylo možné zjistit pouze tehdy, když se všichni sejdou

udělá to tak, že zvolí náhodně koeficienty $k_1, k_2, \dots, k_6 \in \mathbb{Z}_p$ a získá tím polynom $f(x) = d + k_1 x + \cdots + k_6 x^6$

platí $f(0) = d$

dále zvolí náhodně 7 navzájem různých nenulových čísel $a_1, \dots, a_7$

i-tému hodnostáři přidělí dvojici $(a_i, b_i = f(a_i))$

Otevírání sejfu

při významné příležitosti se sejde všech 7 hodnostářů

polynom $f(x)$ je jednoznačně určený hodnotami $f(a_i) = b_i$ pro $i = 1, \dots, 7$, všechny prvky a_i, b_i jsou k dispozici

řešením soustavy na str. 6-52 najdou jednoznačně určený Lagrangeův interpolační polynom f a tedy také klíč $d = f(0)$

co když je pan president indisponovaný?

zbylých 6 hodnostářů má k dispozici dvojice (a_i, b_i) pro $i = 2, \dots, 7$

pro jakékoliv $d \in \mathbb{Z}_p$ existuje právě jeden polynom stupně nejvýše 6, pro který platí $f(a_i) = b_i$ pro $i = 2, \dots, 7$ a $f(0) = d$ (proto jsme volili prvky $a_1, \dots, a_7$ nenulové)

všechny možné hodnoty klíče jsou při znalosti pouhých šesti dvojic (a_i, b_i) stejně pravděpodobné

Determinanty - shrnutí

přidat determinant blokově diagonální matice

- **základní**: permutace, jejich skládání
- **základní**: složení permutace na konečné množině z transpozic, znaménko permutace (sudé a liché permutace), znaménko složení permutací
- **základní**: definice determinantu obecné čtvercové matice
- **základní**: lineární vlastnosti determinantu
- **základní**: determinant transponované matice
- **základní**: ekvivalentní definice regulární matice pomocí determinantu
- **základní**: věta o součinu determinantů
- **základní**: rozvoj determinantu podle řádku nebo podle sloupce
- **základní**: adjungovaná matice a vzorec pro inverzní matici pomocí determinantů

Determinanty - shrnutí

- **důležité**: geometrický význam determinantu reálných matic řádu 2 a 3, orientace prostoru, obsah rovnoběžníku, objem rovnoběžnostěnu
- **důležité**: permutační matice
- **důležité**: vliv elementárních řádkových úprav na determinant, determinant trojúhelníkové matice
- **důležité**: Cramerovo pravidlo
- **důležité**: Vandermondova matice a Vandermondův determinant
- **pro zajímavost**: Sarussovo pravidlo pro výpočet determinantu řádu 3
- **pro zajímavost**: hra „15“
- **pro zajímavost**: digitální klíče ke korunovačním klenotům

Kapitola 7

Skalární součin

Skalární součin - obsah

- *Standardní skalární součin*
- *Obecný skalární součin*
- *Norma*
- *Kolmost/ortogonalita*
- *Metoda nejmenších čtverců*

Standardní skalární součin - obsah

- *Standardní skalární součin*
  V reálných aritmetických prostorech
  V komplexních aritmetických prostorech

Opakování

standardní (bodový) skalární součin v reálném aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^n$ jsme definovali v úvodní kapitole na str. 1-60

pro dva vektory $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ a $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ je standardní skalární součin definován jako reálné číslo
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$

pomocí násobení matic můžeme standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zapsat jako $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$; tomuto zápisu budeme nadále dávat přednost

euklidovskou délku nebo také *euklidovskou normu* vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pak definujeme jako $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$

Geometrický význam v rovině

na str. 60 jsme také odvodili geometrický význam skalárního součinu dvou nenulových vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$

$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos\varphi$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$

protože $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$, nezáleží na tom, měříme-li úhel mezi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ v kladném nebo záporném směru

$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$ právě když jsou vektory kolmé

$\mathbf{x}^T\mathbf{y} > 0$ právě když je úhel mezi nimi menší než $\pi/2$ (ostrý)

$\mathbf{x}^T\mathbf{y} < 0$ právě když je úhel mezi nimi větší než $\pi/2$ (tupý)

čemu se rovná množina $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^T\mathbf{y} < 0\}$?

co znamená rovnost $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, (\|\mathbf{y}\| \cdot \cos\varphi)$?

Geometrický význam v prostoru

kdy je $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$? kdy $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = -\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$?

geometrický význam skalárního součinu vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ je stejný jako v rovině

jsou-li oba nenulové, pak $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos\varphi$, kde φ je úhel mezi vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$

čemu se rovná množina $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^T\mathbf{y} < 0\}$ pro vektor $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$?

čemu se rovná množina $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^T\mathbf{y} < 5\}$ pro vektor $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$?

čemu se rovná množina $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^T\mathbf{y} < a\}$ pro libovolné reálné číslo a ?

Základní vlastnosti skalárního součinu

do reálných aritmetických prostorů vyšších dimenzí přenášíme geometrický význam na základě analogie

můžeme proto mluvit o úhlu mezi dvěma nenulovými vektory v $\mathbb{R}^{128}$

nebo o úhlu, který svírají dvě digitální 8 Mpx fotografie

základní vlastnosti standardního skalárního součinu jsou

tvrzení: pro každé vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ a každý skalár $r \in \mathbb{R}$ platí

1. $\mathbf{x}^T(r\mathbf{y}) = r(\mathbf{x}^T\mathbf{y})$
2. $\mathbf{x}^T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z}$
3. $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$
4. $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \geq 0$
5. $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 0$ právě když $\mathbf{x} = \mathbf{o}$

Standardní skalární součin v $\mathbb{C}^n$

jsou-li $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ a $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ dva komplexní aritmetické vektory, pak definujeme *standardní skalární součin komplexních vektorů* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ jako komplexní číslo $\overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n$

důvod pro tuto definici spočívá v tom, že $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \overline{x}_1 x_1 + \cdots + \overline{x}_n x_n$ je vždy nezáporné reálné číslo

pro každé komplexní číslo $z = a + ib$ totiž platí $\overline{z}z = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$

můžeme pak opět definovat délku/normu vektoru $\mathbf{x}$ jako nezáporné reálné číslo $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$

abychom mohli také standardní skalární součin komplexních vektorů zapsat maticově, definujeme hermitovsky sdružené matice

Hermitovsky sdružené matice

definice: je-li $A = (a_{ij})_{m\times n}$ komplexní matice, pak matice $B = (b_{ij})_{n\times m}$ se nazývá *hermitovsky sdružená* k matici A, platí-li $b_{ij} = \overline{a}_{ji}$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m$; **značení** A^*
komplexní matice A se nazývá *hermitovská*, platí-li $A^* = A$

příklad: $\begin{pmatrix} 1+2i & 3 & i \\ 0 & 3-2i & 4i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 \\ 3 & 3+2i \\ -i & -4i \end{pmatrix}$

cvičení: dokažte, že komplexní matice A typu $m \times n$ a B typu $n \times p$ platí $(AB)^* = B^*A^*$

obsahuje-li matice A samá reálná čísla, pak $A^* = A^T$

pomocí hermitovsky sdružených matic můžeme standardní skalární součin komplexních vektorů zapsat jako $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}^*\mathbf{y}$

Vlastnosti standardního skalárního součinu komplexních vektorů

na základě předchozí poznámky víme, že se oba standardní skalární součiny (reálných nebo komplexních artmetických vektorů) shodují, mají-li oba vektory všechny složky reálné

tvrzení pro každé vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ a každý skalár $r \in \mathbb{C}$ platí

1. $\mathbf{x}^*(r\mathbf{y}) = r(\mathbf{x}^*\mathbf{y})$
2. $\mathbf{x}^*(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}^*\mathbf{y} + \mathbf{x}^*\mathbf{z}$
3. $\mathbf{x}^*\mathbf{y} = \overline{\mathbf{y}^*\mathbf{x}}$
4. $\mathbf{x}^*\mathbf{x} \geq 0$
5. $\mathbf{x}^*\mathbf{x} = 0$ právě když $\mathbf{x} = \mathbf{o}$

důkaz: vlastnosti 1. a 2. platí obecně pro počítání s maticemi, vlastnosti 3., 4. a 5. plynou přímo z definice standardního skalárního součinu komplexních aritmetických vektorů

Obecný skalární součin - obsah

Definice skalárního součinu na reálných prostorech

operace připomínající standardní skalární součin se v matematice objevují často

definice: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, pak zobrazení, která každé uspořádané dvojici vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle \in \mathbb{R}$, nazýváme *skalární součin* na $\mathbf{V}$, jestliže pro každé vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ a každý skalár $r \in \mathbb{R}$ platí

1. $\langle \mathbf{x}|r\mathbf{y}\rangle = r\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle$
2. $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}|\mathbf{z}\rangle$
3. $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle$
4. $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle \geq 0$
5. $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle = 0$ právě když $\mathbf{x} = \mathbf{o}$

aritmetický prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem nazýváme *euklidovský prostor* dimenze n

volbou $r = 0$ v podmínce 1. dostáváme $\langle \mathbf{x}\,|\mathbf{o}\,\rangle = 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

Definice skalárního součinu na komplexních prostorech

definice: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, pak zobrazení, která každé uspořádané dvojici vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ přiřadí číslo $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{C}$ nazýváme *skalární součin* na $\mathbf{V}$, jestliže pro každé vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ a každý skalár $r \in \mathbb{C}$ platí

1. $\langle \mathbf{x} | r\mathbf{y} \rangle = r \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$
2. $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle$
3. $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle}$
4. $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle$ je nezáporné reálné číslo
5. $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0$ právě když $\mathbf{x} = \mathbf{o}$

aritmetický prostor $\mathbb{C}^n$ se skalárním součinem nazýváme *unitární prostor* dimenze n

odlišnosti mezi oběma definicemi

Reálný Hilbertův prostor 1

v prostoru všech reálných posloupností $\mathbb{R}^\omega$ vezmeme podmnožinu ℓ_2 tvořenou všemi posloupnostmi $(a_n)_{n=1}^\infty$, pro které řada $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ konverguje

tvrzení: ℓ_2 je podprostor $\mathbb{R}^\omega$

důkaz: musíme dokázat uzavřenost ℓ_2 na obě operace v $\mathbb{R}^\omega$

uzavřenost na násobení skalárem je jednoduchá; je-li $\mathbf{a} = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ a $k \in \mathbb{R}$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty (ka_n)^2 = k^2 \sum_{n=1}^\infty a_n^2$ také konverguje, což znamená, že $k\mathbf{a} \in \ell_2$

k důkazu uzavřenosti ℓ_2 na sčítání využijeme jednoduchou vlastnost reálných čísel, totiž že $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ pro každá čísla $a, b \in \mathbb{R}$

odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^\infty |a_n b_n|$ konverguje pro libovolné $\mathbf{a} = (a_n)_{n=1}^\infty$ a $\mathbf{b} = (b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$

proto řady $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ a $\sum_{n=1}^\infty (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2)$ také konvergují, což dokazuje, že $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \ell_2$ pro každé $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell_2$

Reálný Hilbertův prostor 2

na prostoru ℓ_2 definujeme zobrazení $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ pro každé $\mathbf{a} = (a_n)_{n=1}^\infty, \mathbf{b} = (b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$; konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ jsme dokázali na předchozím slajdu dole

tvrzení: zobrazení $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ je skalární součin na prostoru ℓ_2

důkaz: ověření všech pěti podmínek z definice skalárního součinu je přímočaré

definice: prostor ℓ_2 s právě definovaným skalárním součinem se nazývá (reálný) *Hilbertův prostor*

Hilbertův prostor ℓ_2 obsahuje euklidovské prostory všech dimenzí jako podprostory

Komplexní Hilbertův prostor

podobně je definován komplexní Hilbertův prostor ℓ_2 jako podprostor prostoru $\mathbb{C}^\omega$ všech posloupností komplexních čísel takových, že řada $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2$ konverguje

skalární součin $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ dvou posloupností $\mathbf{a} = (a_n)_{n=1}^\infty, \mathbf{b} = (b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ je definován jako součet řady $\sum_{n=1}^\infty \overline{a}_n b_n$

konvergence této řady stejně jako uzavřenost prostoru ℓ_2 na sčítání se dokáže podobně jako v reálném případě

komplexní Hilbertův prostor ℓ_2 je základním matematickým nástrojem kvantové mechaniky

Skalární součin definovaný maticí 1

je-li $A = (a_{ij})$ reálná (nebo komplexní) matice řádu n, pak můžeme definovat zobrazení $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (nebo $f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$) předpisem $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ (nebo $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$)

protože $f(\mathbf{x}, r\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A(r\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T (rA\mathbf{y}) = r(\mathbf{x}^T A\mathbf{y}) = rf(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a $f(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T A(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y} + \mathbf{x}^T A\mathbf{z} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ splňuje f první dvě podmínky z definice obecného skalárního součinu

má-li platit $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, musí speciálně platit $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ pro každé $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

protože $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i^T A\mathbf{e_j} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{a}_j = a_{ij}$ a podobně $f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = a_{ji}$, k rovnosti $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ je nutné, aby platilo $a_{ij} = a_{ji}$ pro každé i, j, neboli $A^T = A$, tj. A musí být symetrická matice

Skalární součin definovaný maticí 2

pokud $A^T = A$ platí, je $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T \mathbf{y} = ((A\mathbf{x})^T \mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T (A\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

to znamená, že f splňuje podmínku 3. z definice obecného skalárního součinu právě když A je symetrická matice

analogicky dokážeme, že zobrazení $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$ definované komplexní maticí A splňuje první tři podmínky definice obecného skalárního součinu na $\mathbb{C}^n$ právě když $A^* = A$

později dokážeme, že zobrazení $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ (nebo zobrazení $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$) splňuje podmínky 4. a 5. obecné definice skalárního součinu na $\mathbb{R}^n$ (nebo $\mathbb{C}^n$) právě když existuje reálná (nebo komplexní) matice B taková, že $B^T B = A$ (nebo $B^* B = A$)

takovým maticím se říká *pozitivně definitní* a setkáme se s nimi ještě mnohokrát

Integrál jako skalární součin

na prostoru $C(-1, 1)$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ definujeme skalární součin $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} fg$

je-li $C(-1, 1)$ prostor všech spojitých komplexních funkcí definovaných na intervalu reálných čísel $\langle a, b\rangle$ definuje předpis $\langle f|g\rangle = \int_a^b \overline{f} g$ skalární součin

Norma - obsah

- *Norma*
  Norma definovaná skalárním součinem
  Cauchy-Schwarzova nerovnost

Definice normy definované skalárním součinem

standardní skalární součin v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ definuje euklidovskou normu (vzdálenost)

podobně také obecný skalární součin na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ definuje *normu* prvků $\mathbf{V}$

definice: je-li $\mathbf{V}$ reálný nebo komplexní vektorový prostor se skalárním součinem $\langle|\rangle$, pak definuje normu $\|\mathbf{u}\|$ prvku $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ jako reálné číslo $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle}$

příklad: norma vektoru $\mathbf{u} = (1-i, 2, 3+2i)^T$ v unitárním prostoru $\mathbb{C}^3$ (tj. se standardním skalárním součinem) se rovná
$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^*\mathbf{u}} = \sqrt{(1+i, 2, 3-2i)(1-i, 2, 3+2i)^T} = \sqrt{2+4+13} = \sqrt{19}$

obecně: je-li $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{C}^n$, pak norma $\|\mathbf{u}\|$ určená standardním skalárním součinem v $\mathbb{C}^n$ je $\sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2}$

Základní vlastnosti normy

příklad: norma posloupnosti $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ v prostoru ℓ_2 se rovná
$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$) se skalárním součinem $\langle|\rangle$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a $t \in \mathbb{R}$ (nebo $t \in \mathbb{C}$), pak platí

- $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, přičemž rovnost platí právě když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$
- $\|t\mathbf{u}\| = |t|\, \|\mathbf{u}\|$
- $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$

důkaz: první tvrzení plyne ze 4. a 5. podmínky pro skalární součin

$\|t\mathbf{u}\|^2 = \langle t\mathbf{u}|t\mathbf{u}\rangle = \bar{t}t\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle = |t|^2\|\mathbf{u}\|^2$

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}|\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}|\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle =$
$\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle =$
$2\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$

Polarizační identity

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$) se skalárním součinem $\langle|\rangle$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a $t \in \mathbb{R}$ (nebo $t \in \mathbb{C}$), pak platí

- $Re\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$
- $Im\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle = -\frac{i}{2}(\|\mathbf{u}+i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2)$

důkaz: spočteme $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}\,|\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}\,|\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}\,|\mathbf{v}\rangle =$
$\|\mathbf{u}\|^2 + \langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle + \overline{\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2Re\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2$

v druhé části spočteme
$\|\mathbf{u}+i\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}\,|\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}\,|i\mathbf{v}\rangle + \langle i\mathbf{v}\,|\mathbf{u}\rangle + \langle i\mathbf{v}\,|i\mathbf{v}\rangle =$
$\|\mathbf{u}\|^2 + i\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle + \bar{i}\,\langle \mathbf{v}\,|\mathbf{u}\rangle + i\cdot\bar{i}\|\mathbf{v}\|^2 =$
$\|\mathbf{u}\|^2 + i(\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle - \overline{\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2i\cdot Im\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2$

odtud spočteme $Im\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{2i}(\|\mathbf{u}+i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2) =$
$-\frac{i}{2}(\|\mathbf{u}+i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2)$

Cauchyho-Schwarzova nerovnost

následující důležitá věta ukazuje, že také obecný skalární součin můžeme použít k měření úhlů

věta: je-li $\mathbf{V}$ reálný (nebo komplexní) vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, pak platí

$$|\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle\,| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

a rovnost nastává právě tehdy, když posloupnost $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je lineárně závislá posloupnost

důkaz: je-li posloupnost $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ lineárně závislá, platí buď $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ nebo $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ (nebo $t \in \mathbb{C}$)

je-li $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$, platí $|\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle\,| = |\,\langle \mathbf{u}\,|t\mathbf{u}\rangle\,| = |t\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{u}\rangle\,| = |t|\|\mathbf{u}\|^2 =$
$|t|\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\|$

případ $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ plyne z předchozího, neboť $|\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle\,| = |\,\langle \mathbf{v}\,|\mathbf{u}\rangle\,|$

Dokončení důkazu Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti

je-li posloupnost $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ lineárně nezávislá, platí $\mathbf{v} \neq t\mathbf{u}$ pro jakýkoliv skalár t; pro každý skalár t platí proto také

$0 < \|\mathbf{v} - t\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{v} - t\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} - t\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle - t \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} \rangle - \overline{t} \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} - t\mathbf{u} \rangle$

nyní zvolíme t tak, aby platilo $0 = \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} - t\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle - t \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \rangle$

k tomu je nutné a stačí, aby $t = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}$ ($\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ neboť $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je LN)

po dosazení do pravé strany prvního řádku dostáváme

$$0 < \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} = \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \overline{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}}{\|\mathbf{u}\|^2} = \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

příklad: pro libovolná reálná čísla $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4$ platí

$$|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4| \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}$$

stačí použít Cauchyho-Schwarzovu nerovnost pro vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T \in \mathbb{R}^4$ a standardní skalární součin v $\mathbb{R}^4$

Důsledky Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti

pro libovolné dva nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ v prostoru se skalárním součinem $\langle \, | \, \rangle$ platí $\frac{|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{u}\|} \leq 1$

v případě, že $\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle$ je vždy reálné číslo, existuje jednoznačně určený úhel $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro který platí $\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{u}\|}$

definice: je-li $\mathbf{V}$ reálný vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \, | \, \rangle$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou dva nenulové vektory, pak definujeme *úhel mezi vektory* $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jako číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro které platí $\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{u}\|}$

příklad: spočítáme úhel φ_1 mezi posloupnostmi $\mathbf{u} = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ a $\mathbf{e}_1 = (\delta_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ v reálném Hilbertově prostoru ℓ_2; platí $\|\mathbf{u}\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$, $\|\mathbf{e}_1\| = 1$ a $\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{e}_1 \rangle = 1$; proto $\cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$

podobně pro úhel φ_2 mezi $\mathbf{u}$ a $\mathbf{e}_2$ platí $\cos \varphi_2 = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}$

Trojúhelníková nerovnost a kosinová věta

tvrzení: v reálném nebo komplexním prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle \, | \, \rangle$ pro libovolné dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

důkaz: spočítáme $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle =$
$\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle} + \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle =$
$\|\mathbf{u}\|^2 + 2Re(\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle) + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle| + \|\mathbf{v}\|^2$
$\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$

tvrzení: pro libovolné dva nenulové prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ reálného vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle \, | \, \rangle$ platí
$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \varphi$,
kde φ je úhel mezi vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$

důkaz: opět stačí pouze počítat $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle =$
$\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \rangle - 2 \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \varphi$

Obecné normy informativně

definice: *norma* na reálném nebo komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je zobrazení, které každému prvku $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ přiřazuje reálné číslo $\|\mathbf{x}\|$ a které splňuje podmínky

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, přičemž $\|\mathbf{x}\| = 0$ právě když $\mathbf{x} = 0$,
2. $\|t\mathbf{x}\| = |t| \, \|\mathbf{x}\|$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ a každý skalár t
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

euklidovská norma určená standardním skalárním součinem není jedinou možnou normou na $\mathbb{R}^n$

pohybujeme-li se po čtvercové síti, pak je vhodnější používat *součtovou normu* $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

jiný příklad používané normy na $\mathbb{R}^n$ je *maximální norma* $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

ani jedna z těchto norem není určena žádným skalárním součinem na $\mathbb{R}^n$, neboť nesplňují „rovnoběžníkovou identitu“ - třetí podmínku z tvrzení na str. 7-22

Kolmost/ortogonalita - obsah

- *Kolmost/ortogonalita*

  Kolmost/ortogonalita

  Ortonormální báze

  Gramova-Schmidtova ortogonalizace

  Unitární a ortogonální matice

  Ortogonální doplněk

Definice kolmosti

následující definici budeme používat neustále

definice: je-li $\mathbf{V}$ reálný nebo komplexní prostor se $\langle\,|\,\rangle$, pak dva prvky $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ nazýváme *kolmé (ortogonální)* pokud $\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle = 0$;
označení: $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$

posloupnost $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)$ prvků $\mathbf{V}$ se nazývá *ortogonální*, platí-li $\mathbf{u}_i\perp\mathbf{u}_j$ kdykoliv $i\neq j$; ortogonální posloupnost se nazývá *ortonormální*, pokud navíc $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ pro každé $i = 1,2,\dots,k$

množina $M\subseteq V$ se nazývá *orotogonální*, platí-li $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ pro každé dva různé prvky $\mathbf{u},\mathbf{v}\in M$; ortogonální množina $M\subseteq V$ se nazývá *ortonormální*, pokud navíc $\|\mathbf{u}\| = 1$ pro každé $\mathbf{u}\in M$

zatímco ortogonální posloupnost nebo množina může obsahovat nulový prvek $\mathbf{o}$, v ortonormální posloupnosti nebo množině musí být všechny prvky nenulové

Lineární nezávislost ortogonální posloupnosti vektorů

platí-li $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$, pak také $(r\mathbf{u})\perp(s\mathbf{v})$ pro libovolné skaláry r,s; platí totiž $\langle r\mathbf{u}\,|s\mathbf{v}\rangle = \overline{r}s\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle$

dále pro každý nenulový vektor $\mathbf{u}$ platí $\left\|\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right\| = 1$ (normalizace $\mathbf{u}$)

pozorování: jeli posloupnost nenulových vektorů $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)$ ortogonální, pak posloupnost $(\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|},\dots,\frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|})$ je ortonormální

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ reálný nebo komplexní prostor se $\langle\,|\,\rangle$, pak každá ortogonální posloupnost nenulových prvků $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k)$ je LN

důkaz: je-li $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, pak pro každé $i = 1,\dots,k$ platí $\langle \mathbf{u}_i\,|a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k\rangle = \langle \mathbf{u}_i\,|\mathbf{o}\rangle = 0$;
protože platí $0 = \langle \mathbf{u}_i\,|a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k\rangle =$
$a_1\langle \mathbf{u}_i\,|\mathbf{u}_1\rangle + \cdots + a_i\langle \mathbf{u}_i\,|\mathbf{u}_i\rangle + \cdots + a_k\langle \mathbf{u}_i\,|\mathbf{u}_k\rangle = a_i\|\mathbf{u}_i\|^2$,
plyne odtud $a_i = 0$ pro každé $i = 1,\dots,k$, což dokazuje, že $(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k)$ je lineárně nezávislá posloupnost

Ortogonální a ortonormální báze

z předchozího tvrzení plyne, že každá ortogonální posloupnost n nenulových vektorů v prostoru $\mathbf{V}$ dimenze n se skalárním součinem je báze ve $\mathbf{V}$

podobně je každá ortonormální posloupnost n vektorů v prostoru $\mathbf{V}$ dimenze n se skalárním součinem báze ve $\mathbf{V}$

příklad: kanonická báze je ortonormální báze v prostoru $\mathbb{R}^n$ (nebo v $\mathbb{C}^n$) se standardním skalárním součinem

cvičení: dokažte, že matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ definuje skalární součin na $\mathbb{R}^2$ předpisem $\langle (u_1,u_2)^T\,|(v_1,v_2)^T\rangle = (u_1,u_2)A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$,
dokažte, že posloupnost $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ je ortogonální báze v $\mathbb{R}^2$ s tímto skalárním součinem a spočtěte normy jejích prvků

Pythagorova věta

příklad: v prostoru spojitých funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ se skalárním součinem $\langle f \,|g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$ je množina funkcí $\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \ldots\}$ ortogonální

tvrzení: v prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ platí pro dva kolmé prvky $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ rovnost $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$

důkaz: spočteme $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v} \,|\mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle =$
$\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$

poznámka: z předchozího důkazu také vidíme, že z rovnosti $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ pro dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ plyne
$0 = \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{u} \rangle = 2\,Re(\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle)$

je-li prostor $\mathbf{V}$ nad reálnými čísly, platí $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle = 0$ a tedy $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

je-li prostor $\mathbf{V}$ nad komplexními čísly, platí pouze $Re(\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{v} \rangle) = 0$, prvky $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ nemusí být kolmé

Souřadnice vzhledem k ortonormální bázi

ortonormální báze v prostorech se skalárním součinem jsou důležité, protože umožňují snadno spočítat souřadnice libovolného prvku vzhledem k těmto bázím

tvrzení: je-li $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze v prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, pak platí
$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}_1 \,|\mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}_2 \,|\mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}_n \,|\mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_n$,
tj. $[\mathbf{u}]_B = (\langle \mathbf{v}_1 \,|\mathbf{u} \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \,|\mathbf{u} \rangle, \ldots, \langle \mathbf{v}_n \,|\mathbf{u} \rangle)^T$

důkaz: vyjádříme $\mathbf{u}$ jako LK prvků báze $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$

$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$; tj. $[\mathbf{u}]_B = (a_1, \ldots, a_n)^T$

pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ skalárně vynásobíme prvkem $\mathbf{v}_i$ zleva:

$\langle \mathbf{v}_i \,|\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}_i \,|a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_i\mathbf{v}_i + \cdots + a_n\mathbf{v}_n \rangle =$
$a_1 \langle \mathbf{v}_i \,|\mathbf{v}_1 \rangle + \cdots + a_i \langle \mathbf{v}_i \,|\mathbf{v}_i \rangle + \cdots a_n \langle \mathbf{v}_i \,|\mathbf{v}_n \rangle = a_i$

Příklad

příklad: posloupnost $\left(\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je ortogonální v prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem

platí $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2}$

posloupnost $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ je tedy ortonormální báze v $\mathbb{R}^2$

najdeme souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi B:

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{2}}$; $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

platí proto $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{6}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geometrický význam souřadnic vzhledem k ortonormální bázi

je-li $\mathbf{v}$ prvek s normou $\|\mathbf{v}\| = 1$ v prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, pak prvek $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{u} \rangle \mathbf{v} = (\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\| \cos\varphi)\mathbf{v} = (\|\mathbf{u}\| \cos\varphi)\mathbf{v}$ je pravoúhlý průmět, budeme mu říkat *ortogonální projekce*, vektoru $\mathbf{u}$ do přímky generované vektorem $\mathbf{v}$

platí totiž $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{u} - \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{u} \rangle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{v} \rangle = 0$

je-li $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze v prostoru $\mathbf{V}$, pak vyjádření $\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}_1 \,|\mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}_2 \,|\mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}_n \,|\mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_n$ říká, že $\mathbf{u}$ je součtem ortogonálních projekcí vektoru $\mathbf{u}$ do přímek generovaných jednotlivými vektory $\mathbf{v}_i$ báze B

Skalární součin a ortonormální báze

koeficientům vyjádření $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ vektoru $\mathbf{u}$ jako lineární kombinace prvků ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru $\mathbf{V}$ se také říká *Fourierovy koeficienty* vektoru $\mathbf{u}$ vzhledem k bázi B

známe-li v prostoru $\mathbf{V}$ s obecným skalárním součinem nějakou ortonormální bázi $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, můžeme hodnotu skalárního součinu $\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{w} \rangle$ dvou prvků $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ spočítat snadno pomocí jejich Fourierových koeficientů vzhledem k bázi B

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ prostor se skalárním součinem $\langle \,|\, \rangle$, $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze ve $\mathbf{V}$, a $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, pak platí $\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{w} \rangle = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B$

důkaz: je-li $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^n b_j\mathbf{v}_j$, pak platí

$$\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{w} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{v}_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^n b_j\mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_i} b_j \langle \mathbf{v}_i \,|\, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_i} b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{w}]_B$$

Frobeniova norma

na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$ reálných matice typu $m \times n$ definujeme skalární součin dvou matic $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jako $\langle A \,|\, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$

skalární součin $\langle A \,|\, B \rangle$ se rovná standardnímu skalárnímu součinu aritmetických vektorů $(\mathbf{a}_1^T | \mathbf{a}_2^T | \cdots | \mathbf{a}_n^T)^T$ a $(\mathbf{b}_1^T | \mathbf{b}_2^T | \cdots | \mathbf{b}_n^T)^T$

podobně definujeme skalární součin dvou komplexních matic $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ typu $m \times n$ jako $\langle A \,|\, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij} b_{ij}$

norma $\|A\|$ reálné nebo komplexní matice $A = (a_{ij})$ určená tímto skalárním součinem se rovná $\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$

definice: je-li $A = (a_{ij})$ reálná nebo komplexní matice typu $m \times n$, pak norma $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$ se nazývá *Frobeniova norma* matice A; někdy se tato norma zapisuje jako $\|A\|_2$

Ortonormální báze v prostoru matic a formát *jpeg*

na str. 2-63 jsme si rekli, že barevná digitální fotografie je soubor tří čtvercových obrovských matic, jejichž prvky jsou celá čísla z intervalu $\langle -127, +128 \rangle$

jeden ze způsobů komprimace těchto matic je formát *jpeg*

jpeg rozkládá velkou matici do disjunktního sjednocení matic řádu 8, tzv. „dlaždic“

dimenze prostoru $\mathbb{R}^{8\times 8}$ je 64

formát *jpeg* vyjadřuje matice z $\mathbb{R}^{8\times 8}$ pomocí jejich souřadnic ve speciálně zvolené ortonormální bázi $\mathbb{R}^{8\times 8}$

tato báze je zvolena s ohledem na to, jak vnímá lidské oko

Příklad ortonormální báze v $\mathbb{R}^{8\times 8}$, 1. část

napřed vyrobíme sloupcové vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_8 \in \mathbb{R}^8$ s prvky ± 1

začneme dvěma vektory z $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}$

z nich vyrobíme $\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix}$, a nakonec

$$\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \\ - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \\ + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \\ - \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \\ + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \\ - \\ + \\ - \\ + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \\ + \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \\ - \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}$$

Příklad ortonormální báze v $\mathbb{R}^{8\times 8}$, 2. část

všimněme si, že v každém řádku je posloupnost vektorů ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v příslušném reálném artimetickém prostoru, prvním mají normu $\sqrt{2}$, ve druhém 2 a ve třetím $\sqrt{8}$

nyní vyrobíme množinu 64 matic v prostoru $\mathbb{R}^{8\times 8}$:
$A_{ij} = \{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^T : i,j = 1,2,\ldots,8\}$; platí $A_{ij} = A_{ji}^T$ pro každé i,j

pozorování: množina matic $\{A_{ij}, i,j = 1,\ldots,8\}$ je ortogonální a všechny matice A_{ij} jsou nenulové, jejich norma $\|A\|_2$ je 8;

matice $\frac{1}{8}A_{ij}$ uspořádáme do posloupnosti a dostaneme tak ortonormální bázi v $\mathbb{R}^{8\times 8}$

komprimace dat ve formátu *jpeg* pak spočívá v tom, že neukládá všechny koeficienty při vyjádření dlaždice A jako lineární kombinace matic A_{ij}; označíme-li první čtyři 8-složkové vektory dole na předchozí straně postupně $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3$, *jpeg* ukládá pouze koeficienty u matic $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{13}, A_{22}, A_{31}$

Ortogonální projekce na podprostor 1

tvrzení: je-li $\mathbf{P}$ konečně generovaný podprostor prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$ nějaká ortonormální báze podprostoru $\mathbf{P}$ a $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, pak pro vektor
$\mathbf{u}_P = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u}\rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u}\rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{u}\rangle \mathbf{v}_k \in \mathbf{P}$ platí
$(\mathbf{u}-\mathbf{u}_P)\perp \mathbf{p}$ pro každý vektor $\mathbf{p}\in\mathbf{P}$

důkaz: napřed dokážeme, že vektor $\mathbf{u}-\mathbf{u}_P$ je kolmý na každý vektor báze $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$

stačí spočítat $\quad \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u}-\mathbf{u}_P\rangle =$
$\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{u} - \langle \mathbf{v}_1|\mathbf{u}\rangle \mathbf{v}_1 - \cdots - \langle \mathbf{v}_i|\mathbf{u}\rangle \mathbf{v}_i - \cdots - \langle \mathbf{v}_k|\mathbf{u}\rangle \mathbf{v}_k\rangle =$
$\langle \mathbf{v}_i|\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{v}_i|\mathbf{u}\rangle \langle \mathbf{v_i}|\mathbf{v}_i\rangle = 0$

libovolný vektor $\mathbf{p}\in\mathbf{P}$ vyjádříme jako lineární kombinaci prvků báze $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$ podprostoru $\mathbf{P}$: $\quad \mathbf{p} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$
a spočteme $\quad \langle \mathbf{u}-\mathbf{u}_P | \mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{u}-\mathbf{u}_P | b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k\rangle =$
$b_1 \langle \mathbf{u}-\mathbf{u}_P|\mathbf{v}_1\rangle + \cdots + b_k \langle \mathbf{u}-\mathbf{u}_P|\mathbf{v}_k\rangle = 0$

Ortogonální projekce na podprostor 2

tvrzení: je-li $\mathbf{P}$ konečně generovaný podprostor prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$, $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$ nějaká ortonormální báze podprostoru $\mathbf{P}$ a $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, pak pro vektor
$\mathbf{u}_P = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u}\rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u}\rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{u}\rangle \mathbf{v}_k \in \mathbf{P}$ platí, že
$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_P\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{q}\|$ pro každý vektor $\mathbf{q}\in\mathbf{P}$, přičemž rovnost nastává právě když $\mathbf{q}=\mathbf{u}_P$

důkaz: podle tvrzení na předchozí straně platí že $(\mathbf{u}-\mathbf{u}_P)\perp\mathbf{p}$ pro každý vektor $\mathbf{p}\in\mathbf{P}$

je-li $\mathbf{q}\in\mathbf{P}$, pak také $\mathbf{u}_P-\mathbf{q}\in\mathbf{P}$ a tedy $(\mathbf{u}-\mathbf{u}_P)\perp(\mathbf{u}_P-\mathbf{q})$

protože $\mathbf{u}-\mathbf{q} = (\mathbf{u}-\mathbf{u}_P) + (\mathbf{u}_P-\mathbf{q})$, plyne z Pythagorovy věty
$\|\mathbf{u}-\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_P\|^2 + \|\mathbf{u}_P-\mathbf{q}\|^2 \ge \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_P\|^2$, přičemž rovnost nastává právě když $\|\mathbf{u}_P-\mathbf{q}\| = 0$, tj. právě když $\mathbf{q}=\mathbf{u}_P$

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

poslední tvrzení říká, že pokud existuje ortonormální báze v konečně generovaném podprostoru $\mathbf{P}$ jakéhokoliv prostoru $\mathbf{V}$ se $\langle\,|\,\rangle$, pak pro každé $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ existuje v $\mathbf{P}$ jednoznačně určený „nejbližší“ prvek $\mathbf{u}_P\in\mathbf{P}$; podle tvrzení na str. 7-42 pro prvek $\mathbf{u}_P$ navíc platí $(\mathbf{u}-\mathbf{u}_P)\perp\mathbf{p}$ pro každý vektor $\mathbf{p}\in\mathbf{P}$

následující věta říká, že ortonormální báze existují v každém konečně generovaném podprostoru

její důkaz je vlastně algoritmus nazývaný *Gramova-Schmidtova ortogonalizace*, jeho důležitost je srovnatelná s významem Gaussovy eliminace

věta: je-li $(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ lineárně nezávislá posloupnost v prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$, pak existuje ortonormální posloupnost $(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)$ ve $\mathbf{V}$ taková, že pro každé $i=1,\ldots,n$ platí $\langle \mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_i\rangle = \langle \mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_i\rangle$

Důkaz Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace

důkaz: prvky hledané ortonormální posloupnosti $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k, \cdots, \mathbf{q}_n)$ sestrojíme indukcí podle k

je-li $k = 1$, pak $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$, neboť $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ je *LN* posloupnost

položíme $\mathbf{q}_1 = \|\mathbf{a}_1\|^{-1}\mathbf{a}_1$

platí $\|\mathbf{q}_1\| = 1$, posloupnost $(\mathbf{q}_1)$ je *ON* a $\langle \mathbf{q}_1 \rangle = \langle \mathbf{a}_1 \rangle$

indukční předpoklad je, že pro nějaké $k \in \{2, \dots, n\}$ již máme sestrojenou *ON* posloupnost $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1})$ ve $\mathbf{V}$ takovou, že pro každé $i = 1, \dots, k-1$ platí $\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i \rangle$

označíme $\mathbf{P}_{k-1}$ podprostor $\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1} \rangle$, posloupnost $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1})$ je ortonormální báze $\mathbf{P}_{k-1}$

označíme $\mathbf{p}_{k-1} = \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{q}_1 + \cdots + \langle \mathbf{q}_{k-1} | \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{q}_{k-1} \in \mathbf{P}_{k-1}$

$\mathbf{a}_k \notin \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1} \rangle$, protože $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ je *LN* posloupnost, a $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1} \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1} \rangle = \mathbf{P}_{k-1}$ podle indukčního předpokladu, platí proto $\mathbf{a}_k \neq \mathbf{p}_{k-1}$ a tedy $\|\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}\| \neq 0$

Dokončení důkazu Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace

podle tvrzení na str. 7-42 platí $(\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}) \perp \mathbf{q}_i$ pro každé $i = 1, \dots, k-1$

položíme $\mathbf{q}_k = \|\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}\|^{-1}(\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1})$

posloupnost $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k)$ je potom ortonormální

k dokončení důkazu indukčního kroku stačí ukázat, že $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k \rangle$

indukční předpoklad je $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1} \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1} \rangle$ a dále platí rovnost $\mathbf{a}_k = \|\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}\| \, \mathbf{q}_k + \mathbf{p}_{k-1} =$
$\|\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}\| \, \mathbf{q}_k + \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{q}_1 + \cdots + \langle \mathbf{q}_{k-1} | \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{q}_{k-1}$

z bodu 2. na str. 5-21 plyne $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k \rangle \subseteq \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k \rangle$

z téže rovnosti a podle téhož bodu 2. na str. 5-21 plyne také opačná inkluze $\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k \rangle \subseteq \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k \rangle$

Důsledky

důsledek 1: v každém konečně generovaném podprostoru $\mathbf{P}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem existuje ortonormální báze

důkaz: stačí vzít libovolnou bázi $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ podprostoru $\mathbf{P}$ a použít na ni Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci

důsledek 2: je-li $\mathbf{P}$ podprostor konečně dimenzionálního prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem, pak lze libovolnou ortonormální bázi $\mathbf{P}$ rozšířit do ortonormální báze celého prostoru $\mathbf{V}$

důkaz: je-li $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k)$ *ON* báze $\mathbf{P}$, doplníme ji jakkoliv na bázi $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$ celého prostoru $\mathbf{V}$, ze které pak vyrobíme *ON* bázi Gramovo-Schmidtovo ortogonalizací, ta prvních k vektorů $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ nezmění; také můžeme *GSO* spustit až od $(k+1)$-ního kroku

Další důsledek

důsledek 3: je-li $\mathbf{P}$ konečně generovaný podprostor prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, pak existuje vektor $\mathbf{u}_P \in \mathbf{P}$, pro který platí, že $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_P\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{q}\|$ pro každý vektor $\mathbf{q} \in \mathbf{P}$, přičemž rovnost nastává právě když $\mathbf{q} = \mathbf{u}_P$

důkaz: stačí zvolit nějakou *ON* bázi v $\mathbf{P}$ a použít tvrzení na str. 7-43

všimněme si, že prvek $\mathbf{u}_P$ je svými vlastnostmi v důsledku 3 určený jednoznačně

definice: je-li $\mathbf{P}$ konečně generovaný podprostor prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, pak prvek $\mathbf{u}_P$ z předchozího důsledku nazýváme *ortogonální projekce* $\mathbf{u}$ na podprostor $\mathbf{P}$

Algoritmus pro Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci

vstup: *LN* posloupnost $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ prvků prostoru $\mathbf{V}$ se $\langle\,|\,\rangle$

výstup: *ON* posloupnost $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ ve $\mathbf{V}$ taková, že $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k \rangle$ pro každé $k = 1, \dots, n$

budeme používat pomocné vektory $\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}$

- **krok 1a** položíme $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$
- **krok 1b** položíme $\mathbf{q}_1 = \|\mathbf{b}_1\|^{-1}\mathbf{b}_1$ (normalizace)
- **krok 2a** položíme $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \, \mathbf{q}_1$ (ortogonalizace)
- **krok 2b** položíme $\mathbf{q}_2 = \|\mathbf{b}_2\|^{-1}\mathbf{b}_2$ (normalizace)
- **krok 3a** položíme $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - (\langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle \, \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{q}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle \, \mathbf{q}_2)$
- **krok 3b** položíme $\mathbf{q}_3 = \|\mathbf{b}_3\|^{-1}\mathbf{b}_3$ (normalizace)
- $\vdots$

Příklad

ortogonalizujeme $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

krok 1b: $\mathbf{q}_1 = \|\mathbf{a}_1\|^{-1}\mathbf{a}_1 = (\sqrt{2})^{-1}(1,0,0,-1)^T$

krok 2a: $\mathbf{q}_1^T\mathbf{a}_2 = \sqrt{2}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^T\mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1 = (0,2,0,0)^T$

krok 2b: $\mathbf{q}_2 = \|\mathbf{b}_2\|^{-1}\mathbf{b}_2 = (0,1,0,0)^T$

krok 3a: $\mathbf{q}_1^T\mathbf{a}_3 = 2\sqrt{2}$, $\mathbf{q}_2^T\mathbf{a}_3 = 1$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1^T\mathbf{a}_3)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2^T\mathbf{a}_3)\mathbf{q}_2 = (1,0,1,1)^T$

krok 3b: $\mathbf{q}_3 = \|\mathbf{b}_3\|^{-1}\mathbf{b}_3 = (\sqrt{3})^{-1}(1,0,1,1)^T$

proto $\mathbf{q}_1 = (\sqrt{2})^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_3 = (\sqrt{3})^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

GSO v aritmetických prostorech se standardním $\langle\,|\,\rangle$

je-li $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ *LN* posloupnost v aritmetickém prostoru $\mathbb{C}^m$ (nebo $\mathbb{R}^m$), můžeme ji zapsat do sloupců komplexní (nebo reálné) matice $A = (a_{ik}) = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_n)$ typu $m \times n$

stejně tak výslednou *ON* posloupnost $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ zapíšeme jako sloupce matice $Q = (q_{ij}) = (\mathbf{q}_1 | \cdots | \mathbf{q}_n)$

vztah mezi maticemi A a Q vyčteme přímo z důkazu věty o *GSO*, pouze nahradíme obecný skalární součin standardním

rovnost $\mathbf{q}_1 = \|\mathbf{a}_1\|^{-1}\mathbf{a}_1$ přepíšeme jako $\mathbf{a}_1 = \|\mathbf{a}_1\| \, \mathbf{q}_1$

pro $k \geq 2$ z rovnosti $\mathbf{q}_k = \|\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}\|^{-1}(\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1})$ spočteme
$\mathbf{a}_k = \|\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}\| \, \mathbf{q}_k + \mathbf{p}_{k-1} =$
$(\mathbf{q}_1^*\mathbf{a}_k)\mathbf{q}_1 + \cdots + (\mathbf{q}_{k-1}^*\mathbf{a}_k)\mathbf{q}_{k-1} + \|\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}\| \, \mathbf{q}_k$

což zapíšeme $\mathbf{a}_k = Q(\mathbf{q}_1^*\mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{q}_{k-1}^*\mathbf{a}_k, \|\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}\|, 0, \cdots, 0)^T$ pro každé $k \geq 2$; a dále $\mathbf{a}_1 = Q(\|\mathbf{a}_1\|, 0, \cdots, 0)^T$

Maticový zápis Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace

vztah mezi maticemi A a Q můžeme zapsat jako

$$A = Q \begin{pmatrix} \|\mathbf{a}_1\| & \mathbf{q}_1^*\mathbf{a}_2 & \mathbf{q}_1^*\mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{q}_1^*\mathbf{a}_k \\ 0 & \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{p}_1\| & \mathbf{q}_2^*\mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{q}_2^*\mathbf{a}_k \\ 0 & 0 & \|\mathbf{a}_3 - \mathbf{p}_2\| & & \mathbf{q}_3^*\mathbf{a}_k \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|\mathbf{a}_k - \mathbf{p}_{k-1}\| \end{pmatrix}$$

pravého činitele můžeme zapsat jako čtvercovou matici $R = (r_{jk})$,

$$\text{kde } r_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{pokud platí } j > k \\ \mathbf{q}_j^*\mathbf{a}_k, & \text{pokud platí } j < k \\ \|\mathbf{a}_j - \mathbf{p}_{j-1}\|, & \text{pokud platí } j = k \end{cases}$$

QR-rozklad

dokázali jsme tak následující důležitou větu

věta: je-li posloupnost $(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n)$ sloupcových vektorů komplexní (nebo reálné) matice A typu $m \times n$ lineárně nezávislá, pak existují matice $Q = (\mathbf{q}_1|\cdots|\mathbf{q}_n)$ taková, že posloupnost sloupcových vektorů $(\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n)$ je ortonormální, a horní trojúhelníková matice R řádu n s kladnými prvky na hlavní diagonále, pro které platí $A = QR$

později dokážeme, že matice Q, R jsou určené jednoznačně

definice: je-li A reálná nebo komplexní matice typu $m \times n$ a $rank(A) = n$, pak vyjádření $A = QR$, kde posloupnost sloupcových vektorů Q je ortonormální a R je horní trojúhelníková matice s kladnými prvky na hlavní diagonále, se nazývá *QR-rozklad* matice A

GSO není numericky stabilní

příklad: v aritmetice se zaokrouhlováním na tři platná místa

použijeme *GSO* na matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10^{-3} & 10^{-3} & 0 \\ 10^{-3} & 0 & 10^{-3} \end{pmatrix}$

všechny sloupcové vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ jsou „téměř rovnoběžné“

krok 1b: $\|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{1^2 + 10^{-6} + 10^{-6}} \doteq 1$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, 10^{-3}, 10^{-3})^T$

krok 2a: $\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 = 1 + 10^{-6} \doteq 1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1 = (0, 0, -10^{-3})^T$

krok 2b: $\|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{10^{-6}} = 10^{-3}$, $\mathbf{q}_2 = (10^{-3})^{-1}\mathbf{b}_2 = (0, 0, -1)^T$

krok 3a: $\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_3 = 1 + 10^{-6} \doteq 1$, $\mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_3 = -10^{-3}$

$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_3)\mathbf{q}_2 = (0, -10^{-3}, -10^{-3})^T$

krok 3b: $\|\mathbf{b}_3\| = \sqrt{10^{-6} + 10^{-6}} = \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \doteq 1,41 \cdot 10^{-3}$

$\mathbf{q}_3 = 1,41^{-1} \cdot 10^3 \cdot (0, -10^{-3}, -10^{-3})^T = (0, -0,709, -0,709)^T$

vyšlo nám $\mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_3 = 0,709$, vektory $\mathbf{q}_2$ a $\mathbf{q}_3$ příliš kolmé nejsou

Modifikovaná Gramova-Schmidtova ortogonalizace 1

numerickou stabilitu *GSO* lze (poněkud překvapivě) vylepšit tím, že jednotlivé kroky výpočtu provádíme v jiném pořadí

pomocný vektor $\mathbf{b}_k$ dostaneme tak, že od daného $\mathbf{a}_k$ odečteme součet $\mathbf{p}_{k-1} = \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{q}_1 + \cdots + \langle \mathbf{q}_{k-1} | \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{q}_{k-1}$ projekcí $\mathbf{a}_k$ do směrů dosud sestrojených vektorů $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{k-1}$

modifikace *GSO* spočívá v tom, že projekce dosud neortogonalizovaných vektorů do směru $\mathbf{q}_k$ odečítáme „online“, tj. ihned jakmile vektor $\mathbf{q}_k$ sestrojíme; mezivýsledky zapisujeme do pomocných proměnných $\mathbf{b}_i$ pro $i > k$

krok 1a: $\mathbf{b}_i \leftarrow \mathbf{a}_i$ pro $i = 1 \ldots, n$

krok 1b: $\mathbf{q}_1 = \|\mathbf{b}_1\|^{-1}\mathbf{b}_1$

krok 2a: $\mathbf{b}_i \leftarrow \mathbf{b}_i - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{b}_i \rangle \mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_i - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{q}_1$ pro $i = 2, \ldots, n$

krok 2b: $\mathbf{q}_2 = \|\mathbf{b}_2\|^{-1}\mathbf{b}_2 = \|\mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{q}_1\|^{-1}(\mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{q}_1)$

Modifikovaná Gramova-Schmidtova ortogonalizace 2

krok 3a: $\mathbf{b}_i \leftarrow \mathbf{b}_i - \langle \mathbf{q}_2 | \mathbf{b}_i \rangle \mathbf{q}_2$ pro $i = 3, \ldots, n$

spočítáme aktuální hodnoty proměnných $\mathbf{b}_i$ pro $i \geq 3$

$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{q}_2 | \mathbf{a}_i - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_2 =$

$\mathbf{a}_i - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{q}_2 | \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{q}_2$

krok 3b: $\mathbf{q}_3 = \|\mathbf{b}_3\|^{-1}\mathbf{b}_3$

krok 4a: $\mathbf{b}_i \leftarrow \mathbf{b}_i - \langle \mathbf{q}_3 | \mathbf{b}_i \rangle \mathbf{q}_3$ pro $i = 4, \ldots, n$

$\vdots$

modifikovaná GSO tak vede ke zcela stejné ortonormální posloupnosti $(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$ jako klasická *GSO*

jiné pořadí operací ale vede k větší numerické stabilitě, jak se lze přesvědčit na použití modifikované *GSO* na příkladu ze str. 7-54

Modifikovaný výpočet *GSO*

použijeme modifikovanou *GSO* na $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10^{-3} & 10^{-3} & 0 \\ 10^{-3} & 0 & 10^{-3} \end{pmatrix}$

krok 1a: $\mathbf{b}_1=(1,10^{-3},10^{-3})^T, \mathbf{b}_2=(1,10^{-3},0)^T, \mathbf{b}_3=(1,0,10^{-3})^T$

krok 1b: $\|\mathbf{b}_1\|=\sqrt{1^2+10^{-6}+10^{-6}}\doteq 1,\ \mathbf{q}_1=\mathbf{b}_1=(1,10^{-3},10^{-3})^T$

krok 2a: $\mathbf{q}_1^T\mathbf{b}_2=1+10^{-6}\doteq 1,\ \mathbf{b}_2\leftarrow\mathbf{b}_2-(\mathbf{q}_1^T\mathbf{b}_2)\mathbf{q}_1=(0,0,-10^{-3})^T$
$\mathbf{q}_1^T\mathbf{b}_3=1+10^{-6}\doteq 1,\ \mathbf{b}_3\leftarrow\mathbf{b}_3-(\mathbf{q}_1^T\mathbf{b}_3)\mathbf{q}_1=(0,-10^{-3},0)^T$

krok 2b: $\|\mathbf{b}_2\|=\sqrt{10^{-6}}=10^{-3},\ \mathbf{q}_2=(10^{-3})^{-1}\mathbf{b}_2=(0,0,-1)^T$

krok 3a: $\mathbf{q}_2^T\mathbf{b}_3=0,\ \mathbf{b}_3\leftarrow\mathbf{b}_3-(\mathbf{q}_2^T\mathbf{b}_3)\mathbf{q}_1=(0,-10^{-3},0)^T$

krok 3b: $\|\mathbf{b}_3\|=\sqrt{10^{-6}}=10^{-3},\ \mathbf{q}_3=10^3\cdot\mathbf{b}_3=(0,-1,0)$

výsledná posloupnost $\mathbf{q}_1=(1,10^{-3},10^{-3})^T$, $\mathbf{q}_2=(0,0,-1)^T$, $\mathbf{q}_3=(0,-1,0)$ je tak ortonormální jak jen lze při zaokrouhlování na tři platné cifry doufat

Co provede *GSO* s obecnou maticí ?

Gramova-Schmidtova ortogonalizace má jednu obrovskou výhodu - lze ji provést *online*, vektor $\mathbf{q}_k$ výsledné matice Q lze spočítat v okamžiku, kdy máme k dispozici prvních k sloupců matice $A=(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_k|\cdots|\mathbf{a}_n)$, na následujících sloupcích $\mathbf{a}_{k+1},\ldots,\mathbf{a}_n$ vektor $\mathbf{q}_k$ nezávisí

co se stane, je-li posloupnost sloupcových vektorů matice A lineárně závislá ?

příklad: zvolíme *LN* posloupnost $(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ vektorů z $\mathbb{R}^{128}$

jak probíhá *GSO*, použijeme-li ji na matici $A=(\mathbf{o}|\mathbf{a}_1|3\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2)$?

Obecná Gramova-Schmidtova ortogonalizace 1

použijeme *GSO* na obecnou posloupnost vektorů $(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ prvků reálného nebo komplexního prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$

nepředpokládáme, že posloupnost $(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ je *LN*

pozorování: algoritmus pro *GSO* selže, pokud je některý z prvků $\mathbf{a}_k$ lineárně závislý na předchozích

jediné kroky výpočtu, které nelze vždy provést, jsou kroky **?b**, kdy se může stát, že máme dělit skalárem 0

to když počítáme $\mathbf{q}_k=\|\mathbf{a}_k-\mathbf{p}_{k-1}\|^{-1}(\mathbf{a}_k-\mathbf{p}_{k-1})$,
kde $\mathbf{p}_{k-1}=\langle\mathbf{q}_1\,|\mathbf{a}_k\rangle\,\mathbf{q}_1+\cdots+\langle\mathbf{q}_{k-1}\,|\mathbf{a}_k\rangle\,\mathbf{q}_{k-1}$

platí $\|\mathbf{a}_k-\mathbf{p}_{k-1}\|=0$ právě když
$\mathbf{a}_k=\langle\mathbf{q}_1\,|\mathbf{a}_k\rangle\,\mathbf{q}_1+\cdots+\langle\mathbf{q}_{k-1}\,|\mathbf{a}_k\rangle\,\mathbf{q}_{k-1}$, tj. právě když
$\mathbf{a}_k\in\langle\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_{k-1}\rangle=\langle\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}\rangle$, což je právě když
$\mathbf{a}_k\in\langle\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}\rangle$, tj. $\mathbf{a}_k$ je *LK* předchozích prvků posloupnosti

Obecná Gramova-Schmidtova ortogonalizace 2

všimněme si, že nadále platí $\langle\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_{k-1}\rangle=\langle\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_k\rangle$

klasickou *GSO* můžeme modifikovat tak, že v případě, kdy narazíme na vektor $\mathbf{a}_k\in\langle\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}\rangle$, což se projeví tak, že algoritmus nás nutí dělit nulou, žádný nový nenulový vektor $\mathbf{q}_k$ nespočítáme, příslušný krok algoritmu přeskočíme a pokračujeme ortogonalizací následujícího vektoru $\mathbf{a}_{k+1}$

takto upravenému algoritmu se říká *obecná Gramova-Schmidtova ortogonalizace*

máme tak tři verze *GSO*: klasickou, modifikovanou a obecnou

výsledkem obecné *GSO* je i nadále ortonormální báze podprostoru $\langle\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\rangle$

Obecná *GSO* s obecnou maticí

tvrzení: výsledkem obecné *GSO* použité na reálnou nebo komplexní matici $A = (\mathbf{a}_1|\dots|\mathbf{a}_n)$ je ortonormální báze $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r)$ sloupcového prostoru $Im\, A = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ matice A

otázka: v kterých krocích vytvoří obecná *GSO* nový vektor $\mathbf{q}_k$?

otázka: jak pomocí *GSO* zjistíme, platí-li $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ pro aritmetické vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$?

QR-**rozklad vytvořený obecnou** *GSO*

Obecná *GSO* a *QR*-rozklad 1

průběh obecné *GSO* můžeme také zapsat maticově podobně jako jsme zapsali průběh klasické *GSO* pomocí *QR*-rozkladu

připomeňme si, že obecná *GSO* použitá na matici $A = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ nevytvoří v k-tém kroku nový vektor $\mathbf{q}_i$ právě když je vektor $\mathbf{a}_k$ lineárně závislý na předchozích vektorech $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{k-1}$, tj. právě když vektor $\mathbf{a}_k$ není bázový vektor matice A

výsledkem obecné *GSO* je *ON* posloupnost $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r)$, kde r je počet bázových sloupců matice A, tj. $r = rank(A)$

vektor $\mathbf{q}_k$ vytvoříme v j_k-tém kroku obecné *GSO*, kde $j_1, \dots, j_r$ jsou indexy bázových sloupců matice A

je-li $j_{k-1} < j \leq j_k$ pro nějaké $k = 1, \dots, r$ a děláme-li j-tý krok obecné *GSO*, máme už vytvořenou posloupnost vektorů $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1})$ takovou, že $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1} \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1} \rangle$

Obecná *GSO* a *QR*-rozklad 2

v kroku **Ja** napřed spočteme vyjádření
$\mathbf{p}_{j-1} = \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_j \rangle \mathbf{q}_1 + \cdots + \langle \mathbf{q}_{k-1} | \mathbf{a}_j \rangle \mathbf{q}_{k-1}$

pokud $\mathbf{a}_j$ není bázový sloupec matice A, tj. pokud $j < j_k$, platí $\mathbf{a}_j \in \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1} \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1} \rangle$, a tedy $\mathbf{a}_j = \mathbf{p}_{j-1}$, neboli $\mathbf{a}_j = \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_j \rangle \mathbf{q}_1 + \cdots + \langle \mathbf{q}_{k-1} | \mathbf{a}_j \rangle \mathbf{q}_{k-1}$

koeficienty tohoto vyjádření si napíšeme do prvních $k-1$ řádků j-tého sloupce matice R typu $r \times n$, od k-tého řádku včetně směrem dolů doplníme 0

pokud $j = j_k$, tj. $\mathbf{a}_j \notin \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1} \rangle$ a $\mathbf{a}_j \neq \mathbf{p}_{j-1}$, obecná *GSO* provede i krok **Jb** a spočte vektor $\mathbf{q}_k = \|\mathbf{a}_j - \mathbf{p}_{j-1}\|^{-1} (\mathbf{a}_j - \mathbf{p}_{j-1})$, tj. $\mathbf{a}_j = \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_j \rangle \mathbf{q}_1 + \cdots + \langle \mathbf{q}_{k-1} | \mathbf{a}_j \rangle \mathbf{q}_{k-1} + \|\mathbf{a}_j - \mathbf{b}_j\| \mathbf{q}_k$ a koeficienty tohoto vyjádření zapíšeme do prvních k řádků j-tého sloupce matice R a zbylá místa opět zaplníme prvky 0

Obecný *QR*-rozklad

po proběhnutí celé obecné *GSO* dostaneme matici $Q = (\mathbf{q}_1|\cdots|\mathbf{q}_r)$ typu $m \times r$ a matici R typu $r \times n$, pro které platí $A = QR$, posloupnost sloupcových vektorů matice Q je ortonormální, proto je lineárně nezávisla a $rank(Q) = r$

protože $r = rank(A) = rank(QR) \leq rank(R)$, je také $rank(R) = r$, rozklad $A = QR$ je proto *full-rank decomposition*

první nenulový prvek v k-tém řádku matice R se objeví ve chvíli, kdy spočteme vektor $\mathbf{q}_k$ a ten dostaneme v j_k-tém kroku obecné *GSO*, platí $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ a všechny pivoty jsou kladné

dostali jsme tak *full-rank decomposition* $A = QR$ matice A, kde posloupnost sloupcových vektorů matice Q je ortonormální, matice R je v řádkově odstupňovaném tvaru a všechny pivoty v matici R jsou kladné

GSO v prostoru funkcí

příklad: v prostoru všech spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $\langle -1,1\rangle$ se skalárním součinem $\langle f\,|g\rangle = \int_{-1}^{1} fg$ použijeme *GSO* na posloupnost polynomů $(1 = x^0, x = x^1, x^2)$; tato posloupnost je lineárně nezávislá

krok 1b: polynom $q_0 = \|x^0\|^{-1}x^0$, kde $\|x^0\|^2 = \langle 1\,|1\rangle = \int_{-1}^{1} 1 = 2$, tedy $q_0 = (\sqrt{2})^{-1}$

krok 2a: spočteme $\left\langle q_0 \,\middle|x^1\right\rangle = \int_{-1}^{1}(\sqrt{2})^{-1}x = 0$, takže $p_0 = \left\langle q_0 \,\middle|x^1\right\rangle q_0 = 0$ a $b_1 = x^1 - p_0 = x$

krok 2b: $\|b_1\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3}$ a $q_1 = \|b_1\|^{-1}b_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$

krok 3a: $\left\langle q_0 \,\middle|x^2\right\rangle = \int_{-1}^{1}(\sqrt{2})^{-1}x^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$, $\left\langle q_1 \,\middle|x^2\right\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}xx^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{4}x^4\right]_{x=-1}^{x=1} = 0$

Legendreovy polynomy

$p_1 = \left\langle q_0 \,\middle|x^2\right\rangle q_0 + \left\langle q_1 \,\middle|x^2\right\rangle q_1 = \frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \left\langle q_1 \,\middle|x^2\right\rangle q_1 = \frac{1}{3}$
$b_2 = x^2 - p_1 = x^2 - \frac{1}{3}$

krok 3b: $\|b_2\|^2 = \int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2 = \int_{-1}^{1}(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}) = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3\cdot 3}x^3 + \frac{1}{9}x\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$
$\|b_2\|^{-1} = \sqrt{\frac{45}{8}} = 3\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$, $p_2 = \|b_2\|^{-1}b_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}(3x^2-1)$

polynomy $q_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad q_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$, $\quad q_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}(3x^2-1)$

jsou první tři *Legendreovy polynomy*, Legendreův polynom n-tého stupně q_n bychom dostali jako výsledek *GSO* na posloupnost $x^0, x^1, \dots, x^n$

množina Legendreových polynomů $\{q_n : n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ je ortonormální množina v prostoru všech spojitých funkcí na intervalu $\langle 1,-1\rangle$ se skalárním součinem $\langle f\,|g\rangle = \int_{-1}^{1} fg$

Příklad *QR*-rozkladu

najdeme *QR*-rozklad matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ze str. 7-50

způsob zápisu průběhu klasické *GSO* v podobě *QR*-rozkladu je na str. 7-52

$$A = \begin{pmatrix} (\sqrt{2})^{-1} & 0 & (\sqrt{3})^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{3})^{-1} \\ -(\sqrt{2})^{-1} & 0 & (\sqrt{3})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Matice s ortonormální posloupností sloupcových vektorů

tvrzení: je-li $Q = (\mathbf{q}_1|\cdots|\mathbf{q}_n)$ komplexní (nebo reálná) matice typu $m\times n$, pak posloupnost sloupcových vektorů $(\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_n)$ je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{C}^m$ (nebo v $\mathbb{R}^m$) právě když platí $Q^*Q = I_n$ (nebo $Q^TQ = I_n$)

důkaz: posloupnost $(\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_n)$ ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{C}^m$ právě když $\mathbf{q}_i^*\mathbf{q}_j = \delta_{ij}$ pro každé dva indexy $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$

skalár $\mathbf{q}_i^*\mathbf{q}_j$ je prvek na místě (i,j) v součinu Q^*Q, rovnost $\mathbf{q}_i^*\mathbf{q}_j = \delta_{ij}$ tak platí pro libovolné indexy $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ právě když $Q^*Q = I_n$

matice Q^* (nebo Q^T) je inverzní zleva k matici Q

existence matice inverzní zleva k matici Q je v souladu s tvrzením na str. 4-82

Zachování normy a skalárního součinu

tvrzení: pokud pro komplexní matici Q typu $m \times n$ platí $Q^*Q = I_n$, pak platí

- $(Q\mathbf{x})^*(Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^*\mathbf{y}$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$
- $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$

jinak řečeno, zobrazení $f_Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ zachovává standardní skalární součin a jím určenou normu vektorů v $\mathbb{C}^n$

důkaz: první část spočítáme: $(Q\mathbf{x})^*(Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^*Q^*Q\mathbf{y} = \mathbf{x}^*I_n\mathbf{y} = \mathbf{x}^*\mathbf{y}$

z první části ihned plyne $\|Q\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$, zbývá pouze odmocnit

v případě čtvercové matice Q je každá z podmínek posledního tvrzení ekvivalentní ortonormalitě posloupnosti sloupcových vektorů matice Q

Unitární a ortogonální matice

definice: reálná čtvercová matice $Q = (\mathbf{q}_1|\cdots|\mathbf{q}_n)$ řádu n se nazývá *ortogonální*, pokud je posloupnost $(\mathbf{q}_1|\cdots|\mathbf{q}_n)$ ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{R}^n$ (a tedy ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$)

komplexní čtvercová matice $U = (\mathbf{u}_1|\cdots|\mathbf{u}_n)$ řádu n se nazývá *unitární*, pokud je posloupnost $(\mathbf{u}_1|\cdots|\mathbf{u}_n)$ ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{C}^n$ (a tedy *ON* báze v $\mathbb{C}^n$)

příklad: matice rotace kolem počátku v $\mathbb{R}^2$ je ortogonální

matice osové symetrie vzhledem k přímce procházející počátkem v $\mathbb{R}^2$ je ortogonální

Různé ekvivalentní definice unitární matice

tvrzení: pro komplexní čtvercovou matici U řádu n jsou následující podmínky ekvivalentní

1. U je unitární
2. zobrazení $f_U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ zachovává standardní skalární součin v $\mathbb{C}^n$, tj. $(U\mathbf{u})^*(U\mathbf{v}) = \mathbf{u}^*\mathbf{v}$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$
3. zobrazení f_U zobrazení zachovává eukleidovskou normu, tj. $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ pro každé $x \in \mathbb{C}^n$
4. zobrazení f_U zobrazuje ortonormální bázi na ortonormální bázi
5. $U^{-1} = U^*$
6. posloupnost $(\tilde{\mathbf{u}}_1^T, \tilde{\mathbf{u}}_2^T, \cdots, \tilde{\mathbf{u}}_n^T)$ řádkových vektorů matice U je *ON* (a tedy ortonormální báze v $\mathbb{C}^n$)

důkaz: vzhledem k tomu, že pro jakoukoliv čtvercovou matici U platí, že matice inverzní zleva (nebo zprava) k U je rovna U^{-1}, plyne z tvrzení na str. 7-68 ekvivalence $1 \Leftrightarrow 5$

podobně dokážeme $5 \Leftrightarrow 6$

Dokončení důkazu

z tvrzení na str. 7-69 plyne $1 \Rightarrow 2$ a implikace $2 \Rightarrow 3$ je snadná

stejně snadná je implikace $2 \Rightarrow 4$

posloupnost prvků kanonické báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je ortonormální, z podmínky 4. plyne, že ortonormální je také posloupnost $(U\mathbf{e}_1, \ldots, U\mathbf{e}_n) = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, což dokazuje $4 \Rightarrow 1$

k dokončení důkazu staží ukázat $3 \Rightarrow 2$ a k tomu lze použít polarizační identity ze str. 7-23

z rovnosti $Re\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$ a předpokladu $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ pro každé $x \in \mathbb{C}^n$ plyne $Re\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{2}(\|U(\mathbf{u}+\mathbf{v})\|^2 - \|U\mathbf{u}\|^2 - \|U\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{2}(\|U\mathbf{u}+U\mathbf{v}\|^2 - \|U\mathbf{u}\|^2 - \|U\mathbf{v}\|^2 = Re\,\langle U\mathbf{u}\,|U\mathbf{v}\rangle$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$

rovnost imaginárních částí $Im\,\langle \mathbf{u}\,|\mathbf{v}\rangle = Im\,\langle U\mathbf{u}\,|U\mathbf{v}\rangle$ dokážeme zcela analogicky použitím druhé polarizační identity ze str. 7-23

Různé ekvivalentní definice ortogonální matice

tvrzení: pro reálnou čtvercovou matici Q řádu n jsou následující podmínky ekvivalentní

1. Q je ortogonální
2. zobrazení $f_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zachovává standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$, tj. $(Q\mathbf{u})^T(Q\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
3. zobrazení f_Q zobrazení zachovává eukleidovskou normu, tj. $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$
4. zobrazení f_Q zobrazuje ortonormální bázi na ortonormální bázi
5. $Q^{-1} = Q^T$
6. posloupnost $(\tilde{\mathbf{q}}_1^T, \tilde{\mathbf{q}}_2^T, \cdots, \tilde{\mathbf{q}}_n^T)$ řádkových vektorů matice Q je ON (a tedy ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$)

důsledek 1: součin unitárních matic je unitární matice, součin ortogonálních matic je ortogonální matice

důkaz:

Jednoznačnost QR-rozkladu

tvrzení: je-li A regulární (reálná nebo kompexní) matice řádu a a $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$ jsou dva QR-rozklady matice A, pak platí $Q_1 = Q_2$ a $R_1 = R_2$

důkaz: z rovnosti $Q_1R_1 = Q_2R_2$ plyne $Q_2^*Q_1 = R_2R_1^{-1}$

matice $U = R_2R_1^{-1} = (u_{ij})$ je horní trojúhelníková s kladnými prvky na hlavní diagonále

matice $U = Q_2^*Q_1$ je unitární (součin unitárních) a současně horní trojúhelníková s kladnými prvky na hlavní diagonále

pro sloupec $\mathbf{u}_1$ matice U platí $\mathbf{u}_1 = (u_{11}, 0, \ldots, 0)^T$, $u_{11} > 0$ a $1 = \|\mathbf{u}_1\|^2 = \overline{u}_{11}u_{11} = |u_{11}|^2 = u_{11}^2$; proto $u_{11} = 1$ a $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$

pro sloupec $\mathbf{u}_2 = (u_{12}, u_{22}, 0, \ldots, 0)^T$ platí $\mathbf{u}_2^*\mathbf{u}_1 = 0$ (neboť U je unitární), tj. $\overline{u}_{12} = 0$ a tedy $u_{12} = 0$

protože $\|\mathbf{u}_2\| = 1$, platí také $|u_{22}|^2 = 1$, a protože $u_{22} > 0$, plyne odtud $u_{22} = 1$ a $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2$

Dokončení důkazu jednoznačnosti QR-rozkladu

celý důkaz rovnosti $U = I_n$ lze udělat tak, že indukcí podle k dokážeme, že $\mathbf{u}_k = \mathbf{e}_k$

pro $k = 1, 2$ už jsme to dokázali

je-li $2 \leq k \leq n$ a platí-li $\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i$ pro každé $i = 1, \ldots, k-1$, vezmeme vektor $\mathbf{u}_k = (u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{kk}, 0, \ldots, 0)^T$

z indukčního předpokladu dostáváme pro každé $j = 1, \ldots, k-1$, že $0 = \mathbf{u}_j^*\mathbf{u}_k = \mathbf{e}_j^*\mathbf{u}_k = u_{jk}$

z rovnosti $1 = \mathbf{u}_k^*\mathbf{u}_k = \overline{u}_{kk}u_{kk} = |u_{kk}|^2$ a z nerovnosti $u_{kk} > 0$ plyne $u_{kk} = 1$ neboli $\mathbf{u}_k = \mathbf{e}_k$, což dovršuje důkaz indukčního kroku

Vektory kolmé k podprostoru

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ konečně dimenzionální reálný nebo komplexní prostor se $\langle\,|\,\rangle$, $(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}, \ldots, \mathbf{q}_n)$ ON báze prostoru $\mathbf{V}$ a $\mathbf{P} = \langle \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k \rangle$, pak pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ platí $\mathbf{u} \perp \mathbf{p}$ pro každý vektor $p \in \mathbf{P}$ právě když $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{q}_{k+1}, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle$

důkaz $\Rightarrow$: prvek $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ vyjádříme jako lineární kombinaci prvků báze B

$\mathbf{u} = a_1\mathbf{q}_1 + \cdots + a_k\mathbf{q}_k + a_{k+1}\mathbf{q}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{q}_n$

spočteme pro každé $i = 1, \ldots, k$ skalární součin $\langle \mathbf{q}_i \,|\mathbf{u} \rangle = \left\langle \mathbf{q}_i \left| \sum_{j=1}^n a_j\mathbf{q}_j \right.\right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{q}_i \,|a_j\mathbf{q}_j \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle \mathbf{q}_i \,|\mathbf{q}_j \rangle = a_i$;

vektor $\mathbf{q}_i \in \mathbf{P}$ a tedy $a_i = \langle \mathbf{q}_i \,|\mathbf{u} \rangle = 0$, což znamená že $\mathbf{u} = a_{k+1}\mathbf{q}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{q}_n \in \langle \mathbf{q}_{k+1}, \ldots, \mathbf{q}_n \rangle$

Ortogonální doplněk množiny a podprostoru

$\Rightarrow$: je-li naopak $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{q}_{k+1}, \dots, \mathbf{q}_n \rangle$, existuje *LK*
$\mathbf{u} = a_{k+1}\mathbf{q}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{q}_n$

každý prvek $\mathbf{p} \in \mathbf{P} = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k \rangle$ můžeme zapsat ve tvaru
$\mathbf{p} = b_1\mathbf{q}_1 + \cdots + b_k\mathbf{q}_k$

potom platí $\langle \mathbf{p} \,|\mathbf{u} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} b_i\mathbf{q}_i \,\middle|\, \sum_{j=k+1}^{n} a_j\mathbf{q}_j \right\rangle =$
$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} \overline{b_i} a_j \langle \mathbf{q}_i \,|\mathbf{q}_j \rangle = 0$

definice: je-li $\mathbf{V}$ prostor se $\langle\,|\,\rangle$ a $M \subseteq \mathbf{V}$, pak definujeme *ortogonální doplněk* množiny M ve $\mathbf{V}$ jako množinu
$\{\mathbf{u} \in \mathbf{V} : \mathbf{p} \perp \mathbf{u}$ pro každý prvek $\mathbf{p} \in M\}$; **označení**: $M^{\perp}$

Základní vlastnosti ortogonálního doplňku

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ prostor se $\langle\,|\,\rangle$ a $M, N \subseteq \mathbf{V}$, pak platí

1. $M^{\perp}$ je podprostor $\mathbf{V}$
2. je-li $M \subseteq N$, pak $M^{\perp} \supseteq N^{\perp}$
3. $M^{\perp} = \langle M \rangle^{\perp}$

důkaz: všechny důkazy jsou přímo z definic

1. $M^{\perp}$ je neprázdná podmnožina $\mathbf{V}$ neboť $\mathbf{o} \in M^{\perp}$
jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M^{\perp}$ a r, s skaláry, pak pro každý prvek $\mathbf{p} \in M$ platí $\langle \mathbf{p} \,| r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \rangle = r \langle \mathbf{p} \,|\mathbf{u} \rangle + s \langle \mathbf{p} \,|\mathbf{v} \rangle = 0$, odkud plyne uzavřenost $M^{\perp}$ na sčítání (volbou $r = s = 1$) a na násobení skalárem ($s = 0$)

2. je-li $\mathbf{u} \in N^{\perp}$, platí $\mathbf{u} \perp \mathbf{p}$ pro každé $\mathbf{p} \in N \supseteq M$ a tedy $\mathbf{u} \in M^{\perp}$

3. protože $M \subseteq \langle M \rangle$, plyne z 2. $\langle M \rangle^{\perp} \subseteq M^{\perp}$; je-li naopak $\mathbf{u} \in M^{\perp}$ a $\mathbf{p} \in \langle M \rangle$, platí $\mathbf{p} = a_1\mathbf{p}_1 + \cdots + a_k\mathbf{p}_k$ pro nějaké $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k \in M$, nějaké skaláry $a_1, \dots, a_k$, a $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{p} \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_k \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{p}_i \rangle = 0$,
odtud plyne $\mathbf{u} \perp \mathbf{p}$ pro každé $\mathbf{p} \in \langle M \rangle$ a tedy $\mathbf{u} \in \langle M \rangle^{\perp}$

Základní vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ konečně dimenzionální prostor se skalárním součinem a $\mathbf{P}$ podprostor $\mathbf{V}$, pak platí

1. $\dim \mathbf{P}^{\perp} = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{P}$
2. $\mathbf{P} + \mathbf{P}^{\perp} = \mathbf{V}, \quad \mathbf{P} \cap \mathbf{P}^{\perp} = \{\mathbf{o}\}$
3. $(\mathbf{P}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{P}$

důkaz: podprostor $\mathbf{P}$ má konečnou dimenzi $k \leq \dim V$, zvolíme nějakou *ON* bázi $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k)$ a doplníme ji do *ON* báze $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}, \dots, \mathbf{q}_n)$ prostoru $\mathbf{V}$

1. podle tvrzení na str. 7-76 platí $\mathbf{P}^{\perp} = \langle \mathbf{q}_{k+1}, \dots, \mathbf{q}_n \rangle$ a protože posloupnost $\mathbf{q}_{k+1}, \dots, \mathbf{q}_n$ je *LN*, je to báze $\mathbf{P}^{\perp}$, což dokazuje $\dim \mathbf{P}^{\perp} = n - k = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{P}$

Dokončení důkazu

2. je-li $\mathbf{u} \in \mathbf{P} \cap \mathbf{P}^{\perp}$, pak $\mathbf{u} \perp \mathbf{u}$, tj. $\langle \mathbf{u} \,|\mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 = 0$, odkud plyne $\mathbf{u} = \mathbf{o}$

k důkazu druhé rovnosti vyjádříme libovolný prvek $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ jako *LK*
$\mathbf{u} = a_1\mathbf{q}_1 + \cdots + a_k\mathbf{q}_k + a_{k+1}\mathbf{q}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{q}_n$

potom $\mathbf{p} = a_1\mathbf{q}_1 + \cdots + a_k\mathbf{q}_k \in \mathbf{P}$ a
$\mathbf{w} = a_{k+1}\mathbf{q}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{q}_n \in \mathbf{P}^{\perp}$ a tedy $\mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{w} \in \mathbf{P} + \mathbf{P}^{\perp}$

3. protože pro každý vektor $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ platí $\mathbf{p} \perp \mathbf{u}$ pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{P}^{\perp}$, plyne odtud $\mathbf{p} \in (\mathbf{P}^{\perp})^{\perp}$ a tedy $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{P}^{\perp})^{\perp}$

nyní stačí porovnat dimenze $\mathbf{P}$ a $(\mathbf{P}^{\perp})^{\perp}$; podle bodu 1. platí $\dim(\mathbf{P}^{\perp})^{\perp} = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{P}^{\perp} = \dim \mathbf{V} - (\dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{P}) = \dim \mathbf{P}$, odkud plyne $\mathbf{P} = (\mathbf{P}^{\perp})^{\perp}$

důsledek: každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ lze jednoznačně vyjádřit jako součet $\mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ a $\mathbf{w} \in \mathbf{P}^{\perp}$

důkaz:

vektory $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ a $\mathbf{w} \in \mathbf{P}^\perp$ mají konkrétní geometrický význam

protože $\mathbf{p} = a_1\mathbf{q}_1 + \cdots + a_k\mathbf{q}_k = \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{u} \rangle \, \mathbf{q}_1 + \cdots + \langle \mathbf{q}_k | \mathbf{u} \rangle \, \mathbf{q}_k$ a $\mathbf{P} = \langle \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k \rangle$, vektor $\mathbf{p}$ je podle tvrzení na str. 7-43 a definice na str. 7-48 roven ortogonální projekci $\mathbf{u}$ na podprostor $\mathbf{P}$ a tu označujeme $\mathbf{u}_P$

podle tvrzení na str. 7-76 je $(\mathbf{q}_{k+1}, \ldots, \mathbf{q}_n)$ báze $\mathbf{P}^\perp$ a tedy vektor $\mathbf{w} = a_{k+1}\mathbf{q}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{q}_n = \langle \mathbf{q}_{k+1} | \mathbf{u} \rangle \, \mathbf{q}_{k+1} + \cdots + \langle \mathbf{q}_n | \mathbf{u} \rangle \, \mathbf{q}_n$ je ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{u}$ na podprostor $\mathbf{P}^\perp$, kterou označujeme $\mathbf{u}_{P^\perp}$

důsledek z předchozí strany pak můžeme zapsat jako

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_{P^\perp}$$

Kolmost mezi podprostory určenými maticí

tvrzení: je-li $A = (\mathbf{a}_1 | \cdots | \mathbf{a}_n)$ komplexní (nebo reálná) matice typu $m \times n$, pak platí

- $Ker\, A^* = (Im\, A)^\perp$ v prostoru $\mathbb{C}^m$ (nebo $Ker\, A^T = (Im\, A)^\perp$ v prostoru $\mathbb{R}^m$) se standardním skalárním součinem
- $Ker\, A = (Im\, A^*)^\perp$ v prostoru $\mathbb{C}^n$ (nebo $Ker\, A = (Im\, A^T)^\perp$ v prostoru $\mathbb{R}^n$) se standardním skalárním součinem

důkaz první části pro komplexní případ: i-tý řádkový vektor v matici A^* se rovná $\mathbf{a}_i^*$ pro každé $i = 1, \ldots, n$

platí $\mathbf{x} \in Ker\, A^*$ právě když $A^*\mathbf{x} = \mathbf{o}$, což platí právě když $\mathbf{a}_i^*\mathbf{x} = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$

to znamená, že $\mathbf{x} \in Ker\, A^*$ právě když $\mathbf{x} \in \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}^\perp$

podle vlastnosti 3. z tvrzení na str. 7-78 platí

$\mathbf{x} \in \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}^\perp$ právě když

$\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle^\perp = (Im\, A)^\perp$

druhá část plyne z první nahrazením matice A maticí A^*

Matice určující ortogonální projekci na přímku

je-li $\mathbf{u}$ prvek vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a $\mathbf{o} \neq \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ vektor s normou $\|\mathbf{w}\| = 1$, pak projekce $\mathbf{u}$ na podprostor $\langle \mathbf{w} \rangle$ je vektor $\mathbf{u}_{\langle \mathbf{w} \rangle} = \langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle \, \mathbf{w}$; budeme používat také jednodušší značení $\mathbf{u}_w$

pokud je norma vektoru $\mathbf{w} \neq 1$, pak normalizovaný vektor $\mathbf{w}' = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$ také generuje podprostor $\langle \mathbf{w} \rangle$ a projekce

$$\mathbf{u}_w = \langle \mathbf{w}' | \mathbf{u} \rangle \, \mathbf{w}' = \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{w}\|} \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w}$$

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ komplexní (nebo reálný) aritmetický prostor se standardním skalárním součinem a $\mathbf{o} \neq \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, pak zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ přiřadí jeho ortogonální projekci $\mathbf{u}_w$ na přímku $\langle \mathbf{w} \rangle$, je určené maticí $\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2}$

důkaz: $\mathbf{u}_w = \left(\frac{\mathbf{w}^*\mathbf{u}}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) \mathbf{w} = \mathbf{w} \left(\frac{\mathbf{w}^*\mathbf{u}}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) = \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{u}$

Příklad

příklad: spočteme ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u} = (1, 2, 3)^T \in \mathbb{R}^3$ na přímku generovanou vektorem $\mathbf{w} = (-1, 1, -1)^T$

$$\mathbf{w}\mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (-1, 1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{w}\|^2 = 3$$

ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ na přímku generovanou vektorem $\mathbf{w}$ je tedy

$$\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{3}\mathbf{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matice určující projekci na nadrovinu

má-li prostor $\mathbf{V}$ konečnou dimenzi n a $\mathbf{o} \neq \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, platí $\dim\langle\mathbf{w}\rangle = 1$ a podle bodu 1. tvrzení na str. 7-79 proto $\dim\langle\mathbf{w}\rangle^\perp = \dim \mathbf{V} - 1$, neboli $\langle\mathbf{w}\rangle^\perp$ je nadrovina v prostoru $\mathbf{V}$; projekci $\mathbf{u}_{\langle\mathbf{w}\rangle^\perp}$ budeme také označovat $\mathbf{u}_{w^\perp}$

z rovnosti $\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_{w^\perp}$ dole na str. 7-81 dostaneme ihned matici, pomocí které spočítáme snadno ortogonální projekci $\mathbf{u}_{w^\perp}$ libovolného vektoru $\mathbf{u}$ na nadrovinu $\langle\mathbf{w}\rangle^\perp = \{\mathbf{w}\}^\perp$

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ komplexní (nebo reálný) aritmetický prostor dimenze n se standardním skalárním součinem a $\mathbf{o} \neq \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, pak zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ přiřadí jeho ortogonální projekci $\mathbf{u}_{w^\perp}$ na nadrovinu $\langle\mathbf{w}\rangle^\perp$, je určené maticí $I_n - \dfrac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2}$

důkaz: $\mathbf{u}_{w^\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_w = I_n\mathbf{u} - \dfrac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{u} = (I_n - \dfrac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2})\mathbf{u}$

Matice určující ortogonální symetrii vzhledem k nadrovině

vektor $\mathbf{u} - \mathbf{u}_{w^\perp} = \mathbf{u}_w \in \langle\mathbf{w}\rangle$ je kolmý ke každému vektoru nadroviny $\langle\mathbf{w}\rangle^\perp$

odečteme-li od vektoru $\mathbf{u}$ vektor $2\mathbf{u}_w$, je rozdíl $\mathbf{u} - (\mathbf{u} - 2\mathbf{u}_w) = 2\mathbf{u}_w \in \langle\mathbf{w}\rangle$ a tedy rovněž kolmý ke každému vektoru nadroviny $\langle\mathbf{w}\rangle^\perp$

navíc $\mathbf{u} - \mathbf{u}_{w^\perp} = \mathbf{u}_w = \frac{1}{2}(\mathbf{u} - (\mathbf{u} - 2\mathbf{u}_w))$, což znamená, že vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{u} - 2\mathbf{u}_w$ jsou symetrické vzhledem k nadrovině $\langle\mathbf{w}\rangle^\perp$

Elementární reflektory a Householderovy reflexe

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ komplexní (nebo reálný) aritmetický prostor dimenze n se standardním skalárním součinem a $\mathbf{o} \neq \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, pak zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ přiřadí vektor $\mathbf{u} - 2\mathbf{u}_w$ symetrický k $\mathbf{u}$ vzhledem k nadrovině $\mathbf{u}_{w^\perp}$, je určené maticí $I_n - 2\dfrac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2}$

definice: matice $R = I_n - 2\dfrac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2}$ se nazývá *elementární reflektor* určený nenulovým vektorem $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$; zobrazení $f_R : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ určené maticí R se nazývá *Householderova reflexe* určená vektorem $\mathbf{w}$

pro elementární reflektor $R = I_n - 2\dfrac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2}$ spočteme, že

$$R^* = \left(I_n - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2}\right)^* = I_n^* - 2\frac{(\mathbf{w}\mathbf{w}^*)^*}{\|\mathbf{w}\|^2} = I_n - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2} = R,$$

tj. matice R je hermitovská (symetrická, pokud je R reálná)

Základní vlastnosti elementárních reflektorů

tvrzení: každý elementární reflektor R je unitární (nebo ortogonální) matice, pro kterou platí $R^2 = I_n$ a tedy $R^* = R = R^{-1}$

důkaz: vzhledem k tomu, že $R^* = R$, stačí ověřit, že $R^2 = I_n$

$$RR = (I_n - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2})(I_n - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2}) = I_n - 4\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2} + 4\frac{\mathbf{w}(\mathbf{w}^*\mathbf{w})\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^4} =$$

$$I_n - 4\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2} + 4\frac{\mathbf{w}\left(\|\mathbf{w}\|^2\mathbf{w}^*\right)}{\|\mathbf{w}\|^4} = I_n - 4\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2} + 4\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2} = I_n$$

protože $R = R^*$, plyne odtud $R^{-1} = R^*$ a R je tedy unitární (ortogonální) podle tvrzení na str. 7-71 (v případě komplexní matice R) nebo na str. 7-73 (v případě reálné matice R)

Význam ortogonálních matic pro numerickou stabilitu

relativně rychlý a numericky stabilní algoritmus pro řešení soustav lineárních rovnic spočívá v převedení matice soustavy A do řádkově odstupňovaného tvaru násobením matice A elementárními reflektory zleva

připomeňme, že Gaussova eliminace používá násobení matice A elementárními maticemi zleva a že každá elementární matice je regulární, *GE* tedy hledá regulární matici R takovou, že RA je v *řot*

protože každý elementární reflektor je unitární matice (v případě komplexních matic) nebo ortogonální matice (v případě reálných matic), v obou případech jde o regulární matice

ortogonální eliminace spočívá v nalezení unitární (ortogonální) matice Q takové, že QA je v *řot*

Eliminace pomocí elementárních reflektorů 1

úloha: pro daný nenulový komplexní (nebo reálný) aritmetický vektor $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$ najdeme elementární reflektor R takový, že vektor $R\mathbf{a}$ je násobkem prvního vektoru $\mathbf{e}_1$ kanonické báze

řešení: protože unitární i ortogonální matice zachovávají normu – viz podmínka 3. v tvrzení na str. na str. 7-71 nebo na str. 7-73 – platí $\|R\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$

proto musí platit $R\mathbf{a} = \mu\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}_1$, kde μ je nějaké komplexní (nebo reálné) číslo, pro které $|\mu| = 1$

elementární reflektor R určený vektorem $\mathbf{w}$
určuje symetrii vzhledem k nadrovině $\langle\mathbf{w}\rangle^\perp$

můžeme proto zvolit $\mathbf{w} = \mathbf{a} - \mu\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}_1$
(nebo jakýkoliv jiný nenulový násobek $\mathbf{w}$)

Eliminace pomocí elementárních reflektorů 2

potom $R = I_n - 2\dfrac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2}$ a $R\mathbf{a} = (I_n - 2\dfrac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2})\mathbf{a} = \mathbf{a} - 2\dfrac{\mathbf{w}^*\mathbf{a}}{\|\mathbf{w}\|^2}\,\mathbf{w}$

spočítáme
$$\begin{aligned}\mathbf{w}^*\mathbf{a} &= (\mathbf{a} - \mu\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}_1)^*\mathbf{a} = (\mathbf{a}^* - \overline{\mu}\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}_1^*)\,\mathbf{a}\\ &= \mathbf{a}^*\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|\,\overline{\mu}a_1\end{aligned}$$

podobně
$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}\|^2 &= \mathbf{w}^*\mathbf{w} = (\mathbf{a} - \mu\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}_1)^*(\mathbf{a} - \mu\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}_1)\\ &= (\mathbf{a}^* - \overline{\mu}\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}_1^*)(\mathbf{a} - \mu\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}_1)\\ &= \mathbf{a}^*\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|\,\overline{\mu}\mathbf{e}_1^*\mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|\,\mu\mathbf{a}^*\mathbf{e}_1 + \overline{\mu}\mu\|\mathbf{a}\|^2\,\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_1\\ &= \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{a}\|(\overline{\mu}a_1 + \mu\overline{a_1}) + |\mu|^2\|\mathbf{a}\|^2\\ &= 2\,\|\mathbf{a}\|^2 - 2\,Re(\overline{\mu}a_1)\|\mathbf{a}\|\end{aligned}$$

nyní stačí zvolit μ tak, aby bylo $\overline{\mu}a_1 \in \mathbb{R}$ (a samozřejmě $|\mu| = 1$)

$$\text{proto } \mu = \begin{cases} 1, & \text{pokud je } a_1 \in \mathbb{R} \text{ (včetně případu } a_1 = 0)\\ \dfrac{a_1}{|a_1|}, & \text{pokud platí } a_1 \notin \mathbb{R}\end{cases}$$

Eliminace pomocí elementárních reflektorů 3

při této volbě μ dostáváme $\|\mathbf{w}\|^2 = 2\,\|\mathbf{a}\|^2 - 2\,\overline{\mu}a_1\|\mathbf{a}\| = 2\,\mathbf{w}^*\mathbf{a}$,

$$R\mathbf{a} = (I_n - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^*}{\|\mathbf{w}\|^2})\mathbf{a} = \mathbf{a} - 2\frac{\mathbf{w}(\mathbf{w}^*\mathbf{a})}{\|\mathbf{w}\|^2} = \mathbf{a} - 2\frac{\mathbf{w}^*\mathbf{a}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} = \mu\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}_1$$

příklad: je-li $\mathbf{a} = (0, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^3$, najdeme elementární reflektor, který zobrazí $\mathbf{a}$ do přímky generované $\mathbf{e}_1$

platí $\|a\| = 5$ a $a_1 \in \mathbb{R}$, zvolíme proto $\mathbf{w} = \mathbf{a} - 5\mathbf{e}_1 = (-5, 3, 4)^T$

$$\text{potom } R = I_3 - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{\|\mathbf{w}\|^2} = I_3 - \frac{2}{50}\begin{pmatrix} 25 & -15 & -20\\ -15 & 9 & 12\\ -20 & 12 & 16\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 20\\ 15 & 16 & -12\\ 20 & -12 & 9\end{pmatrix} \quad \text{a} \quad R\mathbf{a} = R\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} = 5\mathbf{e}_1$$

Eliminace pomocí elementárních reflektorů 4

je-li nyní $A = (a_1|\cdots|a_n)$ libovolná reálná nebo komplexní matice typu $m \times n$ a $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$, zvolíme reflektor R určený vektorem $\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 - \mu\|\mathbf{a}_1\|\,\mathbf{e}_1$

potom $RA = (R\mathbf{a}_1|R\mathbf{a}_2|\cdots|R\mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mu\|\mathbf{a}_1\| & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

místo elementárních reflektorů R lze k převedení matice A do řádkově odstupňovaného tvaru také použít tzv. Givensovy rotace, jiný typ ortogonálních (unitárních matic)

Ortogonální projekce na podprostor bez *ON* báze

jak najít ortogonální projekci prvku $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ prostoru se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ na konečně generovaný podprostor $\mathbf{P} \leq \mathbf{V}$, známe-li nějakou ortonormální bázi v $\mathbf{P}$, jsme si ukázali na str. 7-42

nyní si ukážeme přímou metodu vhodnou pro situaci, kdy známe pouze nějakou konečnou množinu generátorů podprostoru $\mathbf{P}$

je-li $\mathbf{P} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$, pak hledáme prvek $\mathbf{u}_P \in \mathbf{P}$ takový, že vektor $\mathbf{u} - \mathbf{u}_P$ je ortogonální k libovolnému prvku $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$

k tomu je nutné a stačí, aby platilo $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_P) \perp \mathbf{v}_i$ pro každé $i = 1, \dots, k$

víme už, že prvek $\mathbf{u}_P$ vždy existuje a je jednoznačně určený

protože $\mathbf{u}_P \in \mathbf{P}$, existuje vyjádření $\mathbf{u}_P = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_k\mathbf{v}_k$

Gramova matice

pro každé $i = 1, \dots, k$ platí $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_P) \perp \mathbf{v}_i$ právě když
$0 = \langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{u} - \mathbf{u}_P\rangle = \langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{u}_P\rangle =$
$\langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{v}_i\,|x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_k\mathbf{v}_k\rangle =$
$\langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{u}\rangle - x_1\langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{v}_1\rangle - \dots - x_k\langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{v}_k\rangle$

tvrzení: pro skaláry $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ platí $\mathbf{u}_P = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_k\mathbf{v}_k$ právě když $x_1\langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{v}_1\rangle + \dots + x_k\langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{v}_k\rangle = \langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{u}\rangle$ pro $i = 1, \dots, k$

definice: je-li $\mathbf{V}$ prostor se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$, pak matici

$$G = (\langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{v}_j\rangle) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1|\mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2\rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_1|\mathbf{v}_k\rangle \\ \langle \mathbf{v}_2|\mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_2|\mathbf{v}_2\rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_2|\mathbf{v}_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_k|\mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_k|\mathbf{v}_2\rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_k|\mathbf{v}_k\rangle \end{pmatrix}$$

nazýváme *Gramova matice* určená vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$

Regularita Gramovy matice

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ prostor se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$, pak Gramova matice $G = (\langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{v}_j\rangle)$ určená vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ je regulární právě když posloupnost $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně nezávislá ve $\mathbf{V}$

důkaz: označíme $\mathbf{P} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\rangle$ a zvolíme $\mathbf{u} = \mathbf{o} \in \mathbf{P}$

potom platí $\mathbf{u}_P = \mathbf{o}_P = \mathbf{o}$ a $\langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{u}_P\rangle = 0$ pro každé $i = 1, \dots, k$

podle tvrzení na předchozí str. 7-95 platí pro libovolné skaláry $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ rovnost $x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}$ $(= \mathbf{u}_P)$ právě když vektor koeficientů $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)^T$ splňuje $G\mathbf{x} = \mathbf{o}$

homogenní soustava lineárních rovnic $G\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má tedy nenulové řešení právě když existuje netriviální lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ rovná nulovému vektoru $\mathbf{o}$

Dokončení důkazu

levá strana této ekvivalence je podle podmínky 4. na str. 4-67 ekvivalentní tomu, že Gramova matice G je singulární

pravá strana je podle tvrzení na str. 5-35 ekvivalentní tomu, že posloupnost vektorů $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ je lineárně závislá

dokázali jsme tak, že Gramova matice G určená vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ je singulární právě když je posloupnost $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ lineárně závislá

Metoda nejmenších čtverců - obsah

Aproximace prvku v podprostoru

je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a $\mathbf{P}$ konečně generovaný podprostor $\mathbf{V}$, pak pro každý prvek $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ existuje ortogonální projekce $\mathbf{u}_P \in \mathbf{P}$ vektoru $\mathbf{u}$ na podprostor $\mathbf{P}$

podle tvrzení na str. 7-43 platí, že $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_P\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{q}\|$ pro každý vektor $\mathbf{q} \in \mathbf{P}$, přičemž rovnost nastává právě když $\mathbf{q} = \mathbf{u}_P$

jinak řečeno, ortogonální projekce $\mathbf{u}_P$ vektoru $\mathbf{u}$ na podprostor $\mathbf{P}$ má od prvku $\mathbf{u}$ nejmenší vzdálenost mezi všemi prvky podprostoru $\mathbf{P}$

definice: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$, $\mathbf{P}$ konečně generovaný podprostor $\mathbf{V}$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, pak ortogonální projekci $\mathbf{u}_P$ prvku $\mathbf{u}$ na podprostor $\mathbf{P}$ nazýváme *aproximace prvku* $\mathbf{u}$ *v podprostoru* $\mathbf{P}$ *získaná metodou nejmenších čtverců*; vzdálenost $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_P\|$ se nazývá *chyba aproximace*

Nalezení aproximace

ukázali jsme si dosud dvě metody nalezení aproximace prvku $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ v podprostoru $\mathbf{P} \leq \mathbf{V}$ metodou nejmenších čtverců

v případě, že známe nějakou ortonormální bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ podprostoru $\mathbf{P}$, najdeme aproximaci $\mathbf{u}_P$ podle tvrzení na str. 7-43 jako $\mathbf{u}_P = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_k$

známe-li pouze nějakou množinu $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ generující podprostor $\mathbf{P}$, pak podle tvrzení na str. 7-95 najdeme aproximaci $\mathbf{u}_P$ ve tvaru $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, kde koeficienty $a_1, \ldots, a_k$ zvolíme jako libovolné řešení soustavy lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
a_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle + \cdots + a_k \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_k \rangle &= \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u} \rangle \\
a_1 \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle + \cdots + a_k \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_k \rangle &= \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u} \rangle \\
&\vdots \\
a_1 \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{v}_1 \rangle + \cdots + a_k \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{v}_k \rangle &= \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{u} \rangle
\end{aligned}
$$

Příklad

obě metody si připomeneme při řešení úlohy najít v prostoru $C(0,1)$ spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $\langle 0,1\rangle$ se skalárním součinem $\langle f\,|g\rangle = \int_0^1 fg$ aproximaci funkce x^2 v podprostoru $\mathbf{P} = \langle 1, x\rangle$ polynonomů nejvýše prvního stupně

první metoda spočívá v nalezení *ON* báze $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ v $\mathbf{P}$; můžeme použít klasickou *GSO* na *LN* posloupnost generátorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (1, x)$ podprostoru $\mathbf{P}$, analogicky tomu, jak jsme hledali Legendreovy polynomy na str. 7-66

$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \int_0^1 1^2 = [x]_0^1 = 1$ a tedy $\mathbf{q}_1 = 1$

$$\langle \mathbf{q}_1\,|\mathbf{v}_2\rangle = \int_0^1 x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},\quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{q}_1\,|\mathbf{v}_2\rangle\,\mathbf{q}_1 = x - \frac{1}{2}$$

$$\|b_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12},\quad \mathbf{q}_2 = \sqrt{3}(2x-1)$$

Příklad - pokračování

metodou nejmenších čtverců tak získáme aproximaci $\mathbf{u} = x^2$ v podprostoru $\mathbf{P}$ ve tvaru $\mathbf{u}_P = \langle \mathbf{q}_1\,|\mathbf{u}\rangle\,\mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{q}_2\,|\mathbf{u}\rangle\,\mathbf{q}_2$

spočteme $\langle \mathbf{q}_1\,|\mathbf{u}\rangle = \int_0^1 x^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$$\langle \mathbf{q}_2\,|\mathbf{u}\rangle = \int_0^1 \sqrt{3}(2x^3 - x^2) = \left[\sqrt{3}\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\mathbf{u}_P = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{3}\,(2x-1) = x - \frac{1}{6}$$

druhá metoda spočívá v nalezení Gramovy matice určené funkcemi $\mathbf{v}_1 = 1$, $\mathbf{v}_2 = x$

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1\,|\mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_1\,|\mathbf{v}_2\rangle \\ \langle \mathbf{v}_2\,|\mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_2\,|\mathbf{v}_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 1 & \int_0^1 x \\ \int_0^1 x & \int_0^1 x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Příklad - dokončení

a ve výpočtu koeficientů hledaného polynomu $\mathbf{u}_P = a + bx$ jako řešení $(a,b)^T$ soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} \langle \mathbf{v}_1\,|\mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_1\,|\mathbf{v}_2\rangle & \langle \mathbf{v}_1\,|\mathbf{u}\rangle \\ \langle \mathbf{v}_2\,|\mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_2\,|\mathbf{v}_2\rangle & \langle \mathbf{v}_2\,|\mathbf{u}\rangle \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \end{array}\right)$$

ta má jediné řešení $(a,b)^T = (-1/6, 1)^T$, dostáváme opět $\mathbf{u}_P = -\frac{1}{6} + x$

chyba aproximace je $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_P\| = \sqrt{\langle x^2 - x + \frac{1}{6}\,|x^2 - x + \frac{1}{6}\rangle} =$

$$\sqrt{\int_0^1 (x^2 - x + \tfrac{1}{6})^2} = \sqrt{\int_0^1 x^4 - 2x^3 + \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{36}} =$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{36}} = \sqrt{\tfrac{1}{30}}$$

Proč název *metoda nejmenších čtverců*

uvažujeme neřešitelnou soustavu lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $A = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ je reálná matice typu $m \times n$

víme, že soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je neřešitelná právě když $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \notin \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\rangle = Im\,A \leq \mathbb{R}^m$

připomeňme také, že $Im\,A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$

můžeme aproximovat pravou stranu $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ v podprostoru $Im\,A$ metodou nejmenších čtverců, tj. najít ortogonální projekci $\mathbf{b}_{Im\,A}$ vektoru $\mathbf{b}$ do sloupcového prostoru $Im\,A$ matice A

chyba aproximace $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_{Im\,A}\|$ mezi všemi vzdálenostmi $\{\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| : \mathbf{c} \in Im\,A\}$ je nejmenší právě když je nejmenší mocnina $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 = \langle \mathbf{b} - \mathbf{c}\,|\mathbf{b} - \mathbf{c}\rangle = (b_1 - c_1)^2 + \cdots + (b_m - c_m)^2$

Přibližné řešení soustavy lineárních rovnic

definice: je-li $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soustava lineárních rovnic s reálnými nebo komplexními koeficienty a $\mathbf{b}_{Im\,A}$ aproximace pravé strany $\mathbf{b}$ v podprostoru $Im\,A$ metodou nejmenších čverců, pak každé řešení $\mathbf{x}$ soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{Im\,A}$ nazýváme *přibližné (aproximace) řešení soustavy* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *metodou nejmenších čtverců*; **označení**: $\hat{\mathbf{x}}$

přívlastek *metodou nejmenších čtverců* budeme v dalším většinou vynechávat, s jinými metodami aproximace se v tomto kurzu nesetkáme

poznámka: je-li soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešitelná, tj. platí-li $\mathbf{b} \in Im\,A$, je ortogonální projekce $\mathbf{b}_{Im\,A} = \mathbf{b}$ a množina všech přibližných řešení $\hat{\mathbf{x}}$ soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, která se podle definice rovná množině všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{Im\,A}$, se v tomto případě shoduje s množinou všech (skutečných) řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Soustava normálních rovnic k $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

tvrzení: je-li A komplexní (nebo reálná) matice typu $m \times n$ a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soustava lineárních rovnic, pak vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$ (nebo $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$) je přibližné řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě když je (skutečným) řešením soustavy $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ (nebo $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$)

důkaz: podle definice je vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$ přibližné řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě když $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_{Im\,A}$

vektor $\mathbf{p} \in Im\,A$ je roven ortogonální projekci $\mathbf{b}_{Im\,A}$ vektoru $\mathbf{b}$ na podprostor $Im\,A$ právě když $(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \in (Im\,A)^\perp$

podle druhé části tvrzení na str. 7-82 platí $(Im\,A)^\perp = Ker\,A^*$

platí tedy $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_{Im\,A}$ právě když $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \in Ker\,A^*$, což je právě když $A^*(A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{o}$, a to platí právě když $A^*A\hat{\mathbf{x}} = A^*\mathbf{b}$

definice: je-li $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soustava lineárních rovnic s komplexními (nebo reálnými) koeficienty, pak soustava $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ (nebo $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$) se nazývá *soustava normálních rovnic* k soustavě $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Regularita matice A^*A (nebo A^TA)

poznámka: tvrzení na předchozí str. 7-106 můžeme také dokázat pomocí Gramovy matice

při hledání přibližného řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců používáme standardní skalární součin v prostoru $\mathbb{C}^n$ nebo $\mathbb{R}^n$

Gramova matice G určená sloupcovými vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ má na místě (i,j) prvek $\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle = \mathbf{a}_i^*\mathbf{a}_j$, což je prvek na místě (i,j) v součinu matic A^*A

podle tvrzení na str. 7-95 je $\hat{\mathbf{x}}$ přibližné řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě když $A^*A\hat{\mathbf{x}} = G\,\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1^*\mathbf{b}, \mathbf{a}_2^*\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{a}_n^*\mathbf{b})^T = A^*\mathbf{b}$

tvrzení: je-li A komplexní (nebo reálná) matice typu $m \times n$, pak matice A^*A (nebo A^TA) je regulární právě když je posloupnost sloupcových vektorů $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ matice A lineárně nezávislá

Pseudoinverze

důkaz posledního tvrzení plyne ihned z tvrzení na str. 7-96

v případě, že posloupnost sloupcových vektorů $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ komplexní (nebo reálné) matice A je lineárně nezávislá, existuje jednoznačně určené přibližné řešení $\hat{\mathbf{x}} = (A^*A)^{-1}A^*\mathbf{b}$ (nebo $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$) soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

definice: je-li posloupnost sloupcových vektorů $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ komplexní (nebo reálné) matice A lineárně nezávislá, pak matici $(A^*A)^{-1}A^*$ (nebo $(A^TA)^{-1}A^T$) nazýváme *pseudoinverze* matice A; **označení**: $A^\dagger$

pozorování: pseudoinverze $A^\dagger$ je inverzní zleva k matici A

platí totiž $A^\dagger A = (A^*A)^{-1}A^*A = I_n$

připomeňme ještě, že matice inverzní zleva k matici A je určená jednoznačně právě když je matice A regulární

Příklad

najdeme přibližné řešení soustavy $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \end{array}\right)$

spočteme $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

$\hat{\mathbf{x}} = A^\dagger \mathbf{b} = A^\dagger (3,5,-2)^T = (1,2)^T$, $\mathbf{b}_{Im\,A} = A\hat{\mathbf{x}} = (2,3,-4)^T$

chyba aproximace řešení je $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_{Im\,A}\| = \|(1,2,2)^T\| = 3$

Úplně jednoduchý příklad

najdeme přibližné řešení soustavy lineárních rovnic
$x = b_i$, $i = 1, \dots, m$

matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, pravá strana $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$A^T A = (m)$

$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T = (m^{-1}, m^{-1}, \dots, m^{-1})$

$\hat{\mathbf{x}} = A^\dagger \mathbf{b} = \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_m}{m}$

Lineární regrese

jedna z nej(zne)užívanějších metod

vstupní data: konečná množina bodů v euklidovské rovině
$(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_m, y_m)$

cíl: proložit daty „co nejpřesněji“ přímku $y = at + b$

hledáme koeficienty a, b tak, aby pokud možno platilo $y_i = at_i + b$ pro $i = 1, \dots, n$

řešíme-li tuto úlohu metodou nejmenších čtverců, hledáme přibližné řešení $(a,b)^T$ soustavy s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} t_1 & 1 & y_1 \\ t_2 & 1 & y_2 \\ & \vdots & \\ t_m & 1 & y_m \end{array}\right)$$

Co minimalizujeme

přibližné řešení této soustavy minimalizuje $\sum_{i=1}^{n} (at_i + b_i - y_i)^2$

kdy použít: máme-li dobrý důvod předpokládat, že závislost mezi proměnnými t a y je lineární, nebo když naměřená data po vyznačení v rovině „zjevně oscilují“ kolem jakési přímky

typický je případ, kdy jednu z proměnných (v našem případě nezávislou proměnnou t) můžeme měřit přesně a druhou (závislou proměnnou y) můžeme měřit jen s omezenou přesností, například polohu satelitu pohybujícího se v meziplanetárním prostoru rovnoměrným přímočarým pohybem

Příklad

použijeme lineární regresi k proložení přímky $y = ax + b$ body $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,4)$, $(4,5)$ v euklidovské rovině

hledáme přibližné řešení soustavy

$$(A|\mathbf{y}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

spočteme $A^TA = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$, $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 30 \end{pmatrix}$

$$A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -10 & -5 & 0 & 5 & 10 \\ 30 & 20 & 10 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$\hat{\mathbf{a}} = (a,b)^T = A^\dagger\,\mathbf{y} = A^\dagger(1,1,2,4,5)^T = (11/10, 2/5)^T$

Moderní magistr Kelly v akci 1

lineární regrese dá nějaký výsledek pro jakákoliv data; klíčová otázka zní: **má tento výsledek nějakou rozumnou interpretaci ?**

Sonda maturant 1998: měření přidané hodnoty škol

- každé škole přiřadíme dvojici čísel (x_i, y_i), kde x_i je průměrný výsledek žáků i-té školy v testu obecných studijních předpokladů *OSP* a y_i je průměrný výsledek žáků této školy v testu z matematiky *M* (konaných ve stejném týdnu)
- na tato data použijeme „pokročilou matematickou metodu“ lineární regrese, dostaneme lineární funkci $y = ax + b$
- číslo $y_i - (ax_i + b_i)$ vyjadřuje *přidanou hodnotu*, kterou i-tá škola poskytla svým žákům
- to umožňuje sestavit pro rodiče a úředníky žebříček škol podle toho, jak dobře školy své žáky vzdělávají

Moderní magistr Kelly v akci 2

nevyřčené předpoklady ospravedlňující použití lineární regrese

- test *OSP* měří „cosi“, co má student dáno nezávisle na škole
- toto „cosi“ je v čase neměnné, studenti by dosáhli stejných průměrných výsledků v testu *OSP* v době nástupu do školy před čtyřmi/šesti/osmi roky
- průměrný výsledek v testu *M* měří celkovou úroveň „vzdělanosti“ žáků školy na konci jejich studia
- průměrný výsledek v testu *M* je *na průměrně fungující škole* lineárně závislý na tom „čemsi“, co změříme průměrným výsledkem v testu *OSP*
- odchylky od této lineární závislosti (oběma směry) měří celkovou „kvalitu vzdělávání“ na škole
- čím výše je bod odpovídající škole nad přímkou nalezenou lineární regresí, tím lépe škola žáky „vzdělává“, čím níže je pod ní, tím škola žáky „vzdělává“ hůře

Polynomiální aproximace naměřených dat

naměřená data (t_i, y_i) pro $i = 1, \dots, m$ můžeme aproximovat reálným polynomem $p_{n-1}(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1}$ stupně menšího než n

v tom případě hledáme přibližné řešení soustavy

$$(A|\mathbf{y}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} & y_1 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} & y_2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & \cdots & t_3^{n-1} & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^{n-1} & y_m \end{array}\right)$$

jsou-li čísla $t_1, \dots, t_m$ navzájem různá a $m \geq n$, matici A tvoří prvních n sloupců Vandermondovy matice $V(t_1, \dots, t_m)$, která je podle tvrzení na str. 6-53 regulární a posloupnost sloupcových vektorů matice A je proto lineárně nezávislá

soustava $(A|\mathbf{y})$ má potom jednoznačně určené přibližné řešení

Kvadratická regrese

data ze str. 7-113 aproximujeme pomocí polynomu
$p(t) = a + bt + ct^2$ nejvýše druhého stupně; dostáváme soustavu

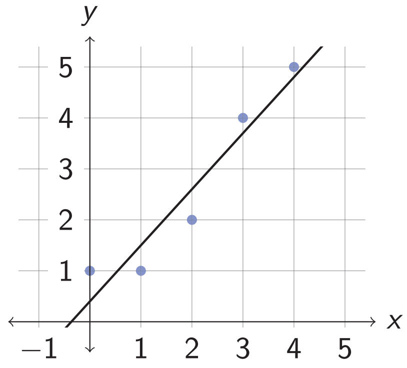
$$(A|\mathbf{y}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 16 & 5 \end{array}\right), \quad A^TA = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix},$$

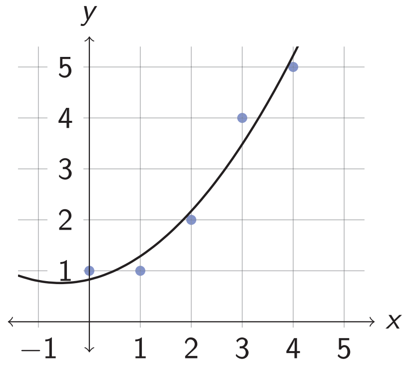
$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{700}\begin{pmatrix} 620 & -540 & 100 \\ -540 & 870 & -200 \\ 100 & -200 & 50 \end{pmatrix},$$

$$A^{\dagger} = (A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 62 & 18 & -6 & -10 & 6 \\ -54 & 13 & 40 & 27 & -26 \\ 10 & -5 & -10 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = (a, b, c)^T = A^{\dagger}(1, 1, 2, 4, 5)^T = (58/70, 17/70, 15/70)^T$$

Porovnání obou aproximací





chyba aproximace: $1,0488$ chyba aproximace: $0,6761$

povinné video: http://technet.idnes.cz/pocitace-chyby-0ph-/veda.aspx?c=A131111_072745_veda_nyv

Globální aproximace funkce polynomem

dána funkce $g(t) = \dfrac{4t}{1 + 10t^2}$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$

v tomto intervalu zvolíme 100 různých bodů $t_1, \dots, t_{100}$

naše data jsou $(t_i, g(t_i))$ pro $i = 1, 2, \dots, 100$

těmito daty proložíme metodou nejmenších čtverců polynomy
$p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ a $p_4(t)$

chyby těchto aproximací jsou postupně
$0,135$, $0,076$, $0,025$ a $0,005$

porovnání s Taylorovými polynomy

Aproximace funkcí více proměnných

metodu nejmenších čtverců můžeme použít k hledání aproximací reálných (nebo komplexních) funkcí libovolného počtu proměnných

například funkce $g : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ může popisovat teplotu v jednotlivých bodech čtvercové desky

senzory měří teplotu $g(s_i)$ v m různých bodech $s_1, \dots, s_m$ desky a chceme znát její teplotu v dalších 21 bodech, kam senzory nelze umístit

k tomu využijeme množinu $f_1, \dots, f_n$ nějakých *bázových funkcí* $f_i : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, také se jim někdy říká *regresory*, obvykle platí $m \gg n$

hledáme čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, pro která je součet $\sum_{i=1}^{m}(x_1f_1(s_i) + x_2f_2(s_i) + \dots + x_nf_n(s_i) - g(s_i))^2$ co nejmenší

různé obory používají různé množiny bázových funkcí (regresorů)

Chyba aproximací v různých podprostorech

na příkladech jsme viděli, že pokud hledáme aproximaci dat pomocí polynomů, pak je chyba aproximace tím menší, čím větší množinu polynomů použijeme

to není žádná speciální vlastnost polynomů, jak ukazuje následující

tvrzení: jsou-li $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ dva konečně generované podprostory prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{u}_P$ (resp. $\mathbf{u}_Q$) ortogonální projekce $\mathbf{u}$ do podprostoru $\mathbf{P}$ (resp. do podprostoru $\mathbf{Q}$), pak platí $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_P\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_Q\|$, přičemž rovnost nastává právě když $\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P$

důkaz: protože $\mathbf{u}_Q \in \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$, správnost tvrzení plyne z důsledku 3 na str. 7-48

větší konečná množina bázových funkcí (regresorů) generuje větší podprostor v prostoru $\mathbf{V}$ všech reálných funkcí na dané množině X a vede tak k lepší aproximaci dané funkce $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$

Metoda nejmenších čtverců a QR-rozklad

hledáme-li přibližné řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde matice A je typu $m \times n$, a posloupnost $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ sloupcových vektorů matice A je lineárně nezávislá, můžeme s výhodou použít QR-rozklad matice A, který existuje podle věty na str. 7-53

přibližné řešení $\hat{\mathbf{x}}$ soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ najdeme jako (skutečné) řešení soustavy normálních rovnic $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$ (nebo $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ v reálném případě)

pro QR-rozklad $A = QR$ matice A platí $Q^*Q = I_n$ ($Q^TQ = I_n$ v reálném případě), protože posloupnost sloupcových vektorů matice Q je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu

pro pseudoinverzi $A^\dagger$ matice A pak dostáváme vyjádření

$$A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^* = (R^*Q^*QR)^{-1}R^*Q^* = R^{-1}(R^*)^{-1}R^*Q^* = R^{-1}Q^*$$

a tedy $\hat{\mathbf{x}} = R^{-1}Q^*\mathbf{b}$ (nebo $\hat{\mathbf{x}} = R^{-1}Q^T\mathbf{b}$ v reálném případě)

Kolik bázových funkcí?

při aproximaci dat obykle chceme dosáhnout předem dané přesnosti aproximace, tj. nepřekročit předem danou velikost chyby $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|$

počet sloupců matice A závisí na počtu bázových funkcí

použijeme-li k výpočtu pseudoinverze QR-rozklad matice $A = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$, během výpočtu QR-rozkladu $A = QR$ matice A po každém kroku GSO máme k dispozici QR-rozklad matice $A_p = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_p)$ pro každé $p = 1, \ldots, n$

platí totiž $A_p = Q_pR_p$, kde matici Q_p tvoří prvních p sloupců matice Q a matici R_p prvních p sloupců matice R

v průběhu GSO tak můžeme snadno paralelně dopočítat pseudoinverzi $A_p^\dagger = R_p^{-1}Q_p^T$ pro každé $p = 1, \ldots, n$, aproximaci $\hat{\mathbf{x}}_p = A_p^\dagger\mathbf{b}$ a její chybu $\|A_p\hat{\mathbf{x}}_p - \mathbf{b}\|$, a výpočet ukončit po dosažení dostatečné přesnosti aproximace

Navigace v rovině pomocí měření vzdáleností

je dán bod v rovině

jeho polohový

vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$

neznáme, umíme ale

změřit vzdálenosti

od $\mathbf{x}$ ke čtyřem

vzdáleným majákům

normované směrové vektory z bodu $\mathbf{x}$ k majákům jsou

$\mathbf{k}_1 = (0.7, \sqrt{0.51})^T$, $\mathbf{k}_2 = (-\sqrt{0.84}, 0.4)^T$,
$\mathbf{k}_3 = (-0.2, -\sqrt{0.96})^T$, $\mathbf{k}_4 = (0.8, -0.6)^T$

Kdybychom měli přesná měření

známe-li absolutně přesně

- polohy všech čtyř majáků $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i})^T$ pro $i = 1, 2, 3, 4$
- všechny čtyři vzdálenosti $d_i = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}\|$ pro $i = 1, 2, 3, 4$

dostaneme hledané souřadnice polohového vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ jako řešení soustavy čtyř rovnic $\quad \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}\| = d_i \quad$ pro dvě neznámé x_1, x_2, kterou převedeme na soustavu

$$(a_{1i} - x_1)^2 + (a_{2i} - x_2)^2 = d_i^2, \; i = 1, 2, 3, 4$$

řešit tuto soustavu kvadratických rovnic umíme

geometricky víme, že hledaný bod je průsečíkem čtyř kružnic (stačily by pouze dvě kružnice/rovnice)

stejně tak je hledaný bod průsečíkem tečen ke kružnicím, které procházejí společným bodem kružnic

Linearizace soustavy

pokud chceme hledat průsečík tečen, potřebujeme sestavit jejich rovnice, k tomu potřebujeme znát pro každé $i = 1, 2, 3, 4$

- normovaný směrový vektor $\mathbf{k}_i = (k_{1i}, k_{2i})^T = d_i^{-1}(\mathbf{a}_i - \mathbf{x})$

potom platí $d_i = \mathbf{k}_i^T(\mathbf{a}_i - \mathbf{x})$, neboli

$\mathbf{k}_i^T\mathbf{x} = d_i - \mathbf{k}_i^T\mathbf{a}_i$ pro každé $i = 1, 2, 3, 4$

čili souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ najdeme jako řešení soustavy lineárních rovnic $\quad k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 = d_i - \mathbf{k}_i^T\mathbf{a}_i \quad$ pro $i = 1, 2, 3, 4$

přechodu od původní soustavy nelineárních rovnic k soustavě lineárních rovnic, se říká *linearizace soustavy*

ještě pro jednoduchost označíme $b_i = d_i - \mathbf{k}_i^T\mathbf{a}_i$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$

Měření nejsou nikdy zcela přesná

měření vzdáleností d_i, poloh majáků $\mathbf{a}_i$ a směrových vektorů $\mathbf{a}_i - \mathbf{x}$ nejsou nikdy zcela přesná a proto se kružnice nebo tečny skoro nikdy v jednom bodě neprotínají

v takovém případě hledáme souřadnice $(x_1, x_2)^T$ tak, aby byl minimální součet „chyb“ $\quad \sum_{i=1}^4 (d_i - \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}\|)^2 \quad$ v případě soustavy rovnic popisujících kružnice

nebo součet $\quad \sum_{i=1}^4 (k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 - b_i)^2 = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{k}_i^T\mathbf{x} - b_i)^2 \quad$ v případě soustavy rovnic pro tečny

Význam linearizace

první úloha na minimalizaci chyb je řešitelná pouze přibližně nějakou *iterační* metodou

druhá úloha je úloha na přibližné řešení soustavy metodou nejmenších čtverců

abychom to viděli, stačí označit $A = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \\ k_{41} & k_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1^T \\ \mathbf{k}_2^T \\ \mathbf{k}_3^T \\ \mathbf{k}_4^T \end{pmatrix}$

snažíme se pak minimalizovat číslo $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$, neboli vzdálenost vektoru $\mathbf{b}$ od sloupcového prostoru $Im\, A$

linearizace úlohy je ospravedlněná velkou vzdáleností majáků, v malém okolí bodu $\mathbf{x}$ vypadají kružnice „skoro“ jako přímky

Řešení linearizované soustavy

naše skutečná poloha je $(0.021, 3.89)^T$, měřením jsem získali vektor $\mathbf{b} = (5.23, 3.81, 8.25, -1.28)$ a spočítáme

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & \sqrt{0,51} \\ -\sqrt{0,84} & 0,4 \\ -0,2 & -\sqrt{0,96} \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix}, \; A^T A = \begin{pmatrix} 2,01 & -0,151 \\ -0,151 & 1,99 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3,997} \begin{pmatrix} 1,99 & 0,151 \\ 0,151 & 2,01 \end{pmatrix},$$

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} 0,377 & -0,443 & -0,137 & 0,378 \\ 0,387 & 0,167 & -0,053 & -0,273 \end{pmatrix}$$

$\hat{\mathbf{x}} = A^\dagger \mathbf{b} = (-1.330, 2.572)^T$, což je odhad polohy bodu $\mathbf{x}$ získaný z linearizované soustavy metodou nejmenších čtverců

chyba odhadu je $\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| = 1,887$

Odhad polohy na základě pouhých dvou měření

v tom případě řešíme $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,23 \\ 3,81 \end{pmatrix}$

označíme $A_2 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & \sqrt{0,51} \\ -\sqrt{0,84} & 0,4 \end{pmatrix}$, pak

$$A_2^{-1} = \frac{1}{0,9345} \begin{pmatrix} 0,4 & -\sqrt{0,51} \\ \sqrt{0,84} & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,428 & -0,764 \\ 0,981 & 0,749 \end{pmatrix}$$

získáme tak jiný odhad $\hat{\mathbf{x}}_1 = A_2^{-1} \begin{pmatrix} 5,23 \\ 3,81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.672 \\ 7.984 \end{pmatrix}$

chyba tohoto druhého odhadu je $\|\hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}\| = 4,152$

otázka: může se stát (a v jakém případě), že by odhad $\hat{\mathbf{x}}_1$ byl mnohem přesnější než odhad $\hat{\mathbf{x}}$ získaný ze všech čtyř měření metodou nejmenších čverců ?

Různé levé inverze

všimněme si, že

$$\begin{pmatrix} 0,428 & -0,764 & 0 & 0 \\ 0,981 & 0,749 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & \sqrt{0,51} \\ -\sqrt{0,84} & 0,4 \\ -0,2 & -\sqrt{0,96} \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} = I_2$$

neboli matice $(A_2^{-1} | O_{2\times 2})$ je stejně jako $A^\dagger$ matice inverzní zleva k matici A,

$$\text{a } \hat{\mathbf{x}}_1 = (A_2^{-1} | O_{2\times 2})\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,428 & -0,764 & 0 & 0 \\ 0,981 & 0,749 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5,23 \\ 3,81 \\ 8,25 \\ -1,28 \end{pmatrix}$$

Na střelnici s Kateřinou Emmons

střední hodnota (odhad):

$$\mu_{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i}{n}$$

$\mu_{\mathbf{y}} =$

$\mu_{\mathbf{z}} =$

Kateřina poprvé: $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2})^T$, pro $i = 1, \dots, n$
Kateřina podruhé: $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2})^T$, pro $i = 1, \dots, n$
já: $\mathbf{z}_i = (z_{i1}, z_{i2})^T$, pro $i = 1, \dots, m$

směrodatná odchylka (odhad): $\sigma_{\mathbf{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i - \mu_{\mathbf{x}}\|^2}{n}} =$,
$\sigma_{\mathbf{y}} =$, $\sigma_{\mathbf{z}} =$

Odhad polohy středu terče 1

máme s Kateřinou každý jednu ránu, vy máte odhadnout na základě našich střel, kde je střed terče $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$

znáte souřadnice střel $\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T$ (Kateřina) a $\mathbf{l} = (l_1, l_2)^T$ (já)

předpokládejme na okamžik, že oba střílíme stejně přesně

nemáte žádný důvod předpokládat, že střela od Kateřiny je blíže ke středu terče než moje střela

metodou nejmenších čtverců najdeme přibližné řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}, \text{ které je } \hat{\mathbf{x}} = \left(\frac{k_1 + l_1}{2}, \frac{k_2 + l_2}{2} \right),$$

neboli $\hat{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{k} + \mathbf{l}}{2}$; je to přibližné řešení soustavy $\mathbf{x} = \mathbf{k}$ a $\mathbf{x} = \mathbf{l}$

Odhad polohy středu terče 2

vrátíme se k reálné situaci, kdy Kateřina má směrodatnou odchylku $0,2$ a já 2

střední hodnotu $\mu_{\mathbf{y}} = \mu_{\mathbf{z}}$ máme oba rovnou středu terče, tj. $\mathbf{x}$

v tom případě je hodnota vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{k}$ chybou ε měření středu terče pomocí Kateřiny: $\mathbf{x} = \mathbf{k} + \varepsilon$

přesnou hodnotu ε neznáme, jde o *náhodný proces*

známe nějaké číselné charakteristiky tohoto procesu

předpokládáme, že střední hodnota μ chyby ε je 0

směrodatnou odchylku chyby odhadneme na základě n střel $\mathbf{y}_i$

jako $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{y}_i - \mu\|^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{y}_i\|^2}{n}}$

Odhad polohy středu terče 3

veličina σ^2 se nazývá *rozptyl* nebo *variance* náhodné chyby ε

průměr $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{y}_i - \mu\|^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{y}_i\|^2}{n}$ je odhad rozptylu chyby ε

hodnotu směrodatné odchylky $\sigma_{\mathbf{y}}$ chyby, které se při střelbě dopouští Kateřina, jsme odhadli na 0,2, rozptyl její chyby je tedy $\sigma^2 = 0{,}04$

v rovnici $\mathbf{x} = \mathbf{k} + \varepsilon$ je tedy střední hodnota chyby rovná 0 a její směrodatná odchylka $\sigma_{\mathbf{y}} = 0{,}2$

vynásobíme-li tuto rovnici $\sigma_{\mathbf{y}}^{-1}$, dostaneme $\sigma_{\mathbf{y}}^{-1}\mathbf{x} = \sigma_{\mathbf{y}}^{-1}\mathbf{k} + \sigma_{\mathbf{y}}^{-1}\varepsilon$

v této rovnici je chyba $\sigma_{\mathbf{y}}^{-1}\varepsilon$ náhodná veličina se střední hodnotou 0 a směrodatnou odchylkou (a také rozptylem) rovnými 1

Odhad polohy středu terče 4

měření polohy středu terče pomocí mojí střelby vede na rovnici $\mathbf{x} = \mathbf{l} + \epsilon$

kde chyba ϵ je náhodná veličina se střední hodnotou 0 a směrodatnou odchylkou $\sigma_{\mathbf{z}} = 2$

v rovnici $\sigma_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{x} = \sigma_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{l} + \sigma_{\mathbf{z}}^{-1}\epsilon$

má chyba $\sigma_{\mathbf{z}}^{-1}\epsilon$ i nadále střední hodnotu 0 a rozptyl 1

v soustavě $\sigma_{\mathbf{y}}^{-1}\mathbf{x} = \sigma_{\mathbf{y}}^{-1}\mathbf{k}$, $\sigma_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{x} = \sigma_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{l}$ jsou obě rovnice rovnocenné z pohledu chyb, chyby v obou rovnicích mají stejnou střední hodnotu 0 a stejný rozptyl

přibližné řešení metodou nejmenších čtverců: $\hat{\mathbf{x}} = \dfrac{\sigma_{\mathbf{y}}^{-2}\mathbf{k} + \sigma_{\mathbf{z}}^{-2}\mathbf{l}}{\sigma_{\mathbf{y}}^{-2} + \sigma_{\mathbf{z}}^{-2}}$

Metoda nejmenších čtverců s váhami

máme-li obecnou soustavu lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s maticí A typu $m \times n$, kde jednotlivé složky b_i vektoru pravých stran $\mathbf{b}$ jsou výsledkem nějakého měření, pak jednotlivým rovnicím přisoudíme váhu závislou na spolehlivosti měření veličiny b_i

i-tá rovnice $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i + \varepsilon_i$
je zatížená chybou ε_i, o které předpokládáme, že má střední hodnotu rovnou 0 a směrodatnou dochylku σ_i

rovnice $\sigma_i^{-1}(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = \sigma_i^{-1}b_i + \sigma_i^{-1}\varepsilon_i$
je zatížená chybou se střední hodnotou 0 a rozptylem 1

hledáme tak přibližné řešení $\hat{\mathbf{x}}$ soustavy $WA\mathbf{x} = W\mathbf{b}$, kde W je diagonální matice s převrácenými hodnotami směrodatných odchylek $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1}$ na hlavní diagonále

příslušná soustava normálních rovnic je $A^TW^TWA\mathbf{x} = A^TW^TW\mathbf{b}$

Aritmetický průměr rekursivně

výsledky měření přicházejí postupně

označíme $\hat{\mathbf{x}}_{99}$ aritmetický průměr výsledků měření $b_1, b_2, \ldots, b_{99}$ jedné veličiny x (například krevního tlaku)

poté dostaneme další měření b_{100}

jak dostaneme jednoduše aritmetický průměr $\hat{\mathbf{x}}_{100}$ všech měření $b_1, \ldots, b_{99}, b_{100}$?

$$\hat{\mathbf{x}}_{100} = \frac{b_1 + \cdots + b_{100}}{100} = \frac{99}{100}\,\frac{b_1 + \cdots + b_{99}}{99} + \frac{1}{100}\,b_{100} = \frac{99}{100}\,\hat{\mathbf{x}}_{99} + \frac{1}{100}\,b_{100} = \hat{\mathbf{x}}_{99} + \frac{1}{100}\,(b_{100} - \hat{\mathbf{x}}_{99})$$

výraz v poslední závorce $b_{100} - \hat{\mathbf{x}}_{99}$ se nazývá *inovace*, koeficient $\frac{1}{100}$ je *inovační koeficient*

Rekursivní nejmenší čtverce obecně

máme přibližné řešení $\hat{\mathbf{x}}_s$ soustavy lineárních rovnic $A_s\mathbf{x} = \mathbf{b}_s$, tj. platí $A_s^TA_s\,\hat{\mathbf{x}}_s = A^T\mathbf{b}_s$

nově došlá informace je soustava lineárních rovnic $A_n\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$

najdeme přibližné řešení $\hat{\mathbf{x}}_n$ soustavy $\begin{pmatrix} A_s \\ A_n \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_s \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \mathbf{b}$

její matici označíme A, potom $A^T = (A_s^T|A_n^T)$

$$A^TA = (A_s^T|A_n^T)\begin{pmatrix} A_s \\ A_n \end{pmatrix} = A_s^TA_s + A_n^TA_n$$

$$A^T\mathbf{b} = (A_s^T|A_n^T)\begin{pmatrix} \mathbf{b}_s \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = A_s^T\mathbf{b}_s + A_n^T\mathbf{b}_n = A_s^TA_s\,\hat{\mathbf{x}}_s + A_n^T\mathbf{b}_n$$

Rekursivní nejmenší čtverce obecně - dokončení

z rovnosti $A^TA = A_s^TA_s + A_n^TA_n$ vypočteme
$A_s^TA_s = A^TA - A_n^TA_n$ a dosadíme do vzorce pro $\hat{\mathbf{x}}_n$

$$\hat{\mathbf{x}}_n = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = (A^TA)^{-1}\left((A^TA - A_n^TA_n)\hat{\mathbf{x}}_s + A_n^T\mathbf{b}_n\right) = \hat{\mathbf{x}}_s + (A^TA)^{-1}A_n^T(\mathbf{b}_n - A_n\hat{\mathbf{x}}_s)$$

výraz v závorce $\mathbf{b}_n - A_n\hat{\mathbf{x}}_s$ je *inovace* a matice $(A^TA)^{-1}A_n^T$ je *inovační matice*, také se jí říká *Kálmánova matice*

ověříme, že obecná formule pro rekursivní nejmenší čtverce dá v příkladu s aritmetickým průměrem na str. 7-138

Myšlenka Kálmánova filtru

Kálmánův filtr je jeden z nevíce používaných algoritmů od druhé poloviny 20. století

původně byl navržen pro řízení vesmírných letů a první významné použití bylo v programu Apollo pilotovaných letů na Měsíc

jde o odhad polohy pohybujícího se objektu

Kálmánův filtr používá dva typy rovnic

první typ je pro odhad polohy $\mathbf{x}_i$ v čase i na základě měření, tj. na základě přibližného řešení soustavy $A_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$

druhý typ je *stavová rovnice* $\mathbf{x}_{i+1} = F_i\mathbf{x}_i + \mathbf{c}_i$, která udává, jak se mění poloha objektu v důsledku dynamiky jeho pohybu

tato předpověď je pak korigována na základě nových měření pomocí soustavy $A_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{b}_{i+1}$

Kálmánův filtr pro navigaci v rovině 1

tato soustava je nová informace, kterou je použita k opravě původního odhadu $\hat{\mathbf{x}}_{i+1}$ pomocí metody rekursivních nejmenších čtverců

jednotlivé kroky výpočtů si ukážeme na příkladu navigace v rovině

- polohu vozidla v čase i udává vektor $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2})^T$
- její odhad označíme $\hat{\mathbf{x}}_{i|i}$, druhý index i říká, že byl odhad polohy v čase i získán na základě všech informací až po čas i včetně
- druhý krok je předpověď $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|i}$ v čase $i+1$ na základě všech měření/informací až po čas i včetně
- tu získáme z rovnice $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|i} = \hat{\mathbf{x}}_{i|i} + \mathbf{c}_i$, kde $\mathbf{c}_i$ je změřená rychlost vozidla v čase i

Kálmánův filtr pro navigaci v rovině 2

- nakonec použijeme nová měření polohy v čase $i+1$ daná soustavou rovnic $A_{i+1}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{i+1}$ k upřesnění odhadu $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|i}$ pomocí rekursivní metody nejmenších čtverců
- ta dává odhad $\hat{\mathbf{x}}_{i+1|i+1} = \hat{\mathbf{x}}_{i+1|i} + K_{i+1}(\mathbf{b}_{i+1} - A_{i+1}\hat{\mathbf{x}}_{i+1|i})$, kde K_{i+1} označuje inovační matici

Proč se navigace GPS chová v tunelu tak, jak se chová

Skalární součin - shrnutí

- **klíčové**: kolmost vektorů v prostoru se skalárním součinem
- **klíčové**: ortonormální a ortogonální posloupnost (množina) vektorů, ortonormální báze
- **základní**: standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a jeho geometrický význam v rovině a prostoru, standardní skalární součin v $\mathbb{C}^n$
- **základní**: obecný skalární součin (je definovaný pouze pro reálné nebo komplexní prostory)
- **základní**: norma definovaná skalárním součinem a její základní vlastnosti
- **základní**: Cauchyho-Schwarzova nerovnost
- **základní**: důsledky Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti: trojúhelníková nerovnost a kosinová věta
- **základní**: lineární nezávislost ortogonální posloupnosti (množiny) vektorů
- **základní**: Pythagorova věta

Skalární součin - shrnutí

- **základní**: souřadnice vektoru vzhledem k ortonormální bázi, Fourierovy koeficienty
- **základní**: ortogonální projekce na podprostor s ortonormální bází
- **základní**: Gramova-Schmidtova ortogonalizace a její důsledky
- **základní**: *QR*-rozklad matice, jejíž posloupnost sloupcových vektorů je lineárně nezávislá
- **základní**: ortogonální a unitární matice, různé ekvivalentní definice
- **základní**: ortogonální doplněk množiny a podprostoru a jeho základní vlastnosti
- **základní**: kolmost mezi základními prostory matice
- **základní**: Gramova matice a ortogonální projekce na podprostor bez ortonormální báze

Skalární součin - shrnutí

- **důležité**: hermitovská a hermitovsky sdružená matice, hermitovsky sdružená matice k součinu matic
- **důležité**: skalární součin definovaný maticí
- **důležité**: geometrický význam Fourierových koeficientů
- **důležité**: Frobeniova norma matic
- **důležité**: pro matice s ortonormální posloupností sloupcových vektorů je transponovaná (hermitovsky sdružená) matice inverzní zleva
- **důležité**: jednoznačnost *QR*-rozkladu regulární matice
- **důležité**: matice určující ortogonální projekci na přímku a na nadrovinu
- **důležité**: matice symetrie vzhledem k nadrovině, Householderovy reflektory a jejich ortogonalita (unitárnost)
- **důležité**: aproximace prvku v podprostoru metodou nejmenších čtverců

Skalární součin - shrnutí

- **důležité**: přibližné řešení soustavy lineárních rovnic metodou nejmenších čtverců
- **důležité**: soustava normálních rovnic k soustavě $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- **důležité**: pseudoinverze
- **důležité**: chyba aproximace prvku ve větším podprostoru je menší
- **důležité**: pseudoinverze pomocí *QR*-rozkladu
- **pro zajímavost**: reálný a komplexní Hilbertův prostor
- **pro zajímavost**: integrál jako skalární součin
- **pro zajímavost**: polarizační identity
- **pro zajímavost**: obecné normy
- **pro zajímavost**: ortonormální báze v prostoru matic a formát *jpeg*
- **pro zajímavost**: modifikovaná Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Skalární součin - shrnutí

- **pro zajímavost**: obecná Gramova-Schmidtova ortogonalizace a obecný *QR*-rozklad matice
- **pro zajímavost**: Gramova-Schmidtova ortogonalizace v prostorech funkcí a Legendreovy polynomy
- **pro zajímavost**: eliminace pomocí elementárních (Householderových) reflektorů
- **pro zajímavost**: lineární regrese
- **pro zajímavost**: magistr SCIO v akci
- **pro zajímavost**: polynomiální aproximace dat, kvadratická regrese, aproximace funkcí více proměnných
- **pro zajímavost**: navigace v rovině pomocí měření vzdáleností
- **pro zajímavost**: střední hodnota, směrodatná odchylka a rozptyl náhodné veličiny
- **pro zajímavost**: metoda nejmenších čtverců s váhami
- **pro zajímavost**: rekursivní nejmenší čtverce
- **pro zajímavost**: Kálmánův filtr

Kapitola 8

Lineární zobrazení

Lineární zobrazení - obsah

Matice a lineární zobrazení - obsah

Opakování 1

víme už, že každá matice $A = (\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)$ typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ určuje zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ předpisem

$$f_A(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$$

pro každé $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{T}^n$

připomeňme ještě, že

$$f_A(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \;\;,$$

tj. hodnota $f_A(\mathbf{x})$ se rovná lineární kombinaci posloupnosti sloupcových vektorů matice A s koeficienty $x_1, \ldots, x_n$

Opakování 2

viděli jsme také, že některá základní geometrická zobrazení v rovině nebo prostoru jsou určená maticemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Opakování 3

mnohé pojmy a tvrzení o maticích mají přirozené vysvětlení nebo význam pro zobrazení určená maticemi

- je-li A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$, obě nad $\mathbf{T}$, pak $f_{AB} = f_A f_B : \mathbf{T}^p \to \mathbf{T}^n$
- čtvercová matice A řádu n je regulární právě když je zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ vzájemně jednoznačné a v tom případě $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$
- pro každou matici A typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ platí $Ker\, A = \{\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n; f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}$
- také $Im\, A = \{f_A(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbf{T}^n\}$
- $rank(A) = \dim(Im\, A)$

Definice lineárního zobrazení

pozorování: je-li A matice typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$, pak pro zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ platí

- $f_A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f_A(\mathbf{x}) + f_A(\mathbf{y})$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{T}^n$
- $f_A(t\mathbf{x}) = t \cdot f_A(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ a každý skalár $t \in \mathbf{T}$

toto je naprosto základní definice: jsou-li $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ dva vektorové prostory nad stejným tělesem $\mathbf{T}$, pak zobrazení $f : U \to V$ nazýváme *lineární*, platí-li

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ pro každé dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$
- $f(t\mathbf{u}) = t \cdot f(\mathbf{u})$ pro každý prvek $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ a každý skalár $t \in \mathbf{T}$

zápis: $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$

pozorování říká, že zobrazení $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ určené maticí A typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$ je lineární

Příklady lineárních zobrazení 1

příklad: je-li $\mathbf{P}$ prostor všech polynomů s reálnými koeficienty, pak zobrazení $D : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ definované předpisem $D(p) = p'$ je lineární zobrazení

je-li $p(t) = p_0 + p_1 t + \cdots + p_n t^n$,
pak $D(p)(t) = p_1 + 2p_2 t + \cdots + np_n t^{n-1}$

příklad: je-li $\mathbf{U}$ prostor všech diferencovatelných reálných funkcí reálné proměnné a $\mathbf{V}$ prostor všech reálných funkcí reálné proměnné, pak zobrazení $D : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ definované předpisem $D(f) = f'$ pro každé $f \in \mathbf{U}$ je lineární

Příklady lineárních zobrazení 2

také integrování polynomů s reálnými koeicienty je lineární zobrazení

příklad: je-li $\mathbf{P}$ prostor polynomů s reálnými koeficienty, pak zobrazení $J : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ definované pro každé $p \in \mathbf{P}$ předpisem

$$J(p) = \int_0^t p$$

je lineární

je-li $p(t) = p_0 + p_1 t + \cdots + p_n t^n$,
pak $J(p)(t) = p_0 t + \frac{p_1}{2} t^2 + \frac{p_2}{3} t^3 + \cdots + \frac{p_n}{n+1} t^{n+1}$

všimněme si, že pro každý polynom $p \in \mathbf{P}$ platí $DJ(p) = p$; zobrazení (derivování) D je inverzní zleva ke zobrazení (integrování) J a J je inverzní zprava k D

Příklady lineárních zobrazení 3

příklady: • *nulové zobrazení* $O : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$, které každému $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ přiřadí nulový prvek $\mathbf{o}_V \in \mathbf{V}$, je lineární
• identické zobrazení id_U na vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ je lineární

další příklad lineárního zobrazení dostaneme pomocí souřadnic vektorů vzhledem k bázi

je-li $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ báze prostoru $\mathbf{U}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$ a
$[\mathbf{u}]_B = (a_1, \ldots, a_n)^T$, $[\mathbf{v}]_B = (b_1, \ldots, b_n)^T$, pak platí
$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n$ a
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_n + b_n)\mathbf{v}_n = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)^T$
a tedy $[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_B = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)^T = [\mathbf{u}]_B + [\mathbf{v}]_B$

podobně z $t\mathbf{u} = (ta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (ta_n)\mathbf{v}_n$ plyne $[t\mathbf{u}]_B = t[\mathbf{u}]_B$

tvrzení: je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ a B nějaká báze ve $\mathbf{V}$, pak zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{T}^n$ definované předpisem $f(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_B$ je lineární

Determinant jako multilineární zobrazení 1

na str. 6-33 jsme (s trochu jiným značením) ukázali, že jsou-li $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{T}^n$ libovolné n-složkové aritmetické vektory nad $\mathbf{T}$, pak pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{T}^n$ a skalár t platí

- $\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) =$
  $\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{u}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{v}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n)$
- $\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|t\mathbf{u}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n) = t\det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{u}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n)$

tyto dvě rovnosti ukazují, že zobrazení $f : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}$ definované předpisem

$$f(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_{j-1}|\mathbf{x}|\mathbf{a}_{j+1}|\cdots|\mathbf{a}_n)$$

je lineární

Determinant jako multilineární zobrazení 2

determinant jsem definovali jako zobrazení, které každé čtvercové matici A nad $\mathbf{T}$ přiřadí skalár z $\mathbf{T}$

pokud matici A řádu n zapíšeme posloupností jejích sloupcových vektorů $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, můžeme na determinant nahlížet jako na zobrazení o n proměnných (vektorech)

$$\mathrm{Det} : \underbrace{\mathbf{T}^n \times \mathbf{T}^n \times \cdots \times \mathbf{T}^n}_{n\times} \to \mathbf{T}$$

zvolíme-li libovolných $n-1$ ze sloupcových vektorů pevně a zbývající sloupec je proměnný, dostáváme lineární zobrazení z $\mathbf{T}^n \to \mathbf{T}$

proto o determinantu také někdy mluvíme jako o *multilineárním zobrazení*

Matice lineárního zobrazení - obsah

LZ zachovává nulový vektor a lineární kombinace

pro každé lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ platí

- $f(\mathbf{o}_U) = \mathbf{o}_V$, neboť $f(\mathbf{o}_U) = f(0\,\mathbf{o}_U) = 0f(\mathbf{o}_U) = \mathbf{o}_V$

dále pro každé vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{U}$ a každé skaláry $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{T}$ platí

- $f(t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k) = t_1 f(\mathbf{u}_1) + \cdots + t_k f(\mathbf{u}_k)$

tato vlastnost plyne ihned z definice lineárního zobrazení

z toho, že lineární zobrazení „zachovávají“ libovolné lineární kombinace, plyne následující důležité tvrzení

LZ je určené hodnotami na bázi

tvrzení: jsou-li $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, $\dim \mathbf{U} = n$, $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ libovolná báze v $\mathbf{U}$, a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ libovolné prvky ve $\mathbf{V}$, pak existuje právě jedno lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ takové, že $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$

důkaz: nejdříve dokážeme, že takové f existuje nejvýše jedno

každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci $\mathbf{x} = s_1\mathbf{u}_1 + \cdots + s_n\mathbf{u}_n$ prvků báze B

potom musí platit
$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(s_1\mathbf{u}_1 + \cdots + s_n\mathbf{u}_n) \\ &= s_1 f(\mathbf{u}_1) + \cdots + s_n f(\mathbf{u}_n) \\ &= s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_n\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

hodnota $f(\mathbf{x})$ lineárního zobrazení f v jakémkoliv bodě $\mathbf{x}$ je tak jednoznačně určena hodnotami $\mathbf{v}_i = f(\mathbf{u}_i)$ pro $i = 1, 2, \dots, n$

Důkaz linearity *f*

zbývá dokázat, že zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ definované předpisem

$$f(\mathbf{x}) = s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_n\mathbf{v}_n \quad \text{pokud} \quad [\mathbf{x}]_B = (s_1, \dots, s_n)^T$$

je lineární

je-li $[\mathbf{x}]_B = (s_1, \dots, s_n)^T$ a $[\mathbf{y}]_B = (t_1, \dots, t_n)^T$ pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$, pak $[\mathbf{x}+\mathbf{y}]_B = (s_1 + t_1, \dots, s_n + t_n)^T$, podle str. 8-10, a tedy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (s_1+t_1)\mathbf{v}_1 + (s_2+t_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (s_n+t_n)\mathbf{v}_n \\ &= s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 + \cdots + s_n\mathbf{v}_n + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n \\ &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

podobně z rovnosti $[t\mathbf{x}]_B = (ts_1, \dots, ts_n)^T$ plyne

$$f(t\mathbf{x}) = ts_1\mathbf{v}_1 + \cdots + ts_n\mathbf{v}_n = t(s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_n\mathbf{v}_n) = t\,f(\mathbf{x})$$

Lineární zobrazení jsou určená maticí 1

důležitý důsledek: každé lineární zobrazení $f : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ je určené nějakou jednoznačně určenou maticí A typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$

důkaz: vyjádříme libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{T}^n$ jako lineární kombinaci $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ prvků kanonické báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathbf{T}^n$

položíme $A = (f(\mathbf{e}_1)|f(\mathbf{e}_2)|\cdots|f(\mathbf{e}_n))$, tj. vektory $f(\mathbf{e}_i) \in \mathbf{T}^m$ zapíšeme do sloupců matice A

potom pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $f_A(\mathbf{e}_i) = A\,\mathbf{e}_i = f(\mathbf{e}_i)$

obě zobrazení f a f_A jsou lineární a shodují se na prvcích kanonické báze v $\mathbf{T}^n$, musí se proto rovnat podle tvrzení na str. 8-15

je-li $f = f_B$ pro nějakou matici $B = (\mathbf{b}_1|\cdots|\mathbf{b}_n)$, pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $\mathbf{b}_i = f_B(\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i) = f_A(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$, tj. $B = A$

Lineární zobrazení jsou určená maticí 2

definice: jsou-li $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ libovolné dva konečně dimenzionální prostory nad $\mathbf{T}$, $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ báze v $\mathbf{U}$ a C nějaká báze ve $\mathbf{V}$, pak matici

$$([f(\mathbf{u}_1)]_C|[f(\mathbf{u}_2)]_C|\cdots|[f(\mathbf{u}_n)]_C)$$

nazýváme *matice lineárního zobrazení* f vzhledem k bázím B a C
označení: $[f]^B_C$

tvrzení: jsou-li $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ konečně dimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, B báze v $\mathbf{U}$, C báze ve $\mathbf{V}$ a $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ platí

$$[f(\mathbf{x})]_C = [f]^B_C\,[\mathbf{x}]_B$$

Důkaz

důkaz: je-li $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, lze každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ vyjádřit jako

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{u}_1 + \cdots + s_n\mathbf{u}_n \quad \text{tj.} \quad (s_1, \ldots, s_n)^T = [\mathbf{x}]_B$$

protože $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení, platí

$$f(\mathbf{x}) = s_1\,f(\mathbf{u}_1) + \cdots + s_n\,f(\mathbf{u}_n)$$

což zapíšeme pomocí souřadnic vzhledem k bázi C ve $\mathbf{V}$ jako

$$[f(\mathbf{x})]_C = [s_1\,f(\mathbf{u}_1)+\cdots+s_n\,f(\mathbf{u}_n)]_C = s_1[f(\mathbf{u}_1)]_C+\cdots+s_n[f(\mathbf{u}_n)]_C$$

poslední výraz je lineární kombinace aritmetických vektorů $[f(\mathbf{u}_i)]_C$, kterou pomocí násobení matic zapíšeme jako

$$([f(\mathbf{u}_1)]_C|\cdots|[f(\mathbf{u}_n)]_C)(s_1, \ldots, s_n)^T = [f]^B_C\,[\mathbf{x}]_B$$

Poznámky k matici lineárního zobrazení 1

poznámka 1: matice $[f]^B_C$ umožňuje spočítat souřadnice $[f(\mathbf{x})]_C$ vektoru $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}$ vzhledem k bázi C prostoru $\mathbf{V}$, známe-li souřadnice $[\mathbf{x}]_B$ vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ vzhledem k bázi B prostoru $\mathbf{U}$

poznámka 2: matice $[f]^B_C$ je touto vlastností určena jednoznačně

pokud pro nějakou matici $M = (\mathbf{m}_1|\mathbf{m}_2|\cdots|\mathbf{m}_n)$ typu $(\dim \mathbf{V}) \times (\dim \mathbf{U})$ nad $\mathbf{T}$ platí $[f(\mathbf{x})]_C = M\,[\mathbf{x}]_B$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, platí $[f(\mathbf{u}_i)]_C = M\,[\mathbf{u}_i]_B$ pro každý prvek $\mathbf{u}_i$ báze B

protože $[\mathbf{u}_i]_B = \mathbf{e}_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, platí

$$[f(\mathbf{u}_i)]_C = M\,[\mathbf{u}_i]_B = M\,\mathbf{e}_i = \mathbf{m}_i$$

proto $M = [f]^B_C$

Poznámky k matici lineárního zobrazení 2

poznámka 3: je-li $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ lineární zobrazení určené maticí $A = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n)$ typu $m \times n$ nad $\mathbf{T}$, pak platí

$$A = [f_A]^{K_n}_{K_m}$$

kde K_n je kanonická báze v $\mathbf{T}^n$ a K_m je kanonická báze v $\mathbf{T}^m$

pro každý vektor $\mathbf{e}_i$ kanonické báze K_n platí

$$\mathbf{a}_i = A\,\mathbf{e}_i = f_A(\mathbf{e}_i) = [f_A(\mathbf{e}_i)]_{K_m}$$

to znamená, že pro každé $i = 1, \ldots, n$ se i-tý sloupec matice A rovná i-tému sloupci matice

$$([f_A(\mathbf{e}_1)]_{K_m}|[f_A(\mathbf{e}_2)]_{K_m}|\cdots|[f_A(\mathbf{e}_n)]_{K_m}) = [f_A]^{K_n}_{K_m}$$

což dokazuje rovnost $\quad A = [f_A]^{K_n}_{K_m}$

Matice geometrických zobrazení snadno a rychle 1

na základě definice matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$

$$[f]^B_C = ([f(\mathbf{u}_1)]_C|[f(\mathbf{u}_2)]_C|\cdots|[f(\mathbf{u}_n)]_C)$$

vzhledem k bázím B a C na str. 8-18 můžeme snadno napsat matice určující jednoduchá geometricky motivovaná lineární zobrazení v prostorech $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

stačí zvolit báze $B = C = K_2$, případně $B = C = K_3$

příklad: rotace f v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku o úhel φ v kladném směru

platí $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ a tedy

f je určené maticí $A = [f]^{K_2}_{K_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Matice geometrických zobrazení snadno a rychle 2

příklad: matice reflexe f vzhledem ke druhé souřadné ose v $\mathbb{R}^2$

platí $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a tedy f je určené maticí $A = [f]^{K_2}_{K_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

příklad: rotace v $\mathbb{R}^3$ o úhel φ v kladném směru kolem druhé souřadné osy

Matice geometrických zobrazení snadno a rychle 3

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 0 \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

f je určené maticí $A = [f]^{K_3}_{K_3} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$

příklad: matice ortogonální projekce f na rovinu určenou prvními dvěma souřadnými osami v $\mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

projekce f je určená maticí $A = [f]^{K_3}_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matice derivace

příklad: matice derivace D na prostoru $\mathbf{P}$ reálných polynomů stupně nejvýše 3

zvolíme báze $B = C = (1, x, x^2, x^3)$ a spočteme

$[D(1)]_B = [0]_B = (0, 0, 0, 0)^T$

$[D(x)]_B = [1]_B = (1, 0, 0, 0)^T$

$[D(x^2)]_B = [2x]_B = (0, 2, 0, 0)^T$

$[D(x^3)]_B = [3x^2]_B = (0, 0, 3, 0)^T$

a tedy

$$[D]^B_B = ([D(1)]_B | [D(x)]_B | [D(x^2)]_B | [D(x^3)]_B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice reflexe určené obecnou přímkou v rovině

příklad: najdeme matici reflexe f určené přímkou $\langle (1,3)^T \rangle$ v $\mathbb{R}^2$

víme, že $f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

zvolíme tedy $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ a $C = K_2$

potom $[f]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

za chvíli si ukážeme, jak z matice $[f]^B_{K_2}$ snadno a rychle dostat matici $[f]^{K_2}_{K_2}$, která určuje reflexi f

Matice identického zobrazení a matice přechodu

tvrzení: jsou-li $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ a C dvě báze vektorového prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ a id_U identické zobrazení na prostoru $\mathbf{U}$, pak matice $[id_U]^B_C$ se rovná matici přechodu od báze B k bázi C

důkaz: stačí použít definice; matice lineárního zobrazení id_U vzhledem k bázím B a C se podle definice na str. 8-18 rovná

$$([id_U(\mathbf{u}_1)]_C | [id_U(\mathbf{u}_2)]_C | \cdots | [id_U(\mathbf{u}_n)]_C) = ([\mathbf{u}_1]_C | [\mathbf{u}_2]_C | \cdots | [\mathbf{u}_n]_C)$$

což je podle definice na str. 5-84 matice přechodu od báze B k bázi C

můžeme také použít tvrzení na str. 8-18, odvodit rovnost

$$[\mathbf{x}]_C = [id_U(\mathbf{x})]_C = [id_U]^B_C\, [\mathbf{x}]_B$$

a ujasnit si, že matice přechodu od báze B k bázi C je určena touto rovností jednoznačně

Příklady matic přechodu

příklad 1: pro každou bázi B konečně dimenzionálního prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n nad $\mathbf{T}$ platí $[id_U]^B_B = I_n$, tj. matice přechodu od báze B k B je vždy identická matice

to je zřejmé, neboť je-li $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, pak $[\mathbf{u}_i]_B = \mathbf{e}_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ a tedy

$$[id_U]^B_B = ([\mathbf{u}_1]_B | [\mathbf{u}_2]_B | \cdots | [\mathbf{u}_n]_B) = (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \cdots | \mathbf{e}_n) = I_n$$

příklad 2: v aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^3$ se matice přechodu od báze $B = ((1,2,3)^T, (2,3,4)^T, (3,5,8)^T)$ ke kanonické bázi K_3 rovná

$$[id_{R^3}]^B_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

neboť prvky báze B jsou zadané jejich souřadnicemi vzhledem ke kanonické bázi K_3

Matice složeného zobrazení

skládání zobrazení určených maticemi jsme použili k motivaci definice součinu matic

následující tvrzení říká, že vztah mezi skládáním lineárních zobrazení mezi konečně generovanými prostory a násobením matic platí zcela obecně

tvrzení: jsou-li $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$ a $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení, pak platí

- $gf : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení

jsou-li navíc prostory $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ konečně dimenzionální a B báze v $\mathbf{U}$, C báze ve $\mathbf{V}$ a D báze ve $\mathbf{W}$, pak platí

- $[gf]^B_D = [g]^C_D \, [f]^B_C$

Důkaz

důkaz: k důkazu první části zvolíme dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$ a spočteme

$$gf(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = g(f(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = g(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})) = gf(\mathbf{x}) + gf\mathbf{y}$$

podobně pro každý skalár $t \in \mathbf{T}$ platí $gf(t\mathbf{x}) = g(t\, f(\mathbf{x})) = t\, gf(\mathbf{x})$

k důkazu druhé části ověříme, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ platí

$$[gf(\mathbf{x})]_D = [g]^C_D \, [f(\mathbf{x})]_C = [g]^C_D \left([f]^B_C \, [\mathbf{x}]_B \right) = \left([g]^C_D \, [f]^B_C \right) [\mathbf{x}]_B$$

dvojím použitím tvrzení na str. 8-18

podle poznámky 2 na str. 8-20 odtud plyne, že $[gf]^B_D = [g]^C_D \, [f]^B_C$

Matice inverzního zobrazení

tvrzení: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ vzájemně jednoznačné lineární zobrazení mezi vektorovými prostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$, pak

- $f^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ je také lineární zobrazení

jsou-li navíc $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ konečně dimenzionální prostory dimenze n, B báze v $\mathbf{U}$ a C báze ve $\mathbf{V}$, pak platí

- $[f^{-1}]^C_B = \left([f]^B_C \right)^{-1}$

důkaz: zvolíme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$; protože f je na celý prostor $\mathbf{V}$, existují $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$ takové, že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ a $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$

protože f je lineární, platí $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ a tedy $f^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} = f^{-1}(\mathbf{x}) + f^{-1}(\mathbf{y})$

podobně pro každý skalár $t \in \mathbf{T}$ platí $f(t\mathbf{u}) = t\, f(\mathbf{u}) = t\mathbf{x}$ a tedy $f^{-1}(t\mathbf{x}) = t\mathbf{u} = t\, f^{-1}(\mathbf{x})$

Dokončení důkazu

k důkazu druhé části využijeme druhou část tvrzení na str. 8-29

protože $f^{-1}f = id_U$, platí

$$I_n = [id_U]^B_B = [f^{-1}f]^B_B = [f^{-1}]^C_B \, [f]^B_C$$

protože je matice $[f]^B_C$ čtvercová, plyne odtud $[f^{-1}]^C_B = \left([f]^B_C \right)^{-1}$

poznámka: později v této kapitole si ukážeme, že stačí v druhé části předpokládat pouze, že $\dim \mathbf{U} = n$; odtud už plyne, že $\dim \mathbf{V} = n$ v případě, že lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je vzájemně jednoznačné

Příklad

příklad: v příkladu 2 na str. 8-28 jsme si ukázali, že matice přechodu $[id]^B_{K_3}$ od báze $B = ((1,2,3)^T, (2,3,4)^T, (3,5,8)^T)$ ke kanonické bázi K_3 v prostoru $\mathbb{R}^3$ se rovná

$$[id]^B_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

podle druhé části tvrzení na str. 8-31 se matice přechodu $[id]^{K_3}_B$ od kanonické báze K_3 k bázi B rovná

$$[id]^{K_3}_B = \left([id]^B_{K_3}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$$

Další příklad

příklad: na str. 8-26 jsme našli matici $[f]^B_{K_2}$ ortogonální reflexe f určené přímkou $\langle (1,3)^T \rangle$ v $\mathbb{R}^2$ vzhledem k bázím $B = ((1,3)^T, (3,-1)^T)$ a $C = K_2$:

$$[f]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

využijeme tvrzení o matici složeného zobrazení na str. 8-29 k nalezení matice $[f]^{K_2}_{K_2}$, která tuto reflexi určuje

platí $[f]^{K_2}_{K_2} = [f\ id]^{K_2}_{K_2} = [f]^B_{K_2}\,[id]^{K_2}_B$

použijeme tvrzení na str. 8-31:

$$[id]^{K_2}_B = \left([id]^B_{K_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

pak $[f]^{K_2}_{K_2} = -\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Připomenutí

v tvrzení na str. 7-87 jsme odvodili vzorec pro matici reflexe určené nadrovinou, která je ortogonálním doplňkem nějakého vektoru $\mathbf{w} \in \mathbf{U}$, kde $\mathbf{U}$ je reálný nebo komplexní aritmetický prostor se skalárním součinem

tento vzorec použijeme k jinému řešení příkladu z předchozí str. 8-34

tvrzení použijeme pro prostor $\mathbb{R}^2$ a zvolíme nějaký vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ takový, že $\{\mathbf{w}\}^\perp = \langle (1,3)^T \rangle$, například $\mathbf{w} = (-3,1)^T$

podle tvrzení na str. 7-87 je tato reflexe f určená maticí

$$[f]^{K_2}_{K_2} = I_2 - 2\frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{\|\mathbf{w}\|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{10}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

A další připomenutí

na str. 4-25 dole jsme geometricky odvodili, že reflexe f vzhledem k ose procházející vektorem $(\cos\alpha, -\sin\alpha)^T \in \mathbb{R}^2$ je určená maticí

$$[f]^{K_2}_{K_2} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix},$$

dostali jsme ji jako součin

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

jednotlivé matice v součinu můžeme interpretovat i jinak

vektor $(\cos\alpha, -\sin\alpha)^T$ doplníme do ortonormální báze $B = ((\cos\alpha, -\sin\alpha)^T, (\sin\alpha, \cos\alpha)^T)$ v rovině $\mathbb{R}^2$

Matice téhož *LZ* vzhledem k různým bázím

metodu výpočtu matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ vzhledem k nějaké bázi C, známe-li matici $[f]_B^B$ vzhledem k jiné bázi B a matici přechodu od jedné z těchto bází k druhé, budeme používat často

věta: je-li $\mathbf{U}$ konečně dimenzionální vektorový prostor nad $\mathbf{T}$, $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární zobrazení, B, C dvě báze v $\mathbf{U}$ a R matice přechodu od báze B k bázi C, pak platí

$$[f]_B^B = R^{-1} [f]_C^C R$$

důkaz: platí $f = id_U\, f\, id_U$ a podle tvrzení na str. 8-29

$$[f]_B^B = [id]_B^C\, [f]_C^C\, [id]_C^B$$

matice $[id]_C^B$ je matice přechodu od báze B k bázi C podle tvrzení na str. 8-27 a $[id]_B^C = ([id]_C^B)^{-1}$

Terminologická poznámka

v různých učebnicích je matice $[id]_C^B$ nazývána různě;

v některých se jí říká matice přechodu *od báze B k bázi C*, stejně jako ji nazýváme my

to je v těch případech, kdy se terminologie odvíjí od rovnosti $[\mathbf{x}]_C = [id]_C^B\, [\mathbf{x}]_B$

známe-li souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi B, pak jejich přenásobením maticí přechodu od báze B k bázi C dostaneme jeho souřadnice vzhledem k bázi C

v jiných učebnicích je ta samá matice $[id]_C^B$ nazývána matice přechodu *od báze C k bázi B*

v těchto učebnicích autoři kladou důraz na rovnost $[f]_B^B = R^{-1}\, [f]_C^C\, R = ([id]_C^B)^{-1}\, [f]_C^C\, [id]_C^B$

Slovníček morfismů

definice: jsou-li $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ vektorové prostory nad stejným tělesem $\mathbf{T}$ a $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak

- nazýváme f také *homomorfismus* prostorů $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$,
- je-li f prosté, nazýváme jej *monomorfismus*,
- je-li f na celý prostor $\mathbf{V}$, nazýváme f *epimorfismus*
- je-li f vzájemně jednoznačné, nazýváme je *isomorfismus*, v tom případě také říkáme, že prostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou *isomorfní*
- je-li $\mathbf{U} = \mathbf{V}$, pak f nazýváme *endomorfismus* prostoru $\mathbf{U}$, nebo také *lineární operátor* na $\mathbf{U}$
- je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ isomorfismus, nazýváme je také *automorfismus* prostoru $\mathbf{U}$
- je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{T}$, nazýváme je *lineární forma* na prostoru $\mathbf{U}$

Příklady morfismů

- rotace kolem počátku a symetrie (osové souměrnosti) vzhledem k přímkám procházejícím počátkem jsou automorfismy prostoru $\mathbb{R}^2$
- je-li $\mathbf{U}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$ a $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ nějaká báze, pak zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{T}^n$ definované předpisem $f(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_B$ je lineární podle tvrzení na str. 8-10; je to epimorfismus, protože každý aritmetický vektor $(b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbf{T}^n$ je vektorem souřadnic vzhledem k bázi B vektoru $\mathbf{x} = b_1\mathbf{u}_1 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n$; je to dokonce isomorfismus, neboť každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ je jednoznačně určený svými souřadnicemi vzhledem k jakékoliv bázi
- zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definované předpisem $f((x_1, x_2)^T) = (x_1, x_2, 0)^T$ je monomorfismus
- ortogonální projekce na rovinu procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$ je endomorfismus $\mathbb{R}^3$, který není ani mono- ani epimorfismus

Jádro a obraz lineárního zobrazení

definice: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak *jádro* f je množina

$$Ker\, f = \{\mathbf{x} \in \mathbf{U} : f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\} \subseteq U$$

obraz nebo také *obor hodnot* zobrazení f je množina

$$Im\, f = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{U}\} \subseteq V$$

tvrzení: platí, že $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je prosté lineární zobrazení (tj. monomorfismus) právě když $Ker\, f = \{\mathbf{o}\}$

důkaz $\Rightarrow$: je-li $\mathbf{x} \in Ker\, f$, pak platí $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o} = f(\mathbf{o})$ a protože je f prosté, plyne odtud $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ a tedy $Ker\, f = \{\mathbf{o}\}$

$\Leftarrow$: je-li naopak $Ker\, f = \{\mathbf{o}\}$ a $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ pro nějaké $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$, pak z linearity f plyne $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$, tj. $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in Ker\, f$, odkud plyne $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, což dokazuje, že f je prosté lineární zobrazení, neboli monomorfismus

Jádro a obraz lineárního zobrazení pomocí jeho matice

tvrzení: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, $\dim \mathbf{U} = n$, $\dim \mathbf{V} = m$, B báze v $\mathbf{U}$ a C báze ve $\mathbf{V}$, pak platí

- jádro $Ker\, f$ je podprostor $\mathbf{U}$ a platí
$$[Ker\, f]_B = Ker\left([f]^B_C\right)$$
- obor hodnot $Im\, f$ je podprostor $\mathbf{V}$ a platí
$$[Im\, f]_C = Im\left([f]^B_C\right)$$

důkaz první části: je-li $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Ker\, f$, pak $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$ a pro každé $r, s \in \mathbf{T}$ platí

$$f(r\mathbf{x} + s\mathbf{y}) = r\, f(\mathbf{x}) + s\, f(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$$

což dokazuje $r\mathbf{x} + s\mathbf{y} \in Ker\, f$

jádro $Ker\, f$ je tedy uzavřené na sčítání i násobení skalárem a protože je neprázdné ($\{\mathbf{o}\} \in Ker\, f$ vždy), je to podprostor $\mathbf{U}$

následující výpočet vychází z definic a tvrzení na str. 8-18

Dokončení důkazu

$$\begin{aligned}[Ker\, f]_B &= [\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}]_B = \{[\mathbf{x}]_B : f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\} \\ &= \{[\mathbf{x}]_B : [f(\mathbf{x})]_C = \mathbf{o}\} = \{[\mathbf{x}]_B : [f]^B_C\, [\mathbf{x}]_B = \mathbf{o}\} \\ &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{T}^n : [f]^B_C\, \mathbf{u} = \mathbf{o}\} = Ker\left([f]^B_C\right)\end{aligned}$$

důkaz druhé části je podobný, napřed dokážeme, že $Im\, f$ je podprostor $\mathbf{V}$; protože $\mathbf{o} = f(\mathbf{o}) \in Im\, f$, je $Im\, f$ neprázdná množina

pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Im\, f$ existují $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$ takové, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ a $f(\mathbf{y}) = \mathbf{v}$; pak pro libovolné skaláry $s, t \in \mathbf{T}$ platí

$$r\mathbf{u} + s\mathbf{v} = r\, f(\mathbf{x}) + s\, f(\mathbf{y}) = f(r\mathbf{x} + s\mathbf{y})$$

což dokazuje $r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \in Im\, f$ a odtud plyne uzavřenost $Im\, f$ na sčítání a násobení skalárem

podobně jako v první části spočteme

$$\begin{aligned}[Im\, f]_C &= [\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{U}\}]_C = \{[f(\mathbf{x})]_C : \mathbf{x} \in \mathbf{U}\} \\ &= \{[f]^B_C\, [\mathbf{x}]_B : \mathbf{x} \in \mathbf{U}\} = \{[f]^B_C\, \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{T}^n\} = Im\left([f]^B_C\right)\end{aligned}$$

Charakterizace monomorfismů

tvrzení: má-li prostor $\mathbf{U}$ konečnou dimenzi, pak pro lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je ekvivalentní

1. zobrazení f je prosté (monomorfismus)
2. pro každou LN posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ v $\mathbf{U}$ je posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k))$ LN ve $\mathbf{V}$
3. existuje báze $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ v $\mathbf{U}$ taková, že posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n))$ je LN ve $\mathbf{V}$

důkaz 1 $\Rightarrow$ 2: nechť f je monomorfismus a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je LN posloupnost v $\mathbf{U}$; platí-li pro nějaké skaláry $s_1, \dots, s_k$

$$s_1\, f(\mathbf{u}_1) + s_2\, f(\mathbf{u}_2) + \cdots + s_k\, f(\mathbf{u}_k) = \mathbf{o}$$

pak v důsledku linearity f platí rovněž

$$f(s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \cdots + s_k\mathbf{u}_k) = \mathbf{o} = f(\mathbf{o})$$

protože f je monomorfismus, platí $s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \cdots + s_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, a protože posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je LN, dostáváme konečně $s_1 = s_2 = \cdots = s_k = 0$

Dokončení důkazu charakterizace monomorfismů

2 $\Rightarrow$ 3 plyne z toho, že každá báze je *LN* posloupnost

3 $\Rightarrow$ 1: podle tvrzení na str. 8-41 stačí dokázat, že $Ker\, f = \{\mathbf{o}\}$

nechť $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze v $\mathbf{U}$ taková, že posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ je *LN* ve $\mathbf{V}$

je-li $\mathbf{x} \in Ker\, f$, vyjádříme jej jako *LK* této báze, tj. ve tvaru

$$\mathbf{x} = s_1\, \mathbf{u}_1 + s_2\, \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n\, \mathbf{u}_n$$

potom $\mathbf{o} = f(\mathbf{x}) = f(s_1\, \mathbf{u}_1 + \cdots + s_n\, \mathbf{u}_n) = s_1\, f(\mathbf{u}_1) + \cdots + s_n\, f(\mathbf{u}_n)$

protože je posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ lineárně nezávislá, plyne odtud $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$ a tedy $\mathbf{x} = \mathbf{o}$

protože vždy $\mathbf{o} \in Ker\, f$, je tím rovnost $Ker\, f = \{\mathbf{o}\}$ dokázána

Charakterizace epimorfismů

tvrzení: má-li $\mathbf{U}$ konečnou dimenzi, pak pro lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je ekvivalentní

1. f je epimorfismus
2. pro každou bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v $\mathbf{U}$ platí $\langle f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\rangle = \mathbf{V}$
3. existuje báze $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v $\mathbf{U}$ pro kterou $\langle f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\rangle = \mathbf{V}$

důkaz 1 $\Rightarrow$ 2: pro každé $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ existuje $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ takové, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, protože f je epimorfismus (tj. zobrazení na celý prostor $\mathbf{V}$)

jelikož $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze v $\mathbf{U}$, můžeme $\mathbf{x}$ vyjádřit jako lineární kombinaci $\mathbf{x} = s_1\mathbf{u}_1 + \cdots + s_n\mathbf{u}_n$

f je *LZ*, proto $f(\mathbf{x}) = f(s_1\mathbf{u}_1 + \cdots + s_n\mathbf{u}_n) = s_1\, f(\mathbf{u}_1) + \cdots + s_n\, f(\mathbf{u}_n)$

proto $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \langle f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\rangle$ a tedy $\mathbf{V} \subseteq \langle f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\rangle$

Dokončení důkazu charakterizace epimorfismů

2 $\Rightarrow$ 3 je zřejmé, protože v $\mathbf{U}$ existuje nějaká báze

3 $\Rightarrow$ 1: potřebujeme dokázat, že zobrazení f je na celý prostor $\mathbf{V}$

zvolíme $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$; protože předpokládáme $\langle f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\rangle = \mathbf{V}$, existují skaláry $s_1, \ldots, s_n \in \mathbf{T}$ takové, že

$$s_1\, f(\mathbf{u}_1) + s_2\, f(\mathbf{u}_2) + \cdots + s_n\, f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{y}$$

položíme $\mathbf{x} = s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n\mathbf{u}_n$, potom

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n\mathbf{u}_n) \\ &= s_1\, f(\mathbf{u}_1) + s_2\, f(\mathbf{u}_2) + \cdots + s_n\, f(\mathbf{u}_n) = \mathbf{y} \end{aligned}$$

což dokazuje, že lineární zobrazení f je na celý prostor $\mathbf{V}$

Charakterizace isomorfismů

tvrzení: má-li $\mathbf{U}$ konečnou dimenzi, pak pro lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je ekvivalentní

1. f je isomorfismus
2. pro každou bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v $\mathbf{U}$ je $(f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ báze ve $\mathbf{V}$
3. existuje báze $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v $\mathbf{U}$ taková, že $(f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ je báze ve $\mathbf{V}$

důkaz 1 $\Rightarrow$ 2: buď $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ libovolná báze v $\mathbf{U}$

protože f je isomorfismus, je současně mono- i epimorfismus

podle tvrzení na str. 8-44 je posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ lineárně nezávislá

podle tvrzení na str. 8-46 posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ generuje $\mathbf{V}$, proto je $(f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ báze ve $\mathbf{V}$

Dokončení důkazu charakterizace isomorfismů

2 $\Rightarrow$ 3 je zřejmé

3 $\Rightarrow$ 1: předpokládáme, že existuje báze $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v $\mathbf{U}$ taková, že $(f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ je báze ve $\mathbf{V}$

speciálně $\langle f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\rangle = \mathbf{V}$ a proto podle tvrzení na str. 8-46 je f epimorfismus

stejně tak $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ je LN a tedy f je monomorfismus podle tvrzení na str. 8-44

Isomorfismy - obsah

Příklad isomorfismu

příklad: označíme $\mathbf{P}$ vektorový prostor všech polynomů s reálnými koeficienty s obvyklými operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem

dále označíme $\mathbf{Q}$ podprostor prostoru $\mathbb{R}^\infty$ všech posloupností reálných čísel tvořený posloupnostmi, které obsahují pouze konečně mnoho nenulových prvků

definujeme zobrazení $f : P \to Q$ následovně:

je-li $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, pak položíme

$$f(p) = (a_0\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\,,\ a_n, 0\,,\ \ldots)$$

snadno ověříme, zobrazení f je prosté a na celou množinu Q

podobně snadno ověříme, že také platí $f(p+q) = f(p) + f(q)$ pro libovolné dva polynomy $p, q \in \mathbf{P}$ a $f(c\,p) = c\,f(p)$ pro každé reálné číslo c a každý polynom p

$f : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ je tedy isomorfismus vektorových prostorů

O isomorfismech

jsou-li $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ dva isomorfní prostory, tj. existuje-li isomorfismus $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$, můžeme prostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ považovat za „stejné“

jinak řečeno, operace v isomorfních prostorech jsou „stejné“

máme-li sečíst dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$, pak je můžeme buď sečíst v prostoru $\mathbf{U}$ a dostaneme $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

nebo můžeme vzít jejich obrazy $f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \in \mathbf{V}$, sečíst je ve $\mathbf{V}$ a dostaneme prvek $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \in \mathbf{V}$

protože $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$, dostaneme prvek $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \in \mathbf{V}$ také jako obraz součtu $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ zobrazením f

isomorfismus f tak „překládá“ operaci sčítání prvků v $\mathbf{U}$ do operace sčítání prvků ve $\mathbf{V}$

podobně „překládá“ i operaci násobení prvků skalárem a řadu dalších vlastností z jednoho prostoru do isomorfního prostoru

Co všechno se isomorfismem přenáší

tvrzení: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ isomorfismus vektorových prostorů, pak

1. posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prvků $\mathbf{U}$ je *LN* právě když posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ je *LN* ve $\mathbf{V}$
2. pro množinu $P \subseteq \mathbf{U}$ a prvek $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ platí $\mathbf{u} \in \langle P \rangle$ právě když $f(\mathbf{u}) \in \langle f(P) \rangle$
3. pro každou množinu $P \subseteq \mathbf{U}$ platí $f(\langle P \rangle) = \langle f(P) \rangle$
4. množina $P \subseteq \mathbf{U}$ generuje prostor $\mathbf{U}$ práve když množina $f(P) = \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in P\}$ generuje $\mathbf{V}$
5. posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze v $\mathbf{U}$ právě když je posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ báze ve $\mathbf{V}$
6. množina $P \subseteq \mathbf{U}$ je podprostor $\mathbf{U}$ právě když je množina $f(P)$ podprostor $\mathbf{V}$
7. je-li $\mathbf{P}$ podprostor $\mathbf{U}$ pak zúžení f na podprostor $\mathbf{P}$ je isomorfismus mezi $\mathbf{P}$ a $f(\mathbf{P})$

První část důkazů

1. každý isomorfismus je také monomorfismus, proto je posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ lineárně nezávislá pro každou *LN* posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ podle bodu 2. tvrzení na str. 8-44; opačná implikace plyne z toho, že inverzní zobrazení $f^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ je také isomorfismus
2. je-li $\mathbf{u} \in \langle P \rangle$, pak $\mathbf{u} = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k$ pro nějaké vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in P$ a nějaké skaláry $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{T}$

   potom $f(\mathbf{u}) = f(t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k) = t_1 f(\mathbf{u}_1) + t_2 f(\mathbf{u}_2) + \cdots + t_k f(\mathbf{u}_k) \in \langle f(P) \rangle$
3. je-li $\mathbf{x} \in f(\langle P \rangle)$, pak $\mathbf{x} = f(\mathbf{u})$ pro nějaké $\mathbf{u} \in P$ a podle 2. je $\mathbf{x} = f(\mathbf{u}) \in \langle f(P) \rangle$; to dokazuje $f(\langle P \rangle) \subseteq \langle f(P) \rangle$

   $f^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ je také isomorfismus a z právě dokázané inkluze použité na množinu $f(P) \subseteq \mathbf{V}$ plyne

   $f^{-1}\langle f(P) \rangle \subseteq \langle f^{-1} f(P) \rangle = \langle P \rangle$ a tedy také $\langle f(P) \rangle \subseteq f(\langle P \rangle)$

Zbylé důkazy

4. pokud P generuje $\mathbf{U}$, platí $\langle P \rangle = \mathbf{U}$; protože f je také epimorfismus, platí $f(\mathbf{U}) = \mathbf{V}$; podle 3. pak $\langle f(P) \rangle = f(\langle P \rangle) = f(\mathbf{U}) = \mathbf{V}$ a tedy $f(P)$ generuje $\mathbf{V}$

   opačná implikace opět plyne z toho, že $f^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ je isomorfismus
5. plyne ihned z 1. a 4.
6. P je podprostor $\mathbf{U}$ právě když $\langle P \rangle = P$

   podle 3. pak platí $\langle f(P) \rangle = f(\langle P \rangle) = f(P)$ a tedy $f(P)$ je podprostor $\mathbf{V}$
7. podle bodu 6. víme, že $f(\mathbf{P})$ je podprostor $\mathbf{V}$

   zúžení prostého zobrazení na podmnožinu je opět prosté

   f zúžené na $\mathbf{P}$ je zobrazení na celý prostor $f(\mathbf{P})$,

   zobrazení $f : \mathbf{P} \to f(\mathbf{P})$ je tedy vzájemně jednoznačné

   nakonec si uvědomíme, že zúžení lineárního zobrazení na podprostor je opět lineární

Isomorfismy mezi prostory stejné dimenze

tvrzení: pro dva konečně generované prostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ nad stejným tělesem $\mathbf{T}$ jsou následující podmínky ekvivalentní

- $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou isomorfní, tj. existuje isomorfismus $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$
- $\dim \mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$

důkaz $\Rightarrow$: je-li $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ báze v $\mathbf{U}$, pak podle tvrzení na str. 8-48 je $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ báze ve $\mathbf{V}$

proto $\dim \mathbf{U} = \dim \mathbf{V}$

$\Leftarrow$: platí-li naopak $\dim \mathbf{U} = \dim \mathbf{V} = n$, existují báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v $\mathbf{U}$ a báze $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ve $\mathbf{V}$

podle tvrzení na str. 8-15 existuje (právě jedno) lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ takové, že $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$

potom platí, že $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n)) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je báze ve $\mathbf{V}$ a tedy f je isomorfismus podle tvrzení na str. 8-48

Důsledky

důsledek: každý vektorový prostor $\mathbf{U}$ dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ je isomorfní s aritmetickým vektorovým prostorem $\mathbf{T}^n$

důkaz: oba mají dimenzi n, to podle tvrzení na str. 8-56 stačí k tomu, aby byly isomorfní

konkrétní isomorfismus z $\mathbf{U}$ do $\mathbf{T}^n$ najdeme tak, že zvolíme libovolnou bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v prostoru $\mathbf{U}$ a podle druhého příkladu na str. 8-40 je zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{T}^n$ definované předpisem $f(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_B$ isomorfismus

věta o dimenzi jádra a obrazu pro lineární zobrazení: je-li $\mathbf{U}$ konečně generovaný vektorový prostor nad $\mathbf{T}$, $\mathbf{V}$ libovolný vektorový prostor nad $\mathbf{T}$, a $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak platí

$$\dim(Ker\, f) + \dim(Im\, f) = \dim \mathbf{U}$$

Důkaz věty o dimenzi jádra a obrazu

důkaz: zvolíme nějakou bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v $\mathbf{U}$

libovolný prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ vyjádříme jako lineární kombinaci prvků B

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_n\mathbf{u}_n$$

z linearity zobrazení f pak plyne

$$f(\mathbf{x}) = t_1 f(\mathbf{u}_1) + t_2 f(\mathbf{u}_2) + \cdots + t_n f(\mathbf{u}_n) \in \langle f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n)\rangle$$

to dokazuje, že prostor $Im\, f$ je konečně generovaný

zvolíme v něm nějakou bázi $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$

podle tvrzení na str. 8-42 platí

$$[Ker\, f]_B = Ker\, [f]^B_C, \quad [Im\, f]_C = Im\, [f]^B_C$$

potom $\dim(Ker\, [f]^B_C) = \dim[Ker\, f]_B = \dim(Ker\, f)$

a $\dim(Im\, [f]^B_C) = \dim[Im\, f]_C = \dim(Im\, f)$ (neboť $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_C$ je iso)

z věty o dimenzi jádra a obrazu pro matice pak plyne

$$\dim(Ker\, f) + \dim(Im\, f) = \dim(Ker\, [f]^B_C) + \dim(Im\, [f]^B_C) = n$$

Sčítání a skalární násobky lineárních zobrazení

tvrzení: jsou-li $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ vektorové prostory nad $\mathbf{T}$, $f, g : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ dvě lineární zobrazení, a $c \in \mathbf{T}$, pak platí

- zobrazení $(f + g) : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ definované pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ jako
  $$(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$$
  je lineární
- zobrazení $(c\, f) : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ definované pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ jako
  $$(c\, f)(\mathbf{x}) = c\, f(\mathbf{x})$$
  je lineární

důkaz první části: pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$ je

$$(f + g)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y})$$
$$= (f + g)(\mathbf{x}) + (f + g)(\mathbf{y})$$

podobně pro každý skalár $r \in \mathbf{T}$ a každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}$ platí

$$(c\, f)(r\,\mathbf{x}) = c\, f(r\,\mathbf{x}) = cr\, f(r\,\mathbf{x}) = r\,(c\, f)(\mathbf{x})$$

druhá část se dokáže analogicky

Prostor lineárních zobrazení

tvrzení: jsou-li $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ vektorové prostory nad stejným tělesem $\mathbf{T}$, pak množina všech lineárních zobrazení z $\mathbf{U}$ do $\mathbf{V}$ s právě definovanými operacemi sčítání a skalárního násobku tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$

důkaz: spočívá v mechanickém ověření axiomů VP

označení: $Hom(\mathbf{U}, \mathbf{V})$

tvrzení: jsou-li $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ konečně dimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, $\dim \mathbf{U} = n$ a $\dim \mathbf{V} = m$, pak prostor $Hom(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ lineárních zobrazení z $\mathbf{U}$ do $\mathbf{V}$ je isomorfní s prostorem $\mathbf{T}^{m\times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$

důkaz: zvolíme bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v prostoru $\mathbf{U}$ a bázi $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$ v prostoru $\mathbf{V}$

První pokračování důkazu

definujeme zobrazení $H : Hom(\mathbf{U},\mathbf{V}) \to \mathbf{T}^{m\times n}$ předpisem

$$H(f) = [f]^B_C$$

pro každé lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$

dokážeme, že H je lineární zobrazení

jsou-li $f, g \in Hom(\mathbf{U},\mathbf{V})$ lineární zobrazení z $\mathbf{U}$ do $\mathbf{V}$, potřebujeme dokázat, že $H(f+g) = H(f) + H(g)$ a $H(r\,f) = r\,H(f)$ pro každý skalár $r \in \mathbf{T}$

pro každé $j = 1,\dots,n$ porovnáme j-té sloupce v maticích $H(f+g)$ a $H(f) + H(g)$

podle definice matice lineárního zobrazení na str. 8-18 je j-tý sloupec matice $H(f+g)$ rovný

$$[(f+g)(\mathbf{u}_j)]_C = [f(\mathbf{u}_j) + g(\mathbf{u}_j)]_C = [f(\mathbf{u}_j)]_C + [g(\mathbf{u}_j)]_C$$

což je j-tý sloupec v součtu matic $H(f) + H(g)$ a tedy $H(f+g) = H(f) + H(g)$

Druhé pokračování důkazu

v druhé rovnosti jsme použili fakt, že zobrazení $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_C$ je lineární zobrazení z $\mathbf{V}$ do $\mathbf{T}^m$ podle tvrzení na str. 8-10

podobně pro každé $j = 1,\dots,n$ porovnáme j-té sloupce matic $H(r\,f)$ a $r\,H(f)$:

$$[(r\,f)(\mathbf{u}_j)]_C = [r\,f(\mathbf{u}_j)]_C = r\,[f(\mathbf{u}_j)]_C$$

což dokazuje $H(r\,f) = r\,H(f)$

zobrazení $H : Hom(\mathbf{U},\mathbf{V}) \to \mathbf{T}^{m\times n}$ je tedy lineární a zbývá dokázat, že je prosté a na celý prostor matic $\mathbf{T}^{m\times n}$

platí-li pro nějaké $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$, že $H(f) = [f]^B_C = O_{m\times n}$, plyne odtud $[f(\mathbf{u}_j)]_C = \mathbf{o}$ a tedy $f(\mathbf{u}_j) = \mathbf{o}$ pro každý prvek $\mathbf{u}_j$ báze B v $\mathbf{U}$

z linearity f pak plyne $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ a tedy že f se rovná nulovému zobrazení z $\mathbf{U}$ do $\mathbf{V}$, které je nulovým prvkem prostoru $Hom(\mathbf{U},\mathbf{V})$

Dokončení důkazu

tím jsme dokázali, že $Ker\,H = \{O\}$, neboli že H je prosté lineární zobrazení (monomorfismus)

nakonec dokážeme, že H zobrazuje $Hom(\mathbf{U},\mathbf{V})$ na celý prostor matic $\mathbf{T}^{m\times n}$

zvolíme nějakou matici $A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n)$ typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$

pro každé $j = 1,\dots,n$ definujeme vektor $\mathbf{w}_j = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{v}_m \in \mathbf{V}$

z definice vektorů $\mathbf{w}_j$ plyne $[\mathbf{w}_j]_C = \mathbf{a}_j$ pro každé $j = 1,\dots,n$

z tvrzení na str. 8-15 plyne existence lineárního zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ takového, že $f(\mathbf{u}_j) = \mathbf{w}_j$ pro každé $j = 1,\dots,n$

j-tý sloupec matice $H(f)$ se pak rovná $[f(\mathbf{u}_j)]_C = [\mathbf{w}_j]_C = \mathbf{a}_j$

to dokazuje $H(f) = A$ a zobrazení H je tedy na celý prostor matic $\mathbf{T}^{m\times n}$, tj. je epimorfismus

Duální prostor - obsah

Definice duálního prostoru

levá strana jakékoliv lineární rovnice n proměnných s koeficienty z tělesa $\mathbf{T}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

definuje lineární zobrazení $g : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}$ předpisem

$$g(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

a toto lineární zobrazení je prvkem prostoru $Hom(\mathbf{T}^n, \mathbf{T})$ všech lineárních forem na $\mathbf{T}^n$

kvůli dalšímu pochopení vlastností množiny všech řešení soustavy lineárních rovnic se budeme více zabývat tímto prostorem

definice: je-li $\mathbf{U}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, pak vektorový prostor $Hom(\mathbf{U}, \mathbf{T})$ všech lineárních forem na $\mathbf{U}$ nazýváme *duální prostor* k prostoru $\mathbf{U}$;

označení: $\mathbf{U}^d$ (také se vyskytuje označení $\mathbf{U}'$ nebo $\mathbf{U}^*$ nebo $\tilde{\mathbf{U}}$)

Dimenze duálního prostoru

z tvrzení na str. 8-60 víme, že duální prostor $\mathbf{U}^d$ ke konečně dimenzionálnímu prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n je isomorfní s prostorem $\mathbf{T}^{1\times n}$ a má tedy podle tvrzení na str. 8-56 stejnou dimenzi jako prostor $\mathbf{T}^{1\times n}$, tj. dimenzi n

tvrzení: pro každý konečně dimenzionální vektorový prostor $\mathbf{U}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ platí

$$\dim \mathbf{U}^d = \dim \mathbf{U}$$

konkrétní isomorfismus mezi $\mathbf{U}^d = Hom(\mathbf{U}, \mathbf{T})$ a prostorem řádkových vektorů $\mathbf{T}^{1\times n}$ dostaneme volnou bází v prostorech $\mathbf{U}$ a $\mathbf{T}$

v prostoru $\mathbf{U}$ zvolíme nějakou bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ a v prostoru $\mathbf{T}$ zvolíme vždy kanonickou bázi $C = (1)$

isomorfismus mezi $\mathbf{U}$ a $\mathbf{T}^{1\times n}$ určený touto volbou bází je

$$f \mapsto [f]^B_{(1)} = (f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$$

Souřadnice lineární formy

v případě lineárních forem $f : \mathbf{U} \to \mathbf{T}$ budeme vždy volit bázi $C = (1)$ v prostoru $\mathbf{T}$

matici $[f]^B_{(1)}$ budeme proto označovat pouze $[f]^B$

protože je matice $[f]^B$ řádkový vektor, bývá někdy nazývána také *souřadnice formy* f vzhledem k bázi B

my se budeme raději držet názvu *matice lineární formy* f vzhledem k bázi B (a $C = (1)$ si domyslíme)

z tvrzení na str. 8-18 dostáváme rovnost

$$f(\mathbf{x}) = [f]^B[\mathbf{x}]_B$$

Obecný tvar lineárních forem na aritmetických prostorech

tvrzení: každou lineární formu f na aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$ lze vyjádřit ve tvaru

$$f(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$

důkaz: stačí použít poslední formulku z předchozí strany na kanonickou bázi K v $\mathbf{T}^n$ a libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{T}^n$

označíme $[f]^K = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a víme, že $[\mathbf{x}]_K = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

potom $f(\mathbf{x}) = [f]^K[\mathbf{x}]_K = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$

Soustava lineárních rovnic jako posloupnost lineárních forem

při zkoumání vlastností množiny všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ nad $\mathbf{T}$ s maticí

$$A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \quad \text{typu} \quad m \times n$$

jsme dosud dávali přednost sloupcovému pohledu

řešení rovnice jsme nahlíželi jako hledání neznámých koeficientů lineární kombinace sloupců matice A, pro které platí

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$$

každá rovnice této soustavy určuje lineární formu

$$f_i(\mathbf{x}) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

na aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$

vektor $\mathbf{x}$ je řešením této soustavy právě když platí $f_i(\mathbf{x}) = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, m$, tj. právě když

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} Ker\, f_i$$

Dimenze jádra lineární formy

tvrzení: je-li $\mathbf{U}$ prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ a $f : \mathbf{U} \to \mathbf{T}$ lineární forma, pak platí

$$\dim(Ker\, f) \geq n - 1$$

přičemž rovnost nastává právě když $f \neq O$

důkaz: stačí použít větu o dimenzi jádra a obrazu:

$$\dim(Ker\, f) + \dim(Im\, f) = n$$

přičemž dimenze $Im\, f \leq \mathbf{T}$ je buď 0 nebo 1 v závislosti na tom, je-li $f = O$ nebo $f \neq O$

v případě soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ budeme zkoumat posloupnost podprostorů

$\mathbf{W}_1 = Ker\, f_1, \mathbf{W}_2 = Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2, \mathbf{W}_3 = Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2 \cap Ker\, f_3, \ldots,$
$\mathbf{W}_m = Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2 \cap \cdots \cap Ker\, f_m$

Dimenze průniku podprostoru s nadrovinou

každý z podprostorů $\mathbf{W}_{i+1}$ je průnikem podprostoru $\mathbf{W}_i$ s jádrem $Ker\, f_{i+1}$ formy f_{i+1}

tvrzení: Je-li $\mathbf{U}$ vektorový prostor dimenze n nad $\mathbf{T}$, $\mathbf{W} \leq \mathbf{U}$ a g lineární forma na $\mathbf{U}$, pak

$$\dim \mathbf{W} - 1 \leq \dim(\mathbf{W} \cap (Ker\, g)) \leq \dim \mathbf{W}$$

přičemž platí $\dim(\mathbf{W} \cap (Ker\, g)) = \dim \mathbf{W}$ právě když $\mathbf{W} \subseteq Ker\, g$

důkaz: tentokrát použijeme větu o dimenzi součtu a průniku podprostorů, ta říká

$$\dim(\mathbf{W} + (Ker\, g)) + \dim(\mathbf{W} \cap (Ker\, g)) = \dim \mathbf{W} + \dim(Ker\, g)$$

což přepíšeme jako

$$\dim(\mathbf{W} \cap (Ker\, g)) - \dim \mathbf{W} = \dim(Ker\, g) - \dim(\mathbf{W} + (Ker\, g))$$

Dokončení důkazu

dále platí $\quad n - 1 \leq \dim(Ker\, g) \leq \dim(\mathbf{W} + (Ker\, g)) \leq n$

což znamená $\quad -1 \leq \dim(Ker\, g) - \dim(\mathbf{W} + (Ker\, g)) \leq 0$

a tedy $\quad -1 \leq \dim(\mathbf{W} \cap (Ker\, g)) - \dim \mathbf{W} \leq 0$

neboli $\quad \dim \mathbf{W} - 1 \leq \dim(\mathbf{W} \cap (Ker\, g)) \leq \dim \mathbf{W}$

z definice součtu podprostorů plyne $\; Ker\, g \leq \mathbf{W} + (Ker\, g)$

odtud plyne, že rovnost $\; \dim(Ker\, g) - \dim(\mathbf{W} + (Ker\, g)) = 0$

platí právě když $\; Ker\, g = \mathbf{W} + (Ker\, g)$, což opět podle

definice součtu podprostorů platí právě když $\; \mathbf{W} \subseteq Ker\, g$

poslední tvrzení říká, že pokud pronikneme podprostor $\mathbf{W}$ jádrem $Ker\, g$ nějaké lineární formy g, bude dimenze průniku menší než dimenze podprostoru $\mathbf{W}$ nejvýše o 1

Lineární závislost mezi lineárními formami

věta: pokud $\mathbf{U}$ je vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ a $f_1, f_2, \ldots, f_k, g$ jsou lineární formy na $\mathbf{U}$, pak je ekvivaletní

1. $g \in \langle f_1, f_2, \ldots, f_k \rangle$ v duálním prostoru $\mathbf{U}^d = Hom(\mathbf{U}, \mathbf{T})$
2. $Ker\, g \supseteq (Ker\, f_1) \cap (Ker\, f_2) \cap \cdots \cap (Ker\, f_k)$

důkaz $1 \Rightarrow 2$: předpoklad $g \in \langle f_1, f_2, \ldots, f_k \rangle$ znamená existenci vyjádření $g = t_1 f_1 + t_2 + f_2 + \cdots + t_k f_k$ se skaláry $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbf{T}$

je-li $\mathbf{x} \in (Ker\, f_1) \cap (Ker\, f_2) \cap \cdots \cap (Ker\, f_k)$, pak $f_i(\mathbf{x}) = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$

potom
$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= (t_1 f_1 + t_2 + f_2 + \cdots + t_k f_k)(\mathbf{x}) \\ &= t_1 f_1(\mathbf{x}) + t_2 f_2(\mathbf{x}) + \cdots + t_n f_n(\mathbf{x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

což dokazuje $\mathbf{x} \in Ker\, g$

Opačná implikace

$2 \Rightarrow 1$: v prostoru $\mathbf{U}$ zvolíme nějakou bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ a vytvoříme matici C typu $k \times n$ tak, že do jejích řádků napíšeme postupně řádkové vektory (matice) $[f_i]^B$ lineárních forem $f_1, \ldots, f_k$ vzhledem k bázi B

matici C rozšíříme do matice D typu $(k+1) \times n$ tak, že k ní přidáme jako poslední řádek matici $[g]^B$ formy g

označíme $\mathbf{W} = (Ker\, f_1) \cap (Ker\, f_2) \cap \cdots \cap (Ker\, f_k)$

dokážeme rovnost $Ker\, C = [\mathbf{W}]_B$

zvolíme $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)^T \in \mathbf{T}^n$ a

označíme $\mathbf{x} = t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + t_n \mathbf{u}_n \in \mathbf{U}$

platí $[\mathbf{x}]_B = \mathbf{t}$

Pokračování důkazu opačné implikace

platí $\mathbf{t} \in Ker\, C$ právě když $C\,\mathbf{t} = \mathbf{o}$, což platí právě když $[f_i]^B\,\mathbf{t} = 0$ pro každé i a to je právě když $[f_i]^B\,[\mathbf{x}]_B = 0$

poslední rovnost platí podle str. 8-67 dole právě když $f_i(\mathbf{x}) = 0$ pro každé i, což je ekvivalentní tomu, že $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$ a to platí právě když $\mathbf{t} = [\mathbf{x}]_B \in [\mathbf{W}]_B$

zcela stejně lze dokázat, že $Ker\, D = [\mathbf{W} \cap (Ker\, g)]_B$

podle 2. je $Ker\, g \supseteq (Ker\, f_1) \cap (Ker\, f_2) \cap \cdots \cap (Ker\, f_k) = \mathbf{W}$ a tedy $\mathbf{W} \cap (Ker\, g) = \mathbf{W}$

to znamená $Ker\, C = [\mathbf{W}]_B = [\mathbf{W} \cap (Ker\, g)]_B = Ker\, D$

Dokončení důkazu opačné implikace

podle věty o dimenzi jádra a obrazu pak platí
$$\dim(Im\, C) = n - \dim(Ker\, C) = n - \dim(Ker\, D) = \dim(Im\, D)$$

podle definice hodnosti matice a věty o tom, že hodnost matice se rovná hodnosti matice transponované na str. 5-66, je dále
$$\dim(Im\, C^T) = \dim(Im\, C) = \dim(Im\, D) = \dim(Im\, D^T)$$

to znamená, že poslední řádek matice D, tj. $[g]^B$ je lineární kombinací řádků matice C, neboli
$$[g]^B \in \langle [f_1]^B, [f_2]^B, \ldots, [f_k]^B \rangle$$

protože zobrazení $f \mapsto [f]^B$ je isomorfismus vektorových prostorů podle tvrzení na str. 8-60 platí také
$$g \in \langle f_1, f_2, \ldots, f_k \rangle$$

podle bodu 2. tvrzení na str. 8-53

Geometrické vysvětlení rovnosti $r(A) = r(A^T)$, část 1

vrátíme se ještě jednou k homogenní soustavě $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ nad $\mathbf{T}$ s maticí soustavy $A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n)$ typu $m \times n$

spočítáme dvěma způsoby $\dim(Ker\, A)$

podle věty o dimenzi jádra a obrazu platí
$\dim(Ker\, A) = n - \dim(Im\, A)$

dimenze $\dim(Im\, A)$ sloupcového prostoru se rovná počtu bázových sloupců matice A, každý z nich „odebírá" z $Ker\, A$ jednu dimenzi

připomeňme si, že $\mathbf{a}_i$ je bázový sloupec právě když neleží v lineárním obalu $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{i-1} \rangle$ předchozích sloupců

spočítáme ještě $\dim(Ker\, A)$ pomocí řádkových vektorů matice A

Geometrické vysvětlení rovnosti $r(A) = r(A^T)$, část 2

i-tý řádek A určuje formu $f_i(\mathbf{x}) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$

víme také, že $Ker\, A = \bigcap_{i=1}^{m} Ker\, f_i$

na str. 8-70 jsme zavedli označení
$\mathbf{W}_1 = Ker\, f_1, \mathbf{W}_2 = Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2, \mathbf{W}_3 = Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2 \cap Ker\, f_3, \ldots,$
$\mathbf{W}_m = Ker\, f_1 \cap Ker\, f_2 \cap \cdots \cap Ker\, f_m$

platí tedy $\mathbf{T}^n = \mathbf{W}_0 \supseteq \mathbf{W}_1 \supseteq \mathbf{W}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{W}_m = Ker\, A$ a proto i

$$n \geq \dim \mathbf{W}_1 \geq \dim \mathbf{W}_2 \geq \cdots \geq \dim \mathbf{W}_k = \dim(Ker\, A)$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, m$ je $\mathbf{W}_i = \mathbf{W}_{i-1} \cap (Ker\, f_i)$

podle tvrzení na str. 8-71 platí $\dim \mathbf{W}_i \geq \dim \mathbf{W}_{i-1} - 1$,
přičemž rovnost nastává právě když $\mathbf{W}_{i-1} \not\subseteq Ker\, f_i$

Geometrické vysvětlení rovnosti $r(A) = r(A^T)$, část 3

dimenze $\mathbf{W}_i$ tak klesá o 1 oproti dimenzi $\mathbf{W}_{i-1}$ právě když

$$(Ker\, f_1) \cap (Ker\, f_2) \cap \cdots \cap (Ker\, f_{i-1}) = \mathbf{W}_{i-1} \not\subseteq Ker\, f_i$$

podle věty na str. 8-73 to nastává právě když

$$f_i \notin \langle f_1, f_2, \ldots, f_{i-1} \rangle$$

protože $[f_i]^K = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) = \tilde{\mathbf{a}}_i^T$ (K je kanonická báze v $\mathbf{T}^n$)
a díky isomorfismu $f \mapsto [f]^K$ mezi $(\mathbf{T}^n)^d$ a $\mathbf{T}^n$, to nastává právě když pro řádkové vektory matice A platí

$$\tilde{\mathbf{a}}_i^T \notin \langle \tilde{\mathbf{a}}_1^T, \tilde{\mathbf{a}}_2^T, \ldots, \tilde{\mathbf{a}}_{i-1}^T \rangle$$

jinak řečeno, dimenzi $Ker\, A$ snižují o 1 právě bázové sloupce transponované matice $A^T = (\tilde{\mathbf{a}}_1|\tilde{\mathbf{a}}_2|\cdots|\tilde{\mathbf{a}}_m)$

odtud plyne, že $\dim(Ker\, A) = n - \dim(Im\, A^T)$

platí proto $\dim(Im\, A^T) = \dim(Im\, A)$

Lineární formy na $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem

v tvrzení na str. 8-68 jsme ukázali, že každou lineární formu f na aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^n$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \text{ pro } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

označíme-li $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$, můžeme ji vyjádřit pomocí standardního skalárního součinu na $\mathbb{R}^n$ jako

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$$

lineární forma f má geometrický význam:
je to násobek orientované vzdálenosti od nadroviny $\mathbf{a}^\perp$

Lineární formy na prostorech s obecným skalárním součinem

velmi důležitá věta: je-li $\mathbf{U}$ vektorový prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$, pak pro každou lineární formu f na $\mathbf{U}$ existuje jednoznačně určený vektor $\mathbf{a} \in \mathbf{U}$ takový, že

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a} \,|\mathbf{x}\rangle$$

důkaz existence vektoru $\mathbf{a}$: v prostoru $\mathbf{U}$ zvolíme nějakou ortonormální bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$

potom $[f]^B = (f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$

položíme $\mathbf{a} = \overline{f(\mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 + \overline{f(\mathbf{u}_2)}\mathbf{u}_2 + \cdots + \overline{f(\mathbf{u}_n)}\mathbf{u}_n \in \mathbf{U}$

platí $[\mathbf{a}]_B = (\overline{f(\mathbf{u}_1)}, \overline{f(\mathbf{u}_2)}, \ldots, \overline{f(\mathbf{u}_n)})^T = ([f]^B)^*$

použitím rovnosti na str. 8-67 dole dostáváme

$$f(\mathbf{x}) = [f]^B[\mathbf{x}]_B = ([\mathbf{a}]_B)^* \,[\mathbf{x}]_B = \langle \mathbf{a} \,|\mathbf{x}\rangle$$

poslední rovnost plyne z tvrzení na str. 7-37

Důkaz jednoznačnosti

důkaz jednoznačnosti vektoru $\mathbf{a}$: platí-li pro dva vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{U}$

$$\langle \mathbf{a} \,|\mathbf{x}\rangle = f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{b} \,|\mathbf{x}\rangle$$

pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$

pak také $\langle \mathbf{a} - \mathbf{b} \,|\mathbf{x}\rangle = 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$

volbou $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ pak dostaneme $0 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b} \,|\mathbf{a} - \mathbf{b}\rangle = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$

což dokazuje $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

Ortogonální a unitární zobrazení - obsah

- *Ortogonální a unitární zobrazení*
  Definice ortogonálních a unitárních zobrazení
  Matice ortogonálních a unitárních zobrazení

Definice ortogonálního zobrazení

v tvrzení na str. 7-68 jsme ukázali, že komplexní matice Q typu $m \times n$ má ortonormální posloupnost sloupcových vektorů vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{C}^n$ právě když $Q^*Q = I_n$

tvrzení na str. 7-69 pak ukazuje, že zobrazení $f_Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ má následující vlastnosti

- $\|f_Q(\mathbf{x})\| = \|Q\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$
- $f_Q(\mathbf{x})^* f_Q(\mathbf{y}) = (Q\,\mathbf{x})^* \,(Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^*\mathbf{y}$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$

definice: jsou-li $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ vektorové prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$), pak lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ nazýváme *ortogonální* (nebo *unitární*), pokud platí

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$$

pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$

Základní vlastnosti 1

pozorování: každé ortogonální (nebo unitární) zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je prosté (tj. monomorfismus)

je-li $\mathbf{x} \in Ker\, f$, platí $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, a protože je f ortogonální (unitární), dostáváme $0 = \|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ a tedy $\mathbf{x} = \mathbf{o}$

proto $Ker\, f = \{\mathbf{o}\}$, což podle tvrzení na str. 7-41 znamená, že f je prosté zobrazení

tvrzení: jsou-li $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ konečně generované vektorové prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$) a $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak jsou následující podmínky ekvivalentní

1. f je ortogonální (nebo unitární)
2. $\langle f(\mathbf{x}) \,|\, f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$
3. f zobrazuje každou ortonormální posloupnost v $\mathbf{U}$ na ortonormální posloupnost ve $\mathbf{V}$

Základní vlastnosti 2

4. f zobrazuje každou ON bázi v $\mathbf{U}$ na ON posloupnost ve $\mathbf{V}$
5. existuje ON báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ v $\mathbf{U}$ taková, že $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ je ON posloupnost ve $\mathbf{V}$

důkaz: $1. \Rightarrow 2.$ dokážeme pomocí polarizačních identit stejně jako jsme při důkazu tvrzení na str. 7-71 ukázali, že z podmínky 3 plyne podmínka 2

$2. \Rightarrow 3:$ je-li $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ ortonormální posloupnost v $\mathbf{U}$, platí $\langle \mathbf{u}_i \,|\, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$

z 2. pak plyne $\langle f(\mathbf{u}_i) \,|\, f(\mathbf{u}_j) \rangle = \langle \mathbf{u}_i \,|\, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, což dokazuje, že posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ je také ortonormální (ve $\mathbf{V}$)

Základní vlastnosti 3

$3. \Rightarrow 1.:$ je-li $\mathbf{x}$ nenulový prvek $\mathbf{U}$, pak jednoprvková posloupnost

$$\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \text{ je ortonormální v } \mathbf{U}$$

z 3. plyne, že $\left\| f\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \right\| = \frac{\|f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1$, tj. $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$

protože také $\|f(\mathbf{o})\| = 0 = \|\mathbf{o}\|$, je zobrazení f ortogonální

$3. \Rightarrow 4.$ a $4. \Rightarrow 5.$ je zřejmé v případě, že $\mathbf{U}$ má konečnou dimenzi

$5. \Rightarrow 1.$ libovolný prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ vyjádříme ve tvaru

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$$

podle tvrzení na str. 7-37 je $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i a_i$

z linearity f plyne $f(\mathbf{x}) = a_1 f(\mathbf{u}_1) + a_2 f(\mathbf{u}_2) + \cdots + a_n f(\mathbf{u}_n)$

protože $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ je ON, plyne z téhož tvrzení $\|f(\mathbf{x})\|^2 = \langle f(\mathbf{x}) \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i a_i$ a tedy $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$

Matice ortogonálních (unitárních) zobrazení

tvrzení: jsou-li $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ dva konečně generované prostory se skalárních součinem nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$), $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ ortonormální báze v $\mathbf{U}$, $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$ ON báze ve $\mathbf{V}$ a $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak je ekvivalentní

1. f je ortogonální (nebo unitární)
2. posloupnost sloupcových vektorů matice $[f]^B_C$ je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{R}^m$ (nebo v $\mathbb{C}^m$)

důkaz: připomeňme, že $[f]^B_C = ([f(\mathbf{u}_1)]_C | [f(\mathbf{u}_2)]_C | \cdots | [f(\mathbf{u}_n)]_C)$

$1. \Rightarrow 2.:$ protože je f ortogonální, je podle podmínky 4. na str. 8-86 posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ ortonormální, tj.

$\langle f(\mathbf{u}_i) \,|\, f(\mathbf{u}_j) \rangle = \delta_{ij}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Dokončení důkazu

báze C je ON báze ve $\mathbf{V}$, platí podle tvrzení na str. 7-37

$$\delta_{ij} = \langle f(\mathbf{u}_i) \,|\, f(\mathbf{u}_j) \rangle = [f(\mathbf{u}_i)]_C^* [f(\mathbf{u}_j)]_C,$$

a tedy posloupnost sloupcových vektorů matice $[f]_C^B$ je ON vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{C}^n$ (v $\mathbb{R}^n$)

2. $\Rightarrow$ 1.: je-li posloupnost sloupcových vektorů matice $[f]_C^B$ ON vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu, platí

$$[f(\mathbf{u}_i)]_C^* [f(\mathbf{u}_j)]_C = \delta_{ij} \text{ pro všechna } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

protože báze C je ON, platí opět podle tvrzení na str. 7-37

$$\langle f(\mathbf{u}_i) \,|\, \mathbf{u}_i \rangle = [f(\mathbf{u}_i)]_C^* [f(\mathbf{u}_j)]_C = \delta_{ij} \text{ pro všechna } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

posloupnost $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$ je tedy ON a podle podmínky 5. na str. 8-86 je f ortogonální zobrazení

Příklady ortogonálních zobrazení v $\mathbb{R}^2$

příklad: otočení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ okolo počátku o úhel α má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$[f]_K^K = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

kanonická báze je ON a matice $[f]_K^K$ je ortogonální, což podle tvrzení na str. 8-88 znamená, že f je ortogonální zobrazení

příklad: osová symetrie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určená přímkou procházející počátkem a vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, který má normu $\|\mathbf{u}\| = 1$

vektor $\mathbf{u}$ doplníme vektorem $\mathbf{v} = (u_2, -u_1)^T$ do ortonormální báze $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ v $\mathbb{R}^2$; vzhledem k bázi B má g matici

$$[g]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

B je ON báze a matice $[g]_B^B$ je ortogonální, proto je g ortogonální

později ukážeme, že žádná jiná ortogonální zobrazení v $\mathbb{R}^2$ nejsou

Příklady ortogonálních zobrazení v $\mathbb{R}^3$

příklad: je-li $\mathbf{u}_1$ jednotkový vektor v $\mathbb{R}^3$, doplníme jej do ON báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$

reflexe $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ určená rovinou $\mathbf{u}_1^\perp$ (procházející počátkem) má vzhledem k bázi B matici

$$[g]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

opět je B ortonormální báze a matice $[g]_B^B$ je ortogonální, reflese g je tedy ortogonální zobrazení

Konec 8. kapitoly

příklad: najdeme matici rotace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kolem osy procházející jednotkovým vektorem $\mathbf{u}$

vektor $\mathbf{u}_1$ opět doplníme do ON báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ v $\mathbb{R}^3$ matice rotace f vzhledem k bázi B je potom

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

opět je f ortogonální zobrazení, protože matice $[f]_B^B$ je ortogonální a B je ON báze

později ukážeme, že každé ortogonální zobrazení v $\mathbb{R}^3$ je buď rotace kolem osy nebo reflexe a nebo složení rotace s reflexí

Kapitola 9

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastní čísla a vlastní vektory - obsah

Lineární dynamické systémy - obsah

Úročení

příklad: mám na rok půjčku od banky ve výši 100000 Kč, každý měsíc mi nabíhá úrok ve výši 1%, kolik bance zaplatím po roce?

řešení: po prvním měsíci budu dlužit

$$100\,000 + 1\,000 = 101\,000 = (1,01) \cdot 100\,000$$

po druhém měsíci to bude $1,01 \cdot (101\,000) = 1,01^2 \cdot 100\,000$

po roce bude dluh $1,01^{12} \cdot 100\,000 = 1,1268 \cdot 100\,000$

obecně: z půjčky ve výši x_0 Kč je o měsíc později dluh $x_1 = 1,01 \cdot x_0$,

po dvou měsících to je $x_2 = 1,01 \cdot x_1 = 1,01^2 \cdot x_0$

po k měsících je výše dluhu $x_k = 1,01 \cdot x_{k-1} = 1,01^k \cdot x_0$

Fibonacciho posloupnost

Fibonacciho posloupnost ze str. 4-46 je definována *rekurentně*

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \quad \text{a} \quad a_{k+1} = a_{k-1} + a_k \quad \text{pro každé} \quad k > 0$$

ukázali jsme si, že hodnotu k-tého členu posloupnosti můžeme spočítat pomocí umocňování matic, neboť platí

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k + a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix}$$

označíme-li matici C, pak

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{a tedy} \quad \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = C^k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

kde $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ je počáteční stav posloupnosti

volbou různých začátků a_0, a_1 dostáváme různé posloupnosti definované stejným *rekurentním vztahem* $a_{k+1} = a_{k-1} + a_k$

Příklad ze str.4-47

systém má tři možné stavy

- 1 - funguje
- 2 - nefunguje
- 3 - je v opravě

na obrázku jsou pravděpodobnosti jak se změní stav během jednoho časového úseku

na začátku je ve stavu 1, tj. funguje

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 & 1 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \text{ je } \textit{přechodová matice}$$

$\mathbf{p}_k = (p_{k1}, p_{k2}, p_{k3})^T$, p_{ki} je pravděpodobnost, že systém je v čase k ve stavu i, $\quad \mathbf{p}_0 = (1, 0, 0)^T$

$$\mathbf{p}_k = A\,\mathbf{p}_{k-1} = A^2\,\mathbf{p}_{k-2} = \cdots = A^k\,\mathbf{p}_0$$

Vývoj nezaměstnanosti

pracovní úřad sleduje, kolik lidí v produktivním věku v oblasti s vysokou nezaměstnaností je

- 1 - zaměstnaných
- 2 - krátkodobě (tj. méně než 6 měsíců) nezaměstnaných
- 3 - dlouhodobě (tj. aspoň 6 měsíců) nezaměstnaných

z dlouhodobých statistik vyplývá, že během měsíce si 90% zaměstnaných práci uchová a 10% o práci přijde

z krátkodobě nezaměstnaných si během měsíce 30% práci najde, 40% zůstane mezi krátkodobě nezaměstnanými a 30% přejde mezi dlouhodobě nezaměstnané

z dlouhodobě neazměstnaných si během měsíce 20% práci najde a zbylých 80% zůstane mezi (dlouhodobě) nezaměstnanými

Vývoj nezaměstnanosti - dokončení

pravděpodobnosti zapíšeme do matice $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$

počáteční rozložení nezaměstnanosti zapíšeme jako vektor

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ p_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,05 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

pro rozložení nezaměstnanosti $\mathbf{p}_k$ po k měsících platí

$$\mathbf{p}_k = A \cdot \mathbf{p}_{k-1} = A^2 \cdot \mathbf{p}_{k-2} = \cdots = A^k \cdot \mathbf{p}_0$$

Diskrétní lineární dynamické systémy

všechny uvedené úlohy jsou podobného typu

máme dánu nějakou čtvercovou matici A řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$

je-li dán *počáteční vektor* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{T}^n$, pak nás zajímá, jak se chová posloupnost vektorů $\mathbf{x}_k \in \mathbf{T}^n$, kde

$$\mathbf{x}_k = A\,\mathbf{x}_{k-1} = A^k\,\mathbf{x}_0 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

matici A spolu s počátečním vektorem $\mathbf{x}_0$ budeme nazývat *diskrétní lineární dynamický systém*

také každý lineární operátor (endomorfismus) $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na vektorovém prostoru nad tělesem $\mathbf{T}$ spolu s počátečním vektorem $\mathbf{x}_0$ určuje posloupnost

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) = f^k(\mathbf{x}_0)$$

a také definují diskrétní lineární dynamický systém

Rozpad jader radioaktivního materiálu

jádra atomů radioaktivního materiálu se časem rozpadají

míra radioaktivity se měří tzv. *rozpadovou konstantou* $k > 0$; ta udává pravděpodobnost, s jakou se dané jádro rozpadne během jedné sekundy

počet radioaktivních jader v čase t si označíme $f(t)$

počet jader, které se rozpadnou během krátkého časového intervalu $(t, t+\epsilon)$ se přibližně rovná $k \cdot f(t) \cdot \epsilon$

toto číslo je tím přesnější, čím menší je délka intervalu ϵ

za krátký interval se počet radioaktivních jader změní na

$$f(t+\epsilon) \approx f(t) - k \cdot f(t) \cdot \epsilon$$

neboli
$$\frac{f(t+\epsilon) - f(t)}{\epsilon} \approx -k \cdot f(t)$$

vezmeme-li limitu pro $\epsilon \to 0$, dostáváme rovnici

$$f'(t) = -k \cdot f(t)$$

Chemické reakce

máme tři různé chemikálie v koncentracích $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$

chemické reakce se obvykle popisují soustavou rovnic, které vyjadřují rychlost změny koncentrace každé chemikálie jako lineární kombinaci koncentrací všech zúčastněných chemikálií

$$x_i'(t) = a_{i1}x_1(t) + a_{i2}x_2(t) + a_{i3}x_3(t), \quad \text{pro } i = 1, 2, 3$$

průběh reakce v čase pak můžeme popsat pomocí soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ a $\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t))^T$

soustavu lze zapsat ve tvaru $\qquad \mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

například reakci tří chemikálií $A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{1} C$ můžeme zapsat jako

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

počáteční koncentrace jsou například $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^T$

definice: je-li A reálná čtvercová matice řádu n a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ je daný vektor, pak soustava rovnic

$$\mathbf{x}'(t) = A \cdot \mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{b}$$

se nazývá *soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstatními koeficienty* a počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}$

také bývá stručněji nazývána *spojitý lineární dynamický systém*

Zkoumání diskrétních lineárních dynamických systémů

při zkoumání diskrétních lineárních dynamických systémů zadaných maticí A (nebo operátorem f) a počátečním vektorem $\mathbf{x}_0$

se snažíme pochopit, jak se vyvíjí posloupnost prvků $\{\mathbf{x}_k\} = A^k\,\mathbf{x}_0$ v závislosti na počáteční podmínce $\mathbf{x}_0$

metody, které se naučíme při zkoumání diskrétních systémů nakonec použijeme i pro řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic

řád 1: v případě matic $A = (a)$ řádu 1 má prvek x_k jednoduché vyjádření

$$x_k = a^k \cdot x_0$$

je-li počáteční podmínka $x_0 = 0$, pak $x_k = 0$ pro každé k a každé $a \in \mathbf{T}$

Řád 1 v reálném případě

vlastnosti posloupnosti $\{x_k\}$ závisí také na tělese $\mathbf{T}$

v případě tělesa reálných nebo komplexních čísel to je jednoduché

pokud je $x_0 \neq 0$, pak pro reálnou posloupnost $\{x_k\} = \{a^k \cdot x_0\}$ platí

1. je-li $|a| < 1$, pak $\{a^k \cdot x_0\}$ konverguje k 0
2. je-li $|a| > 1$, pak posloupnost $\{a^k \cdot x_0\}$ roste v absolutní hodnotě nade všechny meze
3. je-li $a = 1$, pak je posloupnost $\{a^k \cdot x_0 = x_0\}$ konstantní
4. je-li $a = -1$, pak posloupnost $\{a^k \cdot x_0 = x_0\}$ nabývá střídavě hodnoty x_0 a $-x_0$, osciluje mezi těmito dvěma hodnotami s periodou 2

Řád 1 v komplexním případě

také v komplexním případě platí

$$x_k = a^k \cdot x_0$$

kvůli větší složitosti násobení komplexních čísel jsou možnosti pro chování posloupnosti $\{a^k \cdot x_0\}$ o něco bohatší

opět předpokládáme, že $x_0 \neq 0$

číslo a vyjádříme v polárním tvaru $a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, potom

$$|x_k| = |a|^k \cdot |x_0|$$

1. je-li $|a| < 1$, pak posloupnost $\{a^k \cdot x_0\}$ konverguje k 0
2. je-li $|a| > 1$, posloupnost absolutních hodnot $|x_k| = |a|^k |x_0|$ roste monotónně nade všechny meze

Řád 1 v komplexním případě – dokončení

je-li $|a| = 1$, pak $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$ pro nějaký úhel α

v tom případě platí $x_k = a^k \cdot x_0 = (\cos(k\alpha) + i\sin(k\alpha))x_0$
a všechna čísla x_k leží na kružnici o poloměru $|x_0|$

průběh posloupnosti závisí na hodnotě argumentu α čísla a

3. je-li $\alpha = l \cdot 2\pi$ pro nějaké celé číslo l, je $a = 1$ a všechny prvky posloupnosti $\{x_k\}$ se rovnají x_0
4. je-li $n\alpha$ pro nějaké kladné celé n rovné $2l\pi$ pro nějaké celé číslo l, zvolíme nejmenší takové n a posloupnost $x_k = (\cos(k\alpha) + i\sin(k\alpha))x_0$ nabývá periodicky n různých hodnot
5. pokud se žádný kladný násobek α nerovná $2l\pi$ pro žádné celé l, tj. pokud α není racionálním násobkem π, pak jsou prvky posloupnosti $\{x_k\}$ navzájem různé

Vlastní čísla a vlastní vektory - obsah

- *Vlastní čísla a vlastní vektory*
  Grafické znázornění
  Vlastní čísla, vlastní vektory
  Výpočet vlastních čísel a vektorů
  Charakteristický polynom
  Algebraická násobnost vlastních čísel

Případ $n = 2$

lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si můžeme představit pomocí nákresu v rovině

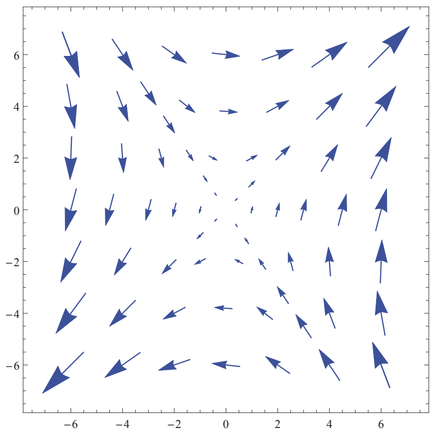
co znamená linearita f

co znamená, že f je jednoznačně určené hodnotami na nějaké bázi

Příklad diskrétního lineárního dynamického systému

nakreslíme hodnoty zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určeného maticí

$A = \begin{pmatrix} 1,035 & 0,09 \\ 0,135 & 0,99 \end{pmatrix}$ v několika bodech



Zkoumání příkladu – 1. část

protože $f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1,035 & 0,09 \\ 0,135 & 0,99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,125 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

je také $(f_A)^2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f_A\left(1,125 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1,125^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a tedy $(f_A)^k\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1,125^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$

dále $f_A\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1,035 & 0,09 \\ 0,135 & 0,99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0,9 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a tedy $(f_A)^k\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0,9^k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$

Zkoumání příkladu – 2. část

posloupnost $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ je *LN* a tedy báze v $\mathbb{R}^2$

známe hodnoty $(f_A)^k$ na prvcích této báze:

$$(f_A)^k \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1,125^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(f_A)^k \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0,9^k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

známe tedy

$$[(f_A)^k]^B_B = \begin{pmatrix} 1,125^k & 0 \\ 0 & 0,9^k \end{pmatrix} \quad \text{pro každé } k = 1, 2, \ldots$$

Zkoumání příkladu – 3. část

protože $\quad [\mathbf{x}_k]_B = [(f_A)^k(\mathbf{x}_0)]_B = [(f_A)^k]^B_B \cdot [\mathbf{x}_0]_B$

známe všechny prvky posloupnosti

$\{\mathbf{x}_k = (f_A)^k(\mathbf{x}_0)\}$ pro jakýkoliv počáteční vektor $\mathbf{x}_0$

je-li $[\mathbf{x}_0]_B = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, pak

$$[\mathbf{x}_k]_B = \begin{pmatrix} 1,125^k & 0 \\ 0 & 0,9^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,125^k\, r \\ 0,9^k\, s \end{pmatrix}$$

pro přechod k vyjádření pomocí kanonické báze využijeme matice přechodu

$$[id]^B_K = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad [id]^K_B = ([id]^B_K)^{-1} = 5^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Shrnutí příkladu

k úplnému poznání posloupnosti $\mathbf{x}_k = (f_A)^k(\mathbf{x}_0)$ pro každý počáteční vektor $\mathbf{x}_0$ nám stačilo

uhádnout nenulové vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, které operátor f_A

zobrazil do jejich násobků $\quad 1,125 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $0,9 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

posloupnost těchto vektorů tvořila bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

matice $[f_A]^B_B = \begin{pmatrix} 1,125 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ pak byla diagonální

a proto platilo $[(f_A)^k]^B_B = \begin{pmatrix} 1,125^k & 0 \\ 0 & 0,9^k \end{pmatrix}$

Definice vlastních čísel

toto je naprosto základní definice: je-li A čtvercová matice řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$, pak skalár $\lambda \in \mathbf{T}$ nazýváme *vlastní číslo matice* A, pokud existuje **nenulový** vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$, pro který platí

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak skalár $\lambda \in \mathbf{T}$ nazýváme *vlastní číslo operátoru* f, pokud existuje **nenulový** prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, pro který platí

$$f(\mathbf{x}) = \lambda\,\mathbf{x}$$

pozorování: pro čtvercovou matici A nad $\mathbf{T}$ platí, že $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo matice A právě když je λ vlastní číslo lineárního operátoru $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ určeného maticí A

Definice vlastních vektorů

také toto je naprosto základní definice: je-li λ vlastní číslo matice A řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$, pak *vlastní vektor matice A* příslušný vlastnímu číslu λ je každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$, pro který platí

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

je-li λ vlastní číslo operátoru $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$, kde $\mathbf{U}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, pak *vlastní vektor operátoru f* příslušný vlastnímu číslu λ je každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, pro který platí

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$$

poznámka 1: $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo matice A (nebo operátoru f) právě když existuje **nenulový** vlastní vektor příslušný λ

poznámka 2: nulový vektor $\mathbf{o}$ je vlastním vektorem příslušným jakémukoliv vlastnímu číslu matice A (nebo operátoru f)

Příklady

poznámka 2: víme už, že vlastní čísla matice A řádu n nad $\mathbf{T}$ a operátoru $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ se shodují

navíc pro každé vlastní číslo λ matice A (tj. operátoru f_A) platí, že vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ je vlastní vektor matice A příslušný λ právě když je to vlastní vektor operátoru f_A příslušný λ

příklad: vlastní čísla a vlastní vektory jednotkové matice I_n nad $\mathbf{T}$ a identického operátoru $id : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$

příklad: vlastní čísla a vlastní vektory nulové matice $0_{n \times n}$ nad $\mathbf{T}$ a nulového operátoru $O : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$

Další příklady

příklad: osová symetrice určená přímkou generovanou $(a, b)^T$

příklad: projekce na přímku generovanou $(a, b)^T$

Další příklady

příklad: stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem λ

příklad: otočení v rovině o úhel α, který není násobkem π

Vlastní čísla a vektory diferenciálního operátoru 1

je-li **U** vektorový prostor všech reálných funkcí reálné proměnné, pak zobrazení $D : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ definované předpisem

$$D(f) = f'$$

je lineární operátor na **U**

kdy je reálné číslo λ vlastním číslem operátoru D ?

pokud existuje nenulová funkce f, pro kterou platí

$$D(f) = f' = \lambda f$$

takovou funkci známe, je to $f(t) = e^{\lambda t}$, neboť $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$

každé číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo diferenciálního operátoru D

mezi vlastní vektory (v tomto případě funkce) operátoru D příslušné λ patří všechny funkce tvaru $f(t) = s\, e^{\lambda t}$, kde $s \in \mathbb{R}$

Vlastní čísla a vektory diferenciálního operátoru 2

ukážeme, že žádné jiné vlastní funkce operátoru D neexistují

je-li $g(t)$ diferencovatelná funkce, pro kterou platí $g' = \lambda g$, označíme $s = g(0)$

spočítáme derivaci funkce $g(t)\, e^{-\lambda t}$:

$$(g(t)\, e^{-\lambda t})' = g'(t) e^{-\lambda t} + g(t)(-\lambda) e^{-\lambda t} = \lambda g(t) e^{-\lambda t} - \lambda g(t) e^{-\lambda t} = 0$$

funkce $g(t)\, e^{-\lambda t}$ je tedy konstantní a protože $g(0)\, e^{-\lambda 0} = s$, platí

$$g(t)\, e^{-\lambda t} = s, \quad \text{neboli} \quad g(t) = s\, e^{\lambda t}$$

věta: pro každá reálná čísla λ, s je funkce $f(t) = s\, e^{\lambda t}$ jediná reálná diferencovatelná funkce, pro kterou platí

$$f' = \lambda f \quad \text{a} \quad f(0) = s$$

Poločas rozpadu radioaktivní látky

nyní můžeme spočítat počet radioaktivních jader $f(t)$ v nějaké látce v libovolném čase t, známe-li jejich počet $f(0)$ v čase 0, viz str.9-10

funkce f splňuje diferenciální rovnici

$$f' = -k\, f(t) \ \text{ s počáteční podmínkou } f(0) = s$$

platí tedy $\quad f(t) = f(0)\, e^{-kt}$ pro každé $t \in \mathbb{R}$

poločas rozpadu radioaktivní látky je doba T, za kterou se počet radioaktivních jader sníží na polovinu

platí proto $\quad f(T) = \dfrac{f(0)}{2}, \quad$ neboli $\quad f(0)\, e^{-kT} = \dfrac{f(0)}{2}$

odtud plyne $e^{-kT} = \dfrac{1}{2}$, proto $\ -kT = -\ln 2\ $ a tedy $\ T = \dfrac{\ln 2}{k}$

Vlastní čísla a vlastní vektory matic

tvrzení: je-li A matice řádu n nad tělesem **T**, pak skalár $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo matice A právě když platí

$$\text{matice} \quad A - \lambda I_n \quad \text{je singulární}$$

je-li λ vlastní číslo A, pak množina všech vlastních vektorů matice A příslušných λ se rovná

$$Ker\,(A - \lambda I_n) \le \mathbf{T}^n$$

důkaz:

důsledek: pro čtvercovou matici A nad **T** je ekvivalentní

1. A je regulární
19. 0 není vlastní číslo matice A

důkaz:

Jak je najdeme ?

vzpomeneme si, že čtvercová matice A je singulární právě když je $\det A = 0$

příklad: spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla a vlastní vektory operátorů

věta: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak $\lambda \in \mathbf{T}$ je vlastní číslo operátoru f právě když

operátor $\quad f - \lambda\, id_{\mathbf{U}} \quad$ není prostý

vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ operátoru f právě když

$$\mathbf{x} \in Ker\,(f - \lambda\, id_{\mathbf{U}})$$

důkaz:

důsledek: pro lineární operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je ekvivalentní

- f má vlastní číslo 0
- f není prostý

důkaz:

Vlastní čísla a vlastní vektory operátorů pomocí matic

tvrzení: je-li f lineární operátor na prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ a B nějaká báze v $\mathbf{U}$, pak platí

- vlastní čísla operátoru f a matice $[f]_B^B$ jsou stejná

je-li λ vlastní číslo operátoru f (tj. matice $[f]_B^B$), pak pro vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ je ekvivalentní

- $\mathbf{x}$ je vlastní vektor operátoru f příslušný λ
- $[\mathbf{x}]_B$ je vlastní vektor matice $[f]_B^B$ příslušný λ

důkaz:

Příklad

příklad: spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory rotace v rovině $\mathbb{R}^2$ kolem počátku o úhel α v kladném směru

Další příklad

příklad: spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory ortogonální projekce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na přímku určenou vektorem $(1,2)^T$

Stejný příklad s jinou bází

vzhledem ke kanonické bázi má operátor f matici

$$A = [f]_K^K = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(1,2)}{\|(1,2)^T\|^2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom

pro každou čtvercovou matici A řádu n je $\det(A - \lambda I_n)$ polynom v proměnné λ a vlastní čísla matice A jsou právě jeho kořeny

definice: je-li A čtvercová matice řádu n nad $\mathbf{T}$, pak *charakteristický polynom matice* A je polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

v případě lineárního operátoru f na prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n můžeme zvolit nějakou bázi B v $\mathbf{U}$, ta určuje matici $[f]_B^B$, která má charakteristický polynom

$$\det([f]_B^B - \lambda I_n)$$

je-li C další báze v $\mathbf{U}$, pak víme, že platí

$$[f]_C^C = \left([id]_B^C\right)^{-1} \cdot [f]_B^B \cdot [id]_B^C$$

Podobnost matic

definice: dvě čtvercové matice X, Y téhož řádu n nad stejným tělesem $\mathbf{T}$ se nazývají *podobné*, pokud existuje regulární matice R taková, že

$$Y = R^{-1} X R$$

matice $[f]_B^B$ a $[f]_C^C$ téhož operátoru f vzhledem ke dvěma bázím B, C jsou tedy podobné

tvrzení: podobné matice mají stejný charakteristický polynom

důkaz:

Charakteristický polynom operátoru

předchozí tvrzení říká, že charakteristický polynom matice $[f]_B^B$ operátoru $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ nezávisí na volbě báze B v $\mathbf{U}$

to ospravedlňuje následující definici

definice: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na vektorovém prostoru dimenze n nad $\mathbf{T}$ a B báze v $\mathbf{U}$, pak *charakteristický polynom operátoru* f je polynom

$$p_f(\lambda) = \det([f]_B^B - \lambda\, I_n)$$

připomenutí: při výpočtu vlastních čísel ortogonální projekce v $\mathbb{R}^2$ na přímku generovanou $(1,2)^T$ jsme použili dvě různé báze

Koeficienty charakteristického polynomu

tvrzení: je-li $A = (a_{ij})$ matice řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$, pak charakteristický polynom $p_A(\lambda)$ je polynom stupně n pro který platí

1. koeficient u λ^n se rovná $(-1)^n$
2. koeficient u λ^{n-1} se rovná $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$
3. absolutní člen se rovná $\det A$

důkaz:

Příklady charakteristických polynomů

příklad: charakteristický polynom matice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

příklad: charakteristický polynom otočení v $\mathbb{R}^3$ kolem první souřadné osy o úhel α v kladném směru

Kořeny polynomů

vlastní čísla matice řádu n nad $\mathbf{T}$ nebo lineárního operrátoru na prostoru dimenze n nad $\mathbf{T}$ najdeme jako kořeny polynomu stupně n s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$

polynom stupně n s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$ je výraz

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$$

kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$, $a_n \neq 0$

stručně budeme říkat, že $p(x)$ je *polynom nad* $\mathbf{T}$

nulový polynom nemá přidělený žádný stupeň

součin polynomu $p(x)$ stupně n s polynomem $q(x)$ stupně m je polynom $p(x)q(x)$ stupně $n + m$

kořen polynomu $p(x)$ je prvek $t \in \mathbf{T}$, pro který platí $p(t) = 0$

Dělitelnost polynomů

jsou-li $p(x)$ a $s(x)$ polynomy nad $\mathbf{T}$, pak říkáme, že $p(x)$ *dělí* $s(x)$ pokud existuje polynom $q(x)$ nad $\mathbf{T}$, pro který platí $p(x)q(x) = s(x)$

tvrzení: je-li $p(x)$ polynom s koeficienty nad $\mathbf{T}$, pak prvek $t \in \mathbf{T}$ je kořen polynomu $p(x)$ právě když polynom $x - t$ dělí polynom $p(x)$

je-li t kořen $p(x)$, pak existuje největší číslo k takové, že $(x-t)^k$ dělí $p(x)$

toto největší k nazýváme *násobnost* kořene t

v tom případě: $p(x) = (x-t)^k\, q(x)$ a t není kořenem $q(x)$
ostatní kořeny polynomu $p(x)$ najdeme jako kořeny polynomu $q(x)$ a se stejnými násobnostmi jako v $p(x)$

Příklady

příklad: prvek $1 \in \mathbb{Z}_2$ je kořen polynomu x^2+1 nad $\mathbb{Z}_2$, jeho násobnost je 2, protože nad $\mathbb{Z}_2$ platí

$$(x+1)^2 = x^2 + (1+1)x + 1 = x^2 + 1$$

hledat kořeny polynomů vyšších stupňů je notoricky těžké

občas se podaří nějaký kořen polynomu uhádnout a snížit tak stupeň polynomu, jehož kořeny potřebujeme najít

příklad: najdeme kořeny a jejich násobnosti pro reálný polynom

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

Další příklad

příklad: reálný polynom $p(x) = x^4 + x^2$ má zjevně kořen $x = 0$
protože $x^4 + x^2 = x^2(x^2+1)$ a x^2+1 nemá žádný reálný kořen, má kořen $x = 0$ násobnost 2; jiné reálné kořeny polynom $p(x)$ nemá

každý reálný polynom je současně polynom s komplexními koeficienty

můžeme proto hledat také komplexní kořeny

pak má polynom x^2+1 dva komplexní kořeny $x = i$ a $x = -i$ násobnosti 1

celý polynom $p(x) = x^4 + x^2 = x^2(x^2+1)$ má reálný kořen $x = 0$ s násobností 2 a dva komplexní kořeny $x = i$ a $x = -i$ násobnosti 1

A další příklad

příklad: v případě malých těles můžeme kořeny hledat zkusmo

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2$$

je polynom nad $\mathbb{Z}_3$, najdeme jeho kořeny a jejich násobnosti

Počet kořenů polynomu nad $\mathbb{C}$

bex důkazu uvedeme následující tvrzení

tvrzení: každý polynom stupně n nad tělesem $\mathbf{T}$ má v $\mathbf{T}$ nejvýše n kořenů včetně násobností

existence kořenů polynomů stupně aspoň 2 není v obecném tělese $\mathbf{T}$ zajištěna

pro polynomy s komplexními koeficienty ale platí *základní věta algebry* ze str. 1-7, která zajišťuje existenci komplexního kořenu pro každý polynom s komplexními koeficienty stupně aspoň 1

pro polynomy s komplexními koeficienty proto platí

věta: každý polynom nad $\mathbb{C}$ stupně $n \geq 1$ má přesně n komplexních kořenů včetně násobností

Algebraická násobnost vlastních čísel

kvůli komplexnímu sdružování kořenů polynomů s reálnými koeficienty (str. 1-12) platí

tvrzení: každý polynom lichého stupně s reálnými koeficienty má aspoň jeden reálný kořen

poznatky o existenci kořenů polynomů použijeme nyni na charakteristické polynomy matice nebo lineárních operátorů

definice: je-li λ vlastní číslo čtvercové matice A nad tělesem $\mathbf{T}$, pak *algebraická násobnost* vlastního čísla λ je násobnost λ coby kořene charakteristického polynomu $p_A(\lambda)$ matice A

definice: je-li λ vlastní číslo operátoru $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na prostoru dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$, pak *algebraická násobnost* vlastního čísla λ je násobnost λ coby kořene charakteristického polynomu $p_f(\lambda)$ operátoru f

Existence vlastních čísel matic

protože charakteristický polynom matice řádu n má stupeň n, platí na základě výsledků ze str. 9-49 a str. 9-50

důsledek: každá čtvercová matice řádu n

- nad $\mathbf{T}$ má v $\mathbf{T}$ nejvýše n vlastních čísel včetně algebraických násobností
- nad $\mathbb{C}$ má v $\mathbb{C}$ přesně n vlastních čísel včetně algebraických násobností
- nad $\mathbb{R}$ má aspoň jedno reálné vlastní číslo, pokud je n liché číslo

Existence vlastních čísel lineárních operátorů

stejně tak charakteristický polynom lineárního operátoru $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na prostoru dimenze n nad $\mathbf{T}$ má stupeň n a proto

důsledek: každý operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na prostoru dimenze n

- nad $\mathbf{T}$ má v $\mathbf{T}$ nejvýše n vlastních čísel včetně algebraických násobností
- nad $\mathbb{C}$ má v $\mathbb{C}$ přesně n vlastních čísel včetně algebraických násobností
- nad $\mathbb{R}$ má aspoň jedno reálné vlastní číslo, pokud je n liché číslo

Příklad

najdeme vlastní čísla a jejich algebraické násobnosti pro operátor $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ -3x-2y+3z \\ -2x-2y+3z \end{pmatrix}$$

definovaný na aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^3$

jeho matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = [f]_K^K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad – dokončení

a charakteristický polynom

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_3) = \det\begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

operátor f má tedy dvě vlastní čísla a to $\lambda = 1$ s algebraickou násobností 2 a $\lambda = -1$ s algebraickou násobností 1

Diagonalizace - obsah

Diagonalizovatelné operátory

příklad na str. 9-19 jsme dokázali úplně vyřešit díky tomu, že jsme našli bázi B prostoru $\mathbb{R}^2$ takovou, že matice $[f_A]_B^B$ operátoru f_A vzhledem k této bázi byla diagonální

takové lineární operátory jsou důležité, a proto si je pojmenujeme

definice: lineární operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na prostoru dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ je *diagonalizovatelný*, pokud existuje báze B v prostoru $\mathbf{U}$ taková, že matice $[f]_B^B$ je diagonální

méně formálně: operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je diagonalizovatelný právě když má vzhledem k nějaké bázi prostoru $\mathbf{U}$ diagonální matici

diagonální matice řádu n budeme zapisovat

$$diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

kde λ_i označuje prvek hlavní diagonály na místě (i, i)

Diagonalizovatelnost operátorů a vlastní vektory

tvrzení: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na prostoru dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$, pak pro bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru $\mathbf{U}$ je ekvivalentní

- matice $[f]^B_B = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$
- pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je λ_i vlastní číslo operátoru f a $\mathbf{u}_i$ je vlastní vektor operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ_i

důkaz $\Downarrow$: z rovnosti

$$[f]^B_B = ([f(\mathbf{u}_1)]_B \,|\, [f(\mathbf{u}_2)]_B \,|\cdots|[f(\mathbf{u}_n)]_B) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

plyne, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$

$$f(\mathbf{u}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_i$$

vektory $\mathbf{u}_i$ jsou nenulové (jsou prvky báze), proto je λ_i vlastní číslo operátoru f a $\mathbf{u}_i$ je vlastní vektor f příslušný λ_i

Opačná implikace

$\Downarrow$: pro každý vektor $\mathbf{u}_i$ báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ platí

$$f(\mathbf{u}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_i$$

z definice matice $[f]^B_B$ pak plyne

$$[f]^B_B = ([f(\mathbf{u}_1)]_B \,|\, [f(\mathbf{u}_2)]_B \,|\cdots|[f(\mathbf{u}_n)]_B) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

důsledek 1: pro lineární operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na konečně dimenzionálním prostoru $\mathbf{U}$ nad $\mathbf{T}$ je ekvivalentní

- f je diagonalizovatelný
- v $\mathbf{U}$ existuje báze B složená z vlastních vektorů operátoru f

diagonální matice je snadné umocňovat:

$$diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k) \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Diagonalizovatelné matice

důsledek 2: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na konečně dimenzionálním prostoru $\mathbf{U}$ a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ báze $\mathbf{U}$ složená z vlastních vektorů f, pak platí pro každé $k \in \mathbb{N}_0$

$$[f^k]^B_B = \left([f]^B_B\right)^k$$

důkaz: plyne z tvrzení o matici složeného zobrazení na str. 8-29

definice: čtvercová matice A řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$ se nazývá *diagonalizovatelná*, je-li diagonalizovatelný operátor $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ definovaný maticí A

kvůli zjednodušení zápisu diagonálních matic zavedeme značení

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

jako další důsledek tvrzení na str. 9-57 dostáváme

Ekvivalentní definice diagonalizovatelných matic

tvrzení: je-li A čtvercová matice řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$, pak pro bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru $\mathbf{T}^n$ je ekvivalentní

1. $[f_A]^B_B = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$
2. $A\,\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$

důkaz: spolu s tvrzením na str. 9-57 stačí použít poznámku 2 na str. 9-26, která říká, že

vektor $\mathbf{u}_i \in \mathbf{T}^n$ je vlastní vektor operátoru $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ příslušný λ_i právě když je to vlastní vektor matice A příslušný témuž λ_i

poznámka: ze sloupcové definice součinu matic plyne, že druhá podmínka předchozího tvrzení je ekvivalentní rovnosti

$$A(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_n) = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_n)\,\Lambda$$

Diagonalizovatelná = podobná diagonální

připomeňme, že matice $R = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_n)$ je regulární právě když posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je *LN*, což platí právě když $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze v $\mathbf{T}^n$

rovnost $A\,R = R\,\Lambda$ proto můžeme přepsat ve tvaru

$$R^{-1}\,A\,R = \Lambda$$

důsledek: pro čtvercovou matici A řádu n nad $\mathbf{T}$ je ekvivalentní

- A je diagonalizovatelná
- A je podobná nějaké diagonální matici

diagonalizovatelné matice můžeme snadno umocňovat

A je diagonalizovatelná právě když platí $A = R\,\Lambda\,R^{-1}$ pro nějakou regulární matici R, a proto

$$A^k = R\,\Lambda^k\,R^{-1} = R\,diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)\,R^{-1}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}_0$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Lineární nezávislost posloupnosti vlastních vektorů

věta: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ nad $\mathbf{T}$, pak každá posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ **nenulových** vlastních vektorů $\mathbf{u}_i$ operátoru f příslušných **navzájem různým** vlastním číslům λ_i (pro $i = 1, 2, \ldots, k$) je lineárně nezávislá

důkaz: indukcí podle k

pro $k = 1$ tvrzení platí, protože předpokládáme $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$

je-li $k > 1$, indukční předpoklad zní, že každá posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1})$ nenulových vlastních vektorů příslušných navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ je *LN*

vezmeme libovolnou lineární kombinaci

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Pokračování důkazu

na poslední rovnost použijeme lineární operátor f a dostaneme

$$a_1 f(\mathbf{u}_1) + a_2 f(\mathbf{u}_2) + \cdots + a_k f(\mathbf{u}_k) = \mathbf{o}$$

a protože $f(\mathbf{u}_i) = \lambda_i\mathbf{u}_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$a_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$$

poslední rovnost z předchozí strany ještě vynásobíme skalárem λ_k:

$$\lambda_k a_1\mathbf{u}_1 + \lambda_k a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k a_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$$

a odečteme ji od předchozí; dostaneme

$$(\lambda_1 - \lambda_k)a_1\mathbf{u}_1 + (\lambda_2 - \lambda_k)a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{o}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Dokončení důkazu

posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_{k-1})$ je lineárně nezávislá podle indukčního předpokladu

proto $(\lambda_i - \lambda_k)a_i = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k-1$

vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou navzájem různá, proto $a_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$

z poslední rovnosti na str. 9-62 pak plyne také $a_k = 0$, neboť $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{o}$,

což dokazuje, že $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je *LN*

Důsledky

věta: je-li A čtvercová matice řádu n nad $\mathbf{T}$, pak každá posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ **nenulových** vlastních vektorů $\mathbf{u}_i$ matice A příslušných **navzájem různým** vlastním číslům λ_i (pro $i = 1, 2, \ldots, k$) je lineárně nezávislá

věta: má-li charakteristický polynom p_f lineárního operátoru $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na vektorovém prostoru dimenze n nad $\mathbf{T}$ celkem n navzájem různých kořenů v $\mathbf{T}$, pak je operátor f diagonalizovatelný

věta: má-li charakteristický polynom p_A čtvercové matice A řádu n nad $\mathbf{T}$ celkem n navzájem různých kořenů v $\mathbf{T}$, pak je matice A diagonalizovatelná

Fibonacciho posloupnost 1

víme už, že členy Fibonacciho posloupnosti $\{a_k\}$ splňují rovnost

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

charakteristický polynom matice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se rovná

$$\det(C - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

matice C má vlastní čísla $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \lambda_1$

a je diagonalizovatelná, neboť má dvě různá reálná vlastní čísla

Fibonacciho posloupnost 2

množina vlastních vektorů příslušných λ_1 se rovná

$$Ker \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

množina vlastních vektorů příslušných λ_2 se rovná

$$Ker \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 1 \\ 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

vlastní vektory napíšeme do sloupců matice $R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1-\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a spočítáme $R^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 - 1 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, potom

Fibonacciho posloupnost 3

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1-\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 - 1 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$C^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1-\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & (1-\lambda_1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 - 1 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

a nakonec spočítáme

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = C^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1-\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ -(1-\lambda_1)^k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - (1-\lambda_1)^{k+1} \\ \lambda_1^k - (1-\lambda_1)^k \end{pmatrix} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}_0$$

proto $a_k = \dfrac{(1+\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}} - \dfrac{(1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}}$ pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$

Různá vlastní čísla nejsou nutná

charakteristický polynom p_f operátoru $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n má stupeň n

má-li n různých kořenů, je operátor f diagonalizovatelný (prostřední věta na str. 9-65)

existují ale diagonalizovatelné operátory na prostoru dimenze n, které nemají n navzájem různých vlastních čísel

nejjednoduší příklad je identický operátor $id : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$

každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ je vlastní vektor opeátoru id, který tak má jediné vlastní číslo 1

pro každou bázi B prostoru $\mathbf{U}$ je $[id]_B^B = I_n$, identický operátor je diagonalizovatelný

Geometrická násobnost vlastního čísla

charakteristický polynom p_{id} se rovná

$$\det(I_n - \lambda I_n) = \det(1-\lambda)I_n = (1-\lambda)^n$$

identický operátor $id : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ má jediné vlastní číslo $\lambda = 1$ s algebraickou násobností n

příčina diagonalizovatelnosti identického operátoru není v mnoha různých vlastních číslech, ale ve velkém počtu vlastních vektorů

definice: je-li λ vlastní číslo operátoru f na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ pak jeho *geometrická násobnost* je dimenze

$$\dim Ker\,(f - \lambda\, id_{\mathbf{U}})$$

podprostoru vlastních vektorů loperátoru f příslušných λ

Geometrická násobnost $\leq$ algebraická násobnost

geometrická násobnost každého vlastního čísla je aspoň 1

označení: prostor $Ker\,(f - \lambda\, id_{\mathbf{U}})$ (případně $Ker\,(A - \lambda\, I_n)$) vlastních vektorů operátoru f (matice A) příslušných vlastnímu číslu λ budeme nadále značit M_λ

tvrzení: geometrická násobnost každého vlastního čísla operátoru $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ je nejvýše rovná algebraické násobnosti tohoto vlastního čísla

důkaz: je-li λ_1 vlastní číslo lineární operátoru f, označíme k jeho geometrickou násobnost

platí tedy $\qquad k = \dim M_{\lambda_1} = \dim Ker\,(f - \lambda_1\, id_{\mathbf{U}})$

v podprostoru M_{λ_1} zvolíme bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ a doplníme ji do báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru $\mathbf{U}$

Pokračování důkazu

protože platí $f(\mathbf{u}_i) = \lambda_1\, \mathbf{u}_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$, platí

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_k & E \\ O_{(n-k)\times k} & F \end{pmatrix}$$

spočítáme charakteristický polynom

$$p_f(\lambda) = \det\left([f]_B^B - \lambda\, I_n\right) = \det \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda) I_k & E \\ O_{(n-k)\times k} & F - \lambda I_{n-k} \end{pmatrix}$$

v posledním determinantu je každý prvek na místě $(\pi(i), i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ rovný 0, pokud $\pi(i) \neq i$

v součtu definujícím poslední determinant proto stačí uvažovat pouze sčítance definované permutacemi π, pro které platí $\pi(i) = i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$

každý takový sčítanec proto obsahuje činitele $(\lambda_1 - \lambda)^k$

Dokončení důkazu

ostatní činitelé v takových sčítancích odpovídají výběrům prvků z bloku $F - \lambda I_{n-k}$, neboť jsou určené permutacemi π , které splňují $\pi(j) \in \{k+1, \dots, n\}$ pro každé $j \in \{k+1, \dots, n\}$

znaménko každé takové permutace π se rovná znaménku jejího zúžení na množinu $\{k+1, \dots, n\}$, neboť obě znaménka se rovnají počtu sudých cyklů v π

vytkneme-li z každého takového sčítance $(\lambda_1 - \lambda)^k$, v závorce zůstane $\det(F - \lambda I_{n-k})$

platí proto $\qquad p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^k \det(F - \lambda I_{n-k})$

algebraická násobnost vlastního čísla λ_1 je tedy aspoň k, tj. větší nebo rovná geometrické násobnosti λ_1

Násobnosti vlastních čísel matic

připomeňme, že matice A řádu n nad $\mathbf{T}$ má stejná vlastní čísla jako operátor $f_A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ určený maticí A

vlastní vektory matice A příslušné λ se rovnají vlastním vektorům operátoru f_A příslušným témuž λ

k důkazu stačí použít tvrzení na str. 9-35 pro kanonickou bázi K v prostoru $\mathbf{T}^n$

tvrzení: geometrická násobnost každého vlastního čísla λ čtvercové matice A je nejvýše rovná algebraické násobnosti téhož vlastního čísla λ

Příklad nediagonalizovatelné matice

příklad: reálná matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ má charakteristický polynom rovný

$$p_A(\lambda) = (3 - \lambda)^2$$

a tedy jediné vlastní číslo $\lambda = 3$ s algebraickou násobností 2

podprostor $M_3 \leq \mathbb{R}^2$ vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 3 je

$$Ker\,(A - 3\,I_2) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

má dimenzi 1 a protože v něm leží všechny vlastní vektory matice A (jsou příslušné jedinému vlastnímu číslu 3), nelze v něm vybrat bázi $\mathbb{R}^2$ složenou z vlastních vektorů matice A

Charakterizace diagonalizovatelných operátorů

věta: pro lineární operátor f na vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n je ekvivalentní

1. operátor f je diagonalizovatelný
2. operátor f splňuje následující dvě podmínky
   - součet algebraických násobností všech vlastních čísel f se rovná n
   - algebraická násobnost každého vlastního čísla λ operátoru f se rovná jeho geometrické násobnosti

důkaz 1 $\Rightarrow$ 2: je-li f diagonalizovatelný, existuje v $\mathbf{U}$ báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ složená z vlastních vektorů operátoru f

označíme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ všechna navzájem různá vlastní čísla f

algebraickou násobnost λ_i označíme l_i pro $i = 1, 2, \dots, k$

geometrickou násobnost λ_i označíme m_i, tj. $m_i = \dim M_{\lambda_i}$

1. pokračování důkazu

každý prvek báze B musí ležet v nějakém podprostoru M_{λ_i}

naopak může z každého M_{λ_i} obsahovat nejvýše $m_i = \dim M_{\lambda_i}$ prvků, protože podposloupnost prvků B ležících v M_{λ_i} je LN

proto $\quad n \leq m_1 + m_2 + \cdots + m_k$

algebraická násobnost každého vlastního čísla λ_i je menší nebo rovná jehop geometrické násobnosti (str. 9-71)

proto $\quad m_i \leq l_i \quad$ pro každé $\; i = 1, 2, \ldots, k$

a tedy také $\quad m_1 + m_2 + \cdots + m_k \leq l_1 + l_2 + \cdots + l_k$

2. pokračování důkazu

a nakonec, součet násobností kořenů jakéhokoliv polynomu je nejvýše rovný jeho stupni, proto

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_k \leq n$$

dokázali jsme tak nerovnosti (a tedy rovnosti)

$$n \leq m_1 + m_2 + \cdots + m_k \leq l_1 + l_2 + \cdots + l_k \leq n$$

poslední rovnost říká, že součet algebraických násobností všech vlastních čísel f se rovná n

a z prostřední rovnosti a toho, že $l_i \leq m_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ plyne, že

algebraická násobnost každého vlastního čísla λ_i operátoru f se rovná jeho geometrické násobnosti

3. pokračování důkazu

důkaz opačné implikace $2 \Rightarrow 1$: také tentokrát označíme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru f

algebraickou násobnost vlastního čísla λ_i označíme l_i

předpoklady jsou, že každé l_i je současně geometrickou násobností vlastního čísla λ_i pro $i = 1, 2, \ldots, k$

a součet algebraických násobností $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n$

v každém prostoru M_{λ_i} (vlastních vektorů příslušných λ_i) zvolíme nějakou bázi

$$B_i = (\mathbf{u}_1^i, \mathbf{u}_2^i, \ldots, \mathbf{u}_{l_i}^i)$$

4. pokračování důkazu

všechny báze $B_1, B_2, \ldots, B_k$ spojíme do dlouhé posloupnosti

$$B = (\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1, \ldots, \mathbf{u}_{l_1}^1, \mathbf{u}_1^2, \mathbf{u}_2^2, \ldots, \mathbf{u}_{l_2}^2, \ldots, \mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^k, \ldots, \mathbf{u}_{l_k}^k)$$

dokážeme, že B je báze prostoru $\mathbf{U}$; počet jejích prvků je $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n = \dim \mathbf{U}$, stačí proto dokázat, že B je LN

za tímto účelem dokážeme, že pouze triviální lineární kombinace prvků posloupnosti B se rovná $\mathbf{o}$; je-li

$$a_1^1\mathbf{u}_1^1 + a_2^1\mathbf{u}_2^1 + \cdots + a_{l_1}^1\mathbf{u}_{l_1}^1 + \cdots + a_1^k\mathbf{u}_1^k + a_2^k\mathbf{u}_2^k + \cdots + a_{l_k}^k\mathbf{u}_{l_k}^k) = \mathbf{o}$$

označíme $a_1^i\mathbf{u}_1^i + a_2^i\mathbf{u}_2^i + \cdots + a_{l_i}^i\mathbf{u}_{l_i}^i = \mathbf{v}_i \;$ pro $\; i = 1, 2, \ldots, k$

5. pokračování důkazu

potom platí $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k = \mathbf{o}$

každý z vektorů $\mathbf{v}_i \in M_{\lambda_i}$ je vlastní vektor f příslušný vlastnímu číslu λ_i

pokud by některý z nich byl nenulový, dostali bychom z poslední rovnosti netriviální lineární kombinaci **nenulových** členů posloupnosti $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ rovnou $\mathbf{o}$

protože jsou $\mathbf{v}_i$ vlastní vektory příslušné navzájem různým vlastním číslům λ_i, vedlo by to ke sporu s tvrzením na str. 9-62

odtud plyne, že každý vektor $\mathbf{v}_i = \mathbf{o}$

Závěr důkazu

z rovnosti $a^i_1\mathbf{u}^i_1 + a^i_2\mathbf{u}^i_2 + \cdots + a^i_{l_i}\mathbf{u}^i_{l_i} = \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$

a z lineární nezávislosti posloupnosti $B_i = (\mathbf{u}^i_1, \mathbf{u}^i_2, \ldots, \mathbf{u}^i_{l_i})$ plyne

$$a^i_1 = a^i_2 = \cdots = a^i_{l_i} = 0 \qquad \text{pro každé } i = 1, 2, \ldots, k$$

to dokazuje, že posloupnost B je LN a tedy báze v $\mathbf{U}$

prostor $\mathbf{U}$ má bázi složenou z vlastních vektorů operátoru f a to znamená, že f je diagonalizovatelný

Poznámky

poznámka 1: poslední věta ukazuje, že nediagonalizovatelnost operátoru f na prostoru dimenze n má dvě možné příčiny

1. málo vlastních čísel v $\mathbf{T}$ (součet algebraických násobností je menší než n)
2. nedostatek vlastních vektorů příslušných nějakému vlastnímu číslu (geometrická násobnost tohoto vlastního čísla je menší než jeho algebraická násobnost)

poznámka 2: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ diagonalizovatelný operátor na prostoru dimenze n a B je báze v $\mathbf{U}$ složená z vlastních vektorů f,

pak $[f]^B_B = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

a na diagonále jsou vlastní čísla f podle tvrzení na str. 9-57

poslední věta navíc říká, že každé vlastní číslo je na diagonále tolikrát, kolik je jeho geometrická násobnost

Příklad diagonalizovatelného operátoru

na str. 9-53 jsme zjistili, že operátor $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ -3x - 2y + 3z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $p_f(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$

má tedy dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 1$ algebriacké násobnosti 2 a $\lambda_2 = -1$ s algebraickou násobností 1

geometrická násobnost λ_2 je tedy také 1, zjistíme geometrickou násobnost $\lambda_1 = 1$

operátor f je tedy diagonalizovatelný podle věty na str. 9-76

Klasifikace lineárních operátorů na $\mathbb{R}^2$

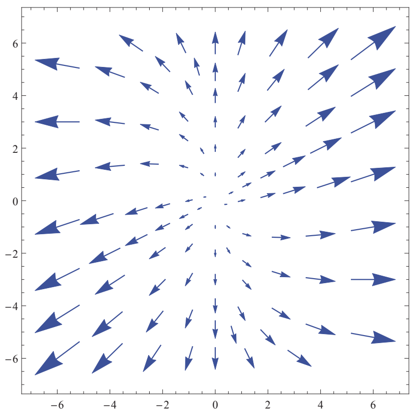
tvrzení: pro lineární operátor f na prostoru $\mathbb{R}^2$ (každý je určený nějakou reálnou maticí A řádu 2) mohou nastat následující čtyři možnosti

1. operátor f má dvě různá reálná vlastní čísla λ_1, λ_2
2. operátor f má jedno reálné vlastní číslo λ algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 2
3. operátor f má jedno reálné vlastní číslo λ algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 1
4. operátor f má dvě různá (komplexně sdružená) komplexní vlastní čísla λ a $\overline{\lambda}$

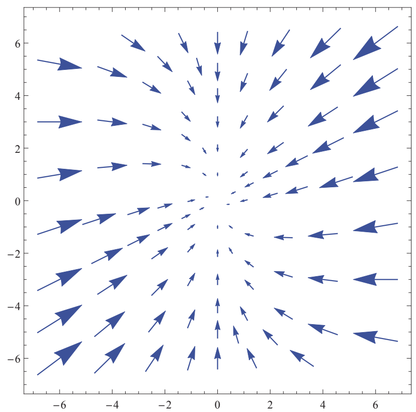
důkaz:

Grafy diagonalizovatelných operátorů 1

operátory se dvěma různými vlastními čísly λ_1, λ_2



případ $1 < \lambda_1 < \lambda_2$

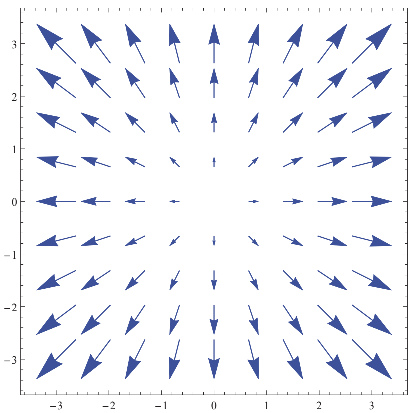


případ $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$

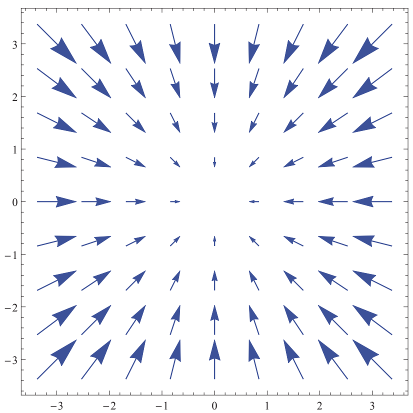
případ $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ je na str. 9-19

Grafy diagonalizovatelných operátorů 2

diagonalizovatelné operátory s jedním vlastním číslem λ



případ $1 < \lambda$



případ $0 < \lambda < 1$

4. případ z klasifikace na str. 9-85

probereme nyní podrobněji, jak vypadají operátory $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, určené reálnými maticemi A, které nemají žádné reálné vlastní číslo, mají ale dvě různá (komplexně sdružená) komplexní vlastní čísla

jako operátory nad $\mathbb{R}$ nejsou diagonalizovatelné (nemají žádné vlastní číslo v $\mathbb{R}$)

reálná matice je ale současně komplexní matice a určuje operátor $f_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, který je nad komplexními čísly diagonalizovatelný, má dvě různá vlastní čísla

co můžeme o takových operátorech $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ říct ?

Příklad

příklad: spočteme A^k pro reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

charakteristický polynom matice A je $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$

vlastní čísla jsou $\lambda = 1 + i$ a $\overline{\lambda} = 1 - i$

matice A je tedy diagonalizovatelná nad $\mathbb{C}$

vlastní vektory matice A příslušné vlastnímu číslu λ tvoří

$$M_\lambda = Ker\,(A - \lambda I_2) = Ker \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Pokračování příkladu

podobně najdeme vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$

$$M_{\overline{\lambda}} = Ker\,(A - \overline{\lambda} I_2) = Ker \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

všimněme si, že vlastní vektory příslušné komplexně sdruženým vlastním číslům jsou také komplexně sdružené

to není žádná náhoda, platí to pro jakoukoliv reálnou matici

posloupnost $\qquad B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$

je báze $\mathbb{C}^2$ složená z vlastních vektorů matice A

spočítáme matici $A^k = [(f_A)^k]_K^K$ pomocí matice $[(f_A)^k]_B^B$

2. pokračování příkladu

víme už, že $\qquad [f_A]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix},$

proto $\quad [(f_A)^k]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)^k & 0 \\ 0 & (1-i)^k \end{pmatrix}$

při násobení komplexních čísel je pohodlnější goniometrický tvar

$$\lambda = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\,\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}e^{i\pi/4},\ \ \overline{\lambda} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

takže $\qquad [(f_A)^k]_B^B = \begin{pmatrix} (\sqrt{2})^k e^{ik\pi/4} & 0 \\ 0 & (\sqrt{2})^k e^{-ik\pi/4} \end{pmatrix}$

pro přechod ke standardní bázi K použijeme matice přechodu

Dokončení příkladu

$$[id]_K^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},\ \ [id]_B^K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

potom $\qquad A^k = [(f_A)^k]_K^K = [id]_K^B\ [(f_A)^k]_B^B\ [id]_B^K, \quad$ tj.

$$A^k = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\sqrt{2})^k e^{ik\pi/4} & 0 \\ 0 & (\sqrt{2})^k e^{-ik\pi/4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

což po nějaké práci s vynásobením matic dá výsledek

$$A^k = \left(\sqrt{2}\right)^k \begin{pmatrix} \cos(k\pi/4) & -\sin(k\pi/4) \\ \sin(k\pi/4) & \cos(k\pi/4) \end{pmatrix}$$

vidíme tedy, že zobrazení $(f_A)^k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je rotace o úhel $k\pi/4$ složená se stejnolehlostí s koeficientem $(\sqrt{2})^k$

Také jsme si mohli všimnout

že $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$

f_A je rotace o úhel $\pi/4$ složená se stejnolehlostí s koeficientem $\sqrt{2}$

ukážeme, že ve skutečnosti **každá** reálná matice řádu 2, která nemá žádné reálné vlastní číslo (tj. má dvě různá komplexní vlastní čísla) určuje „rotaci“ v $\mathbb{R}^2$ složenou se „stejnolehlostí“

charakteristický polynom takové matice má dva komplexně sdružené komplexní kořeny λ a $\overline{\lambda}$

Reálné matice řádu 2 bez reálných vlastních čísel

oba kořeny si napíšeme v goniometrickém tvaru

$$\lambda = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}, \quad \overline{\lambda} = r(\cos\phi - i\sin\phi) = re^{-i\phi}$$

nenulový vlastní vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^2$ příslušný λ splňuje rovnost

$$f_A(\mathbf{u}) = A\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$$

matice $A = (a_{ij})$ má reálné prvky, platí proto

$$\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) = (a_{ij}) = A$$

z rovnosti $A\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$ přechodem ke komplexně sdruženým číslům plyne

$$A\,\overline{\mathbf{u}} = \overline{A}\,\overline{\mathbf{u}} = \overline{A\,\mathbf{u}} = \overline{\lambda\,\mathbf{u}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{u}}$$

Komplexně sdružené vlastní vektory

to znamená, že $\overline{\mathbf{u}}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$

posloupnost $C = (\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}})$ je LN (nenulové vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům matice A), a tedy báze v $\mathbb{C}^2$

vektor $\mathbf{u}$ rozložíme na součet reálné a imaginární části

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$$

potom $\mathbf{u} + \overline{\mathbf{u}} = 2\mathbf{v}$ a $i(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}) = -2\mathbf{w}$

protože $\quad [\mathbf{u} + \overline{\mathbf{u}}]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $[i(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})]_C = \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}$

je i posloupnost $B = (2\mathbf{v} \mid -2\mathbf{w})$ báze v $\mathbb{C}^2$ a tedy také v $\mathbb{R}^2$

Nová báze v $\mathbb{R}^2$

pro matici přechodu od báze B k bázi C platí

$$[id]_C^B = ([2\mathbf{v}]_C \mid [-2\mathbf{w}]_C) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

a protože $[f_A]_B^B = [id]_B^C\,[f_A]_C^C\,[id]_C^B$, dostáváme

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

což po dosazení $\lambda = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ a $\overline{\lambda} = r(\cos\phi - i\sin\phi)$ a nějakém počítání dává výsledek

$$[f_A]_B^B = r \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Dokončení výpočtu

dokázali jsme tak

tvrzení: je-li A reálná matice řádu 2 bez reálných vlastních čísel a s komplexními vlastními čísly $\lambda = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ a $\overline{\lambda} = r(\cos\phi - i\sin\phi)$, pak existuje báze B v $\mathbb{R}^2$ taková, že pro lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené maticí A platí

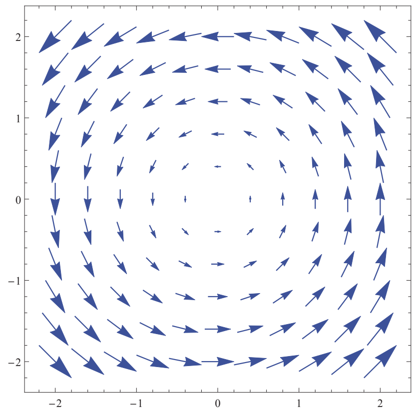
$$[f_A]_B^B = r\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

matice na pravé straně je matice otočení o úhel ϕ vzhledem ke kanonické bázi složené se stejnolehlostí s koeficientem r

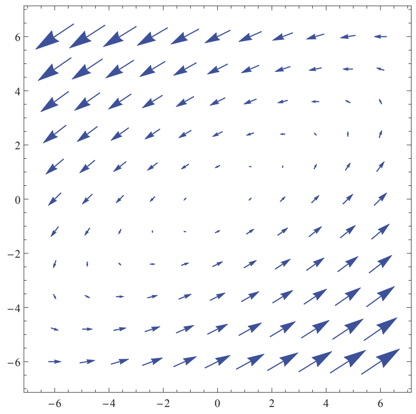
naše báze B ale není kanonická, nemusí být ani ortogonální ani nemusí mít vektory stejné délky

Grafy nediagonalizovatelných operátorů 1

nediagonalizovatelné reálné operátory bez reálných vlastních čísel s komplexním vlastním číslem λ, $|\lambda| = 1$



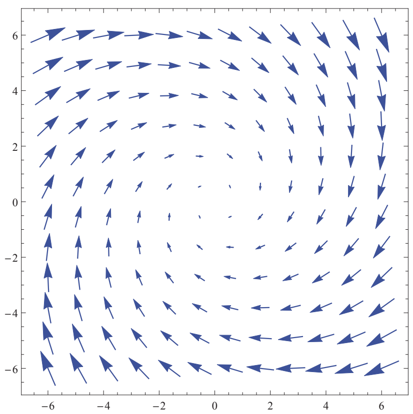
vzhledem k bázi B



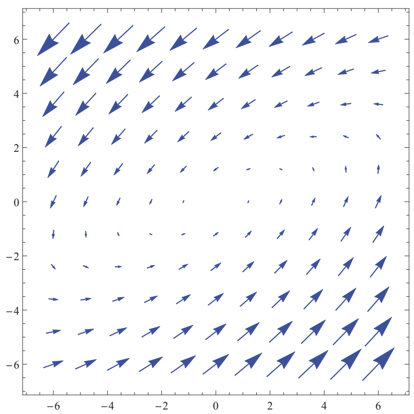
vzhledem ke kanonické bázi K

Grafy nediagonalizovatelných operátorů 2

nediagonalizovatelné reálné operátory bez reálných vlastních čísel s komplexním vlastním číslem λ, $|\lambda| < 1$



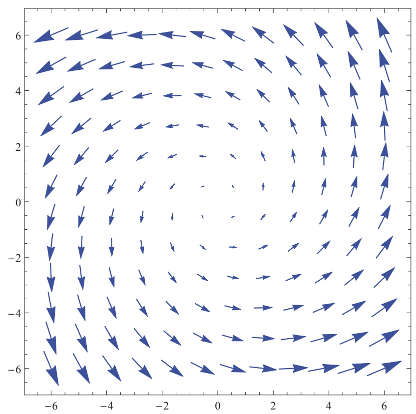
vzhledem k bázi B



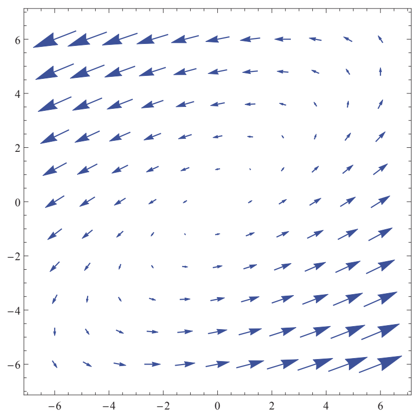
vzhledem ke kanonické bázi K

Grafy nediagonalizovatelných operátorů 3

nediagonalizovatelné reálné operátory bez reálných vlastních čísel s komplexním vlastním číslem λ, $|\lambda| > 1$



vzhledem k bázi B



vzhledem ke kanonické bázi K

Řešení úlohy o poruchovosti systému

ze str. 4-47 (a str. 9-6)

potřebujeme spočítat A^k pro matici $A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$

najdeme vlastní čísla matice A pomocí charakteristického polynomu

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0{,}9-\lambda & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}1-\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - 0,02\lambda + 0,02$$

„uhádneme“ kořen $\lambda_1 = 1$ a dopočteme zbylé dva

$\lambda_2 = i\sqrt{0{,}02} = \sqrt{0{,}02}\,(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$

$\lambda_3 = -i\sqrt{0{,}02} = \sqrt{0{,}02}\,(\cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2)) = r(\cos\phi - i\sin\phi)$

Pokračování poruchovosti

vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je např.
$\mathbf{u} = (45, 5, 1)^T$

dále najdeme vlastní vektor příslušný λ_2, např.
$\mathbf{u}_2 = (-1 - 5i\sqrt{0{,}02}\,,\ 5i\sqrt{0{,}02}\,,\ 1)^T$

a pak víme, že vlastní vektor příslušný $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$ je
$\overline{\mathbf{u}}_2 = (-1 + 5i\sqrt{0{,}02}\,,\ -5i\sqrt{0{,}02}\,,\ 1)^T$

posloupnost $C = (\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \overline{\mathbf{u}}_2)$ je LN (posloupnost nenulových vlastních vektorů příslušných různým vlastním číslům) tj. báze v $\mathbb{C}^3$

opět rozložíme $\mathbf{u}_2$ na reálnou a imaginární část $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$

potom $\mathbf{u}_2 + \overline{\mathbf{u}}_2 = 2\mathbf{v}$ a $= i(\mathbf{u}_2 - \overline{\mathbf{u}}_2) = -2\mathbf{w}$

podobně jako v případě reálných matic řádu 2 bez reálných vlastních čísel dokážeme, že $B = (\mathbf{u}, 2\mathbf{v}, -2\mathbf{w})$ je báze $\mathbb{R}^3$

2. pokračování poruchovosti

podobně jako na str. 9-96 dokážeme, že

$A(2\mathbf{v}) = (\sqrt{0{,}02}\,\cos\pi/2)\,(2\mathbf{v}) + (\sqrt{0{,}02}\,\sin\pi/2)\,(-2\mathbf{w})$

$A(-2\mathbf{w}) = (-\sqrt{0{,}02}\,\sin\pi/2)\,(2\mathbf{v}) + (\sqrt{0{,}02}\,\cos\pi/2)\,(-2\mathbf{w})$

vektory B napíšeme do sloupců $R = \begin{pmatrix} 45 & -2 & -10\sqrt{0{,}02} \\ 5 & 0 & 10\sqrt{0{,}02} \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

potom $AR = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{0{,}02}\cos(\pi/2) & -\sqrt{0{,}02}\sin(\pi/2) \\ 0 & \sqrt{0{,}02}\sin(\pi/2) & \sqrt{0{,}02}\cos(\pi/2) \end{pmatrix}$,

$$A^k = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{0{,}02})^k\cos(k\pi/2) & -(\sqrt{0{,}02})^k\sin(k\pi/2) \\ 0 & (\sqrt{0{,}02})^k\sin(k\pi/2) & (\sqrt{0{,}02})^k\cos(k\pi/2) \end{pmatrix} R^{-1}$$

Dokončení poruchovosti

nyní můžeme spočítat vektor $A^k\mathbf{x}_0 = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

popisující pravděpodobnosti, jaký bude stav systému v čase k

po nějakém počítání vyjde

$$A^k\mathbf{x}_0 = \frac{1}{102} \begin{pmatrix} 90 + (\sqrt{0{,}02})^k\,(\ \ldots\ldots\ ) \\ 10 + (\sqrt{0{,}02})^k\,(\ \ldots\ldots\ ) \\ 2 + (\sqrt{0{,}02})^k\,(\ \ldots\ldots\ ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}888 \\ 0{,}1 \\ 0{,}02 \end{pmatrix}$$

Řešení reálných diferenčních rovnic $f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_{k+1}$

je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ diagonalizovatelný lineární operátor na reálném vektorovém prostoru dimenze n, pak už můžeme plně popsat řešení diskrétního lineárního dynamického systému (diferenční rovnice) $f(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{x}_k$ s počátečním vektorem $\mathbf{x}_0$

- najdeme bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ v $\mathbf{U}$ složenou z vlastních vektorů operátoru f
- potom $[f]^B_B = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$,
- $[\mathbf{x}_k]_B = [f^k]^B_B [\mathbf{x}_0]_B = a_1\lambda_1^k + a_2\lambda_2^k + \cdots + a_n\lambda_n^k$, kde $[\mathbf{x}_0]_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

vlastnosti posloupnosti $\mathbf{x}_k = f^k(\mathbf{x}_0)$ závisí na velikosti absolutních hodnot vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

a na souřadnicích $[\mathbf{x}_0]_B$ počátečního stavu $\mathbf{x}_0$ vzhledem k bázi B

Kvalitativní vlastnosti

1. je-li $|\lambda_i| < 1$ pro každé i, pak $\mathbf{x}_k \to \mathbf{o}$ pro každý počáteční stav $\mathbf{x}_0$
2. je-li $|\lambda_i| > 1$ pro nějaká i, pak $\|\mathbf{x}_k\|$ roste nade všechny meze, pokud $a_i \neq 0$ pro nějaké takové i

   nejrychleji roste v absolutní hodnotě ta souřadnice $\mathbf{x}_k$, pro kterou je $|\lambda_i|$ co největší (a $a_i \neq 0$)
3. pokud $\lambda_i = 1$ pro nějaká i a $|\lambda_j| < 1$ pro všechna ostatní vlastní čísla, pak posloupnost $\mathbf{x}_k$ konverguje k nějakému vektoru $\mathbf{y} \in \mathbf{U}$
4. pokud $\lambda_i = -1$ pro nějaká i a $|\lambda_j| \leq 1$ pro všechna ostatní vlastní čísla, pak posloupnost $\mathbf{x}_k$ osciluje mezi dvěma „limitními“ vektory za předpokladu, že pro aspoň jedno takové i je $a_i \neq 0$

Geometrický pohled na soustavu diferenciálních rovnic

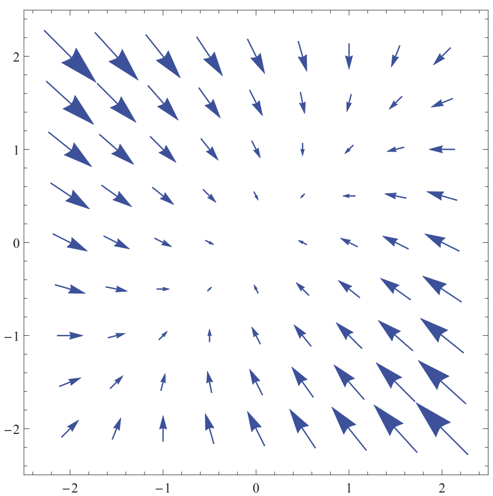
připomňme, že soustava lineárních diferenciálních rovnic o n neznámých je rovnice $\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$ s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}$, kde

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ je vektor neznámých funkcí

$\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)^T$ je vektor jejich derivací

$A = (a_{ij})$ je reálná matice řádu n a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ je vektor počátečních podmínek

Příklad vektorového pole



Příklad

řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s diagonalizovatelnou maticí si ukážeme napřed na příkladu

příklad: vyřešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(t) - 2\,x_2(t) \end{pmatrix}$$

s počáteční podmínkou $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 7$

charakteristický polynom matice soustavy je

$p(\lambda) = (-2-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3$

vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, matice soustavy je diagonalizovatelná

První pokračování příkladu

vlastní vektory příslušné $\lambda_1 = -1$ tvoří lineární obal $\langle (1,1)^T \rangle$

vlastní vektory příslušné $\lambda_1 = -3$ tvoří lineární obal $\langle (1,-1)^T \rangle$

v prostoru $\mathbb{R}^2$ zvolíme bázi $B = ((1,1)^T, (1,-1)^T)$ složenou z vlastních vektorů A

matice $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = [id]^B_K$ je matice přechodu od báze B ke kanonické bázi K v $\mathbb{R}^2$

platí tedy $R^{-1}AR = diag(\lambda_1, \lambda_2)$

pro bod $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ platí $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_K = [id]^B_K\,[\mathbf{x}]_B$

Druhé pokračování příkladu

označíme-li $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, platí $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

pro každé reálné číslo t tak platí

$x_1(t) = y_1(t) + y_2(t)$ a tedy také $x_1'(t) = y_1'(t) + y_2'(t)$

$x_2(t) = y_1(t) - y_2(t)$ a tedy také $x_2'(t) = y_1'(t) - y_2'(t)$

to znamená, že

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = R\,\mathbf{y}'(t)$$

platí tedy $\mathbf{x}(t) = R\,\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{x}'(t) = R\,\mathbf{y}'(t)$, $R^{-1}AR = diag(\lambda_1, \lambda_2)$,

$$\mathbf{y}'(t) = R^{-1}\mathbf{x}'(t) = R^{-1}A\,\mathbf{x}(t) = R^{-1}AR\,\mathbf{y}(t) = diag(\lambda_1, \lambda_2)\,\mathbf{y}(t)$$

Třetí pokračování příkladu

tj. $\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\,y_1(t) \\ \lambda_2\,y_2(t) \end{pmatrix}$

odtud plyne $y_1'(t) = \lambda_1\,y_1(t)$ a $y_2'(t) = \lambda_2\,y_2(t)$ a tedy

$y_1(t) = y_1(0)\,e^{\lambda_1 t} = y_1(0)\,e^{-t}$ a $y_2(t) = y_2(0)\,e^{\lambda_2 t} = y_2(0)\,e^{-3t}$

v rovnosti $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0)\,e^{-t} + y_2(0)\,e^{-3t} \\ y_1(0)\,e^{-t} - y_2(0)\,e^{-3t} \end{pmatrix}$

zbývá zvolit počáteční hodnoty $y_1(0)$ a $y_2(0)$ tak, aby platilo $x_1(0) = 5$ a $x_2(0) = 7$; protože $\mathbf{x}(0) = R\,\mathbf{y}(0)$

znamená to vyřešit soustavu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Dokončení příkladu

zvolíme tedy $y_1(0) = 6$ a $y_2(0) = -1$ a dostaneme tak řešení

$$x_1(t) = 6\,e^{-t} - e^{-3t}$$
$$x_2(t) = 6\,e^{-t} + e^{-3t}$$

obecný postup řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic s diagonalizovatelnou maticí $\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}$

1. najdeme bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ složenou z vlastních vektorů matice A
2. vektory báze B zapíšeme do sloupců matice $R = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_n)$
3. potom platí $A = R\,diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,R^{-1}$ a

   $\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t) = R\,diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,R^{-1}\mathbf{x}(t)$

Obecný postup

4. a $R^{-1}\,\mathbf{x}'(t) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,R^{-1}\mathbf{x}(t)$
5. položíme $\mathbf{y}(t) = R^{-1}\,\mathbf{x}(t)$, potom $\mathbf{y}'(t) = R^{-1}\,\mathbf{x}'(t)$
6. a také $\mathbf{y}'(t) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,\mathbf{y}(t)$
7. tato soustava má řešení $y_i(t) = y_i(0)\,e^{\lambda_i t}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$,

   neboli $\mathbf{y}(t) = diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})\,\mathbf{y}(0)$
8. spočteme počáteční podmínky $\mathbf{y}(0) = R^{-1}\,\mathbf{b} = R^{-1}\,\mathbf{x}(0)$
9. potom $\mathbf{x}(t) = R\,\mathbf{y}(t) = R\,diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})R^{-1}\,\mathbf{x}(0)$

   splňuje rovnici $\mathbf{x}'(t) = R\,\mathbf{y}'(t) = R\,diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,\mathbf{y}(t) = R\,diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,R^{-1}\,\mathbf{x}(t) = A\,\mathbf{x}(t)$
10. a počáteční podmínky $\mathbf{x}(0) = R\,\mathbf{y}(0) = R\,R^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}$

Maticová exponenciální funkce 1

už jsme používali označení $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$; pak

$$\Lambda^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$$

$$\frac{t^k\Lambda^k}{k!} = diag\left(\frac{t^k\lambda_1^k}{k!}, \frac{t^k\lambda_2^k}{k!}, \ldots, \frac{t^k\lambda_n^k}{k!}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k\Lambda^k}{k!} = diag\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k\lambda_1^k}{k!}, \sum_{k=0}^{N}\frac{t^k\lambda_2^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{N}\frac{t^k\lambda_n^k}{k!}\right)$$

$$\downarrow$$

$$diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$$

Maticová exponenciální funkce 2

kromě toho také platí

$$R\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k\Lambda^k}{k!}\right)R^{-1} = \sum_{k=0}^{N}\frac{t^k(R\Lambda^k R^{-1})}{k!} = \sum_{k=0}^{N}\frac{t^k(R\Lambda R^{-1})^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\frac{t^k A^k}{k!} = R\,diag\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k\lambda_1^k}{k!}, \sum_{k=0}^{N}\frac{t^k\lambda_2^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{N}\frac{t^k\lambda_n^k}{k!}\right)R^{-1}$$

definujeme-li $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k A^k}{k!}$

řešení soustavy $\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$ pak můžeme zapsat jako

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\,\mathbf{x}(0)$$

Jordanův kanonický tvar - obsah

- *Jordanův kanonický tvar*
  V dimenzi 2
  Jordanovy buňky
  Operátory s Jordanovým tvarem
  Hledání Jordanových řetízků
  Dimenze 3
  Více než tři dimenze
  Invariantní podprostory
  Cayleyho-Hamiltonova věta

Příklad

z klasifikace lineárních operátorů na prostoru $\mathbb{R}^2$ na str. 9-85 zbývá případ 3.

s reálnou maticí A, která má jedno reálné vlastní číslo s algebraickou násobností 2 a geometrickou násobnosti 1 jsme se už setkali na str. 9-75

nicméně matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ přesto umíme snadno umocňovat:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 3^k & k\,3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \quad \text{pro každé } k \geq 0$$

Jakou bázi budeme hledat

ukážeme, že pro každý nediagonalizovatelný lineární operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na vektorovém prostoru dimenze 2 s jediným vlastním číslem λ algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 1 existuje báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ v $\mathbf{U}$ taková, že

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

co musí taková báze splňovat ?

$$[f(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

to znamená, že

$$f(\mathbf{u}_1) = \lambda\,\mathbf{u}_1, \quad f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 + \lambda\,\mathbf{u}_2$$

Jordanův řetízek délky 2

pomocí operátoru $g = f - \lambda\, id_{\mathbf{U}}$ můžeme podmínky na bázi B formulovat

$$g(\mathbf{u}_1) = \mathbf{o}, \quad g(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$$

schematicky

$$\mathbf{u}_2 \xmapsto{g} \mathbf{u}_1 \xmapsto{g} \mathbf{o}$$

takové posloupnosti vektorů $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ budeme říkat *Jordanův řetízek* délky 2

Lineární nezávislost Jordanova řetízku

tvrzení: je-li $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ Jordanův řetízek délky 2 , a vektor $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$, pak je posloupnost B lineárně nezávislá

důkaz: předpokládejme, že pro skaláry $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{o}$$

použitím lineárního operátoru $g = f - \lambda\, id_{\mathbf{U}}$ dostaneme

$$\mathbf{o} = g(\mathbf{o}) = g(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2) = a_1 g(\mathbf{u}_1) + a_2 g(\mathbf{a}_2) = a_2\mathbf{u}_1$$

protože je $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$, plyne odtud $a_2 = 0$,

dosazením do $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{o}$ pak dostaneme $a_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$

a proto také $a_1 = 0$

Jak Jordanův řetízek najdeme

víme, že musí být $\mathbf{u}_1 \in Ker\,(g) = Ker\,(f - \lambda\, id_{\mathbf{U}}) = M_\lambda$

a současně musí být $\mathbf{u}_1 = g(\mathbf{u}_2) \in Im\,(g)$

zvolíme libovolný nenulový prvek $\mathbf{u}_1 \in Im\, g$

potom nutně také $g(\mathbf{u}_1) \in Im\, g$

protože předpokládáme $\dim(Ker\, g) = 1$ (vlastní číslo λ operátoru f má algebraickou násobnost 2 a geometrickou 1), je $\dim(Im\, g) = 1$ podle věty o dimenzi jádra a obrazu lineárního zobrazení

proto $g(\mathbf{u}_1) = a\mathbf{u}_1$ pro nějaký skalár a

Nalezení Jordanova řetízku

$g(\mathbf{u}_1) = a\mathbf{u}_1$ pro nějaký skalár a znamená, že $(f - \lambda\,\mathbf{u}_1) = a\,\mathbf{u}_1$ a

$$f(\mathbf{u}_1) = (\lambda + a)(\mathbf{u}_1), \quad \text{a} \quad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$$

operátor f má podle předpokladu jediné vlastní číslo λ, proto $a = 0$ a $g(\mathbf{u}_1) = \mathbf{o}$

protože jsme vybrali $\mathbf{u}_1 \in Im\, g$, existuje $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}$, pro které

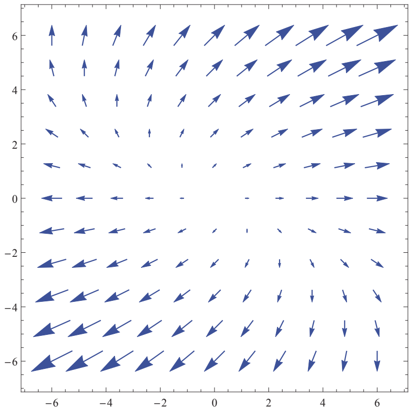
$$g(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$$

tím jsme sestrojili Jordanův řetízek

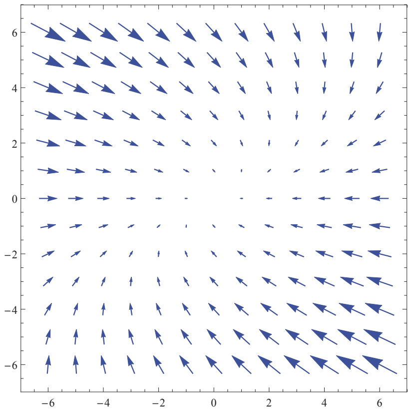
$$\mathbf{u}_2 \xmapsto{\;g\;} \mathbf{u}_1 \xmapsto{\;g\;} \mathbf{o}$$

Grafy nediagonalizovatelných operátorů 4

operátor s jedním reálným vlastním číslem λ



případ $1 < \lambda$



případ $0 < \lambda < 1$

Jordanova buňka

definice: *Jordanova buňka* nad tělesem **T** řádu $k \geq 1$ příslušná prvku $\lambda \in T$ je čtvercová matice

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

příklady Jordanových buněk:

Jordanův kanonický tvar

definice: Matice J nad tělesem **T** je v *Jordanově kanonickém tvaru* (nebo stručněji v *Jordanově tvaru*), pokud J je blokově diagonální matice, jejíž každý diagonální blok je Jordanova buňka (nějakého řádu s nějakým vlastním číslem), tj.

$$J = \mathrm{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \dots, J_{\lambda_s,k_s}) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2,k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_s,k_s} \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in T$ a $k_1, \dots, k_s$ jsou kladná celá čásla. (Nuly v matici v tomto případě značí nulové matice vhodných typů.)

pozorování: každá diagonální matice je v Jordanově tvaru

Další příklad

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je matice v Jordanově kanonickém tvaru

blokově diagonální matice lze mocnit po blocích:

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} J_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s^m \end{pmatrix}$$

Mocniny Jordanových buněk

máme-li umět počítat mocniny matic v Jordanově tvaru, musíme umět počítat mocniny Jordanových buněk

jednoduché to je v případě Jordanových buněk příslušných prvku 0

především si všimneme, že $J_{0,k} = (\mathbf{o}|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\cdots|\mathbf{e}_{k-1})$

tvrzení: pro každá dvě přirozená čísla $m < k$ platí

$$J_{0,k}^m = (\underbrace{\mathbf{o}|\dots|\mathbf{o}}_{m\times}|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_{k-m})$$

pokud $m \geq k$, pak $J_{0,k}^m = 0$

důkaz: pro $m \leq k$ použijeme indukci podle m, případ $m = 1$ je jasný

Dokončení důkazu

je-li $m < k$, indukční předpoklad je

$$J_{0,k}^m = (\underbrace{\mathbf{o}|\dots|\mathbf{o}}_{m\times}|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\cdots|\mathbf{e}_{k-m})$$

pak platí

$$J_{0,k}^{m+1} = J_{0,k}^m\, J_{0,k} = (\underbrace{\mathbf{o}|\dots|\mathbf{o}}_{m\times}|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_{k-m})\,(\mathbf{o}|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\cdots|\mathbf{e}_{k-1})$$

$$= (\underbrace{\mathbf{o}|\dots|\mathbf{o}}_{(m+1)\times}|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_{k-(m+1)})$$

tím je dokázáno také $J_{0,k}^k = 0$

a tedy rovněž $J_{0,k}^m = 0$ pro každé $m > k$

Jordanova buňka jako součet dvou komutujících matic

příklad:

$$J_{0,4}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{0,4}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Jordanovu buňku $J_{\lambda,k}$ můžeme vyjádřit jako součet

$$J_{\lambda,k} = \lambda\, I_k + J_{0,k}$$

první sčítanec $\lambda\, I_k$ komutuje s jakoukoliv maticí B řádu k, neboť

$$(\lambda\, I_k)\, B = \lambda(I_k \cdot B) = \lambda(B\, I_k) = B(\lambda\, I_k)$$

pozorování: pokud pro dvě matice řádu k platí $AB = BA$, pak

$$(A+B)^m = A^m + \binom{m}{1} A^{m-1}B + \binom{m}{2} A^{m-2}B^2 + \cdots + B^m$$

Mocniny Jordanových buněk

následující tvrzení používá dvě konvence

pokud $m < j$, pak $\binom{m}{j} = 0$

je-li t prvek nějakého tělesa $\mathbf{T}$ a i nezáporné celé číslo, pak symbol

$$it \quad \text{označuje} \quad \underbrace{t + t + \cdots + t}_{i\times}$$

tvrzení: pro Jordanovu buňku $J_{\lambda,k}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$J_{\lambda,k}^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \dots & \binom{m}{k-1}\lambda^{m-k+1} \\ 0 & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \dots & \binom{m}{k-2}\lambda^{m-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^m \end{pmatrix}$$

Důkaz

víme, že pro každé nezáporné celé j platí

$$A^j = (\lambda\, I_k)^j = \lambda^j\, I_k$$

dále víme, že pro každé $i = 0, 1, 2, \dots, m$

$$B^i = J_{0,k}^i = (\underbrace{\mathbf{o}|\dots|\mathbf{o}}_{i\times}|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\cdots|\mathbf{e}_{k-m})$$

nakonec si stačí ujasnit, že pro každé $i = 0, 1, 2, \dots, m$ platí

$$A^{m-i}B^i = (\lambda\, I_k)^{m-i}\, J_{0,k}^i = (\underbrace{\mathbf{o}|\dots|\mathbf{o}}_{i\times}|\lambda^{m-i}\mathbf{e}_1|\lambda^{m-i}\mathbf{e}_2|\cdots|\lambda^{m-i}\mathbf{e}_{k-m})$$

a sečíst $\qquad \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (\lambda\, I_k)^{m-i}\, J_{0,k}^i$

Operátory s Jordanovým kanonickým tvarem

matice v Jordanově kanonickém tvaru umíme umocňovat, protože umíme umocňovat diagonální bloky - Jordanovy buňky

definice: říkáme, že pro lineární operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na konečně generovaném vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ *existuje Jordanův kanonický tvar*, pokud existuje báze B v prostoru $\mathbf{U}$ taková, že matice $[f]_B^B$ operátoru f vzhledem k bázi B je v Jordanově kanonickém tvaru

připomňme, že operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je diagonalizovatelný právě když existuje báze B v $\mathbf{U}$ složená z vlastních vektorů operátoru f

najdeme podobnou podmínku, která bude charakterizovat existenci Jordanova kanonického tavru pro operátor f pomocí existence speciální báze v prostoru $\mathbf{U}$

Kdy pro operátor existuje Jordanova buňka ?

napřed prozkoumáme případ, kdy pro operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ existuje Jordanův kanonický tvar sestávající z jediné buňky $J_{\lambda,k}$

k tomu je nutná a stačí existence báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$, pro kterou platí $[f]_B^B = J_{\lambda,k}$

pro tu musí platit

$$[f(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, [f(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \ [f(\mathbf{u}_k)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Jordanův řetízek délky k

co to znamená pro hodnoty f na prvcích báze $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$

$f(\mathbf{u}_1) = \lambda\mathbf{u}_1, f(\mathbf{u}_2) = \lambda\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1, f(\mathbf{u}_3) = \lambda\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2, \dots,$
$f(\mathbf{u}_k) = \lambda\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k-1}$

pomocí operátoru $g = f - \lambda\, id_{\mathbf{U}}$ můžeme posloupnost přepsat jako

$$g(\mathbf{u}_1) = \mathbf{o}, \ g(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1, \ g(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_2 \ , \dots, \ g(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_{k-1}$$

schematicky to vyjádříme

$$\mathbf{u}_k \xmapsto{g} \mathbf{u}_{k-1} \xmapsto{g} \dots \xmapsto{g} \mathbf{u}_3 \xmapsto{g} \mathbf{u}_2 \xmapsto{g} \mathbf{u}_1 \xmapsto{g} \mathbf{o}$$

definice: každou posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ prvků prostoru $\mathbf{U}$, pro kterou platí výše uvedené schéma, budeme nazývat *Jordanův řetízek délky k příslušný prvku $\lambda \in \mathbf{T}$* operátoru f s počátkem $\mathbf{u}_1$

Více o Jordanových řetízcích

je-li prvek $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$, pak je λ vlastní číslo operátoru f a $\mathbf{u}_1$ je nenulový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ

je-li $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$, pak zbývající prvky řetízku $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou někdy nazývány *zobecněné vlastní vektory* operátoru f příslušné vlastnímu číslu λ

tvrzení: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ a $B = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je báze prostoru $\mathbf{U}$, pak $[f]_B^B = J_{\lambda,k}$ platí právě tehdy, když $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je Jordanův řetízek příslušný vlastnímu číslu λ operátoru f

podíváme se, jaká je v tom případě dimenze podprostoru M_λ vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ

Spojení posloupností

platí $[f - \lambda\, id_{\mathbf{U}}]^B_B = [f]^B_B - \lambda[id_U]^B_B = J_{\lambda,k} - \lambda\, I_n = J_{0,k}$

proto $\dim(Ker\,[f - \lambda id_{\mathbf{U}}]^B_B) = 1$, neboť
$\dim(Im\,[f - \lambda id_{\mathbf{U}}]^B_B) = k - 1$; odtud plyne, že

pozorování: $\dim(Ker\,(f - \lambda\, id_{\mathbf{U}})) = \dim M_\lambda = 1$

předchozí tvrzení zobecníme na báze, pro které je matice $[f]^B_B$ v Jordanově kanonickém tvaru

k tomu budeme potřebovat následující jednoduchý pojem

jsou-li $B_1 = (\mathbf{u}^1_1, \ldots, \mathbf{u}^1_{k_1}), \ldots, B_s = (\mathbf{u}^s_1, \ldots, \mathbf{u}^s_{k_s})$ posloupnosti prvků prostoru $\mathbf{U}$, pak posloupnost

$$B = (\mathbf{u}^1_2, \ldots, \mathbf{u}^1_{k_1}, \mathbf{u}^2_1, \ldots, \mathbf{u}^2_{k_2}, \ldots, \mathbf{u}^s_1, \ldots, \mathbf{u}^s_{k_s})$$

budeme nazývat *spojení posloupností* $B_1, B_2, \ldots, B_s$

Operátory, pro které existuje *JKT*

tvrzení: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ a B je báze prostoru $\mathbf{U}$, pak platí $[f]^B_B = \mathrm{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \ldots, J_{\lambda_s,k_s})$ právě tehdy, když B je spojením $B_1, \ldots, B_s$, kde pro každé $i \in \{1, \ldots, s\}$ je B_i Jordanův řetízek délky k_i příslušný nějakému vlastnímu číslu λ_i operátoru f

Důsledek

důsledek: pro lineární operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ existuje Jordanův kanonický tvar právě tehdy, když existuje báze B prostoru $\mathbf{U}$ vzniklá spojením Jordanových řetízků operátoru f

Lineární nezávislost Jordanova řetízku

tvrzení: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ Jordanův řetízek příslušný vlastnímu číslu λ operátoru f, pak je posloupnost $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ lineárně nezávislá

důkaz:

Lineární nezávislost spojení Jordanových řetízků

věta: předpokládáme, že $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je lineární operátor a $B_1, \dots, B_s$ Jordanovy řetízky operátoru f příslušné vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_s$; je-li pro každé $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ posloupnost počátečních vektorů těch řetízků z $B_1, \dots, B_s$, které přísluší vlastnímu číslu λ, lineárně nezávislá, pak také spojení $B = B_1, \dots, B_s$ je lineárně nezávislá posloupnost prvků $\mathbf{U}$

Důkaz v konkrétním případě

Hledání Jordanových řetízků

nyní budeme předpokládat, že pro operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ existuje Jordanův kanonický tvar

to je ekvivalentní existenci báze B prostoru $\mathbf{U}$, která je spojením Jordanových řetízků

ukážeme si postup, jak takovou bázi B najdeme

co lze zjistit z charakteristického polynomu operátoru f ?

ten se rovná charakteristickému polynomu matice $[f]_B^B$

a matice $[f]_B^B = \mathrm{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \dots, J_{\lambda_s,k_s})$

Délky Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu

předpokládejme, že $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r$ a všechna ostatní $\lambda_i \neq \lambda_1$ pro $i > r$

matice $[f]_B^B - \lambda\, I_n$ je horní trojúhelníková a její determinant $\det\left([f]_B^B - \lambda\, I_n\right) = p_f(\lambda)$ se tedy rovná součinu prvků na hlavní diagonále

v tomto součinu se činitel $\lambda_1 - \lambda$ vyskytuje právě $(k_1 + k_2 + \cdots + k_r)$-krát

algebraická násobnost vlastního čísla λ_1 se tedy rovná $k_1 + k_2 + \cdots + k_r$, což je součet délek všech Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu λ_1 v bázi B

toto pozorování platí pro jakékoliv vlastní číslo operátoru f

to znamená, že součet algebraických násobností vlastních čísel operátoru f se rovná dimenzi prostoru $\mathbf{U}$, tj. n

Počet Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu

jaká je geometrická násobnost vlastního čísla λ_1 ?

ta se rovná dimenzi jádra $Ker\,(f - \lambda_1\, id_{\mathbf{U}})$, což je dimenze jádra matice $Ker\,\left([f]_B^B - \lambda_1\, I_n\right)$

v této matici je r nulových řádků, a pokud je vynecháme, dostaneme matici v řádkově odstupňovaném tvaru

hodnost matice $[f]_B^B - \lambda\, I_n$ je tedy $n - r$ a $\dim Ker\,\left([f]_B^B - \lambda_1\, I_n\right) = r$

to znamená, že geometrická násobnost vlastního čísla λ_1 se rovná počtu Jordanových řetízků příslušných tomuto vlastnímu číslu

Délky Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu

délky $k_1, k_2, \ldots, k_r$ Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu λ_1 z charakteristického polynomu operátoru f nepoznáme

čemu se rovná obor hodnot $Im\,(f - \lambda_1 id_{\mathbf{U}})$ operátoru $f - \lambda_1 id_{\mathbf{U}}$?

připomeňme si, že $[Im\,(f - \lambda_1 id_{\mathbf{U}})]_B = Im\,\left([f]_B^B - \lambda_1\, I_n\right)$

v matici $[f]_B^B - \lambda_1\, I_n$ jsou nulové sloupce, odpovídající počátečním vektorům Jordanových řetízků příslušných λ_1

těch je r a protože $\dim Ker\,\left([f]_B^B - \lambda_1\, I_n\right) = r$, jsou všechny ostatní sloupce bázové sloupce matice $[f]_B^B - \lambda\, I_n$ bázové sloupce této matice

to znamená, že obor hodnot operátoru $f - \lambda_1 id_{\mathbf{U}}$ obsahuje všechny prvky Jordanových řetízků $B_1, B_2, \ldots, B_r$ s výjimkou posledních prvků v každém těchto r řetízků

Příklad

předpokládáme, že operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ má bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ složenou ze Jordanových řetízků

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathbf{u}_1 & \xmapsto{f-7id} & \mathbf{o} \\
 & & \mathbf{v}_2 & \xmapsto{f-7id} & \mathbf{v}_1 & \xmapsto{f-7id} & \mathbf{o} \\
\mathbf{w}_3 & \xmapsto{f-7id} & \mathbf{w}_2 & \xmapsto{f-7id} & \mathbf{w}_1 & \xmapsto{f-7id} & \mathbf{o} \\
 & & \mathbf{z}_2 & \xmapsto{f-9id} & \mathbf{z}_1 & \xmapsto{f-9id} & \mathbf{o}
\end{array}
$$

Příklad - 2. část

matice f vzhledem k bázi B

$$
[f]_B^B = \begin{pmatrix}
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9
\end{pmatrix}
$$

charakteristický polynom operátoru f je

$$p_f(\lambda) = (7 - \lambda)^6 (9 - \lambda)^2$$

Příklad - 3. část

$$[f]_B^B - 7\,I_8 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

jádro matice $[f]_B^B - 7\,I_8$ se rovná

$$Ker \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4 \rangle$$

Příklad - 4. část

a tedy jádro $Ker\,(f - 7\,id_{\mathbf{U}}) = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \rangle$

jeho dimenze se rovná geometrické násobnosti vlastního čísla $\lambda = 7$, počet Jordanových řetízků příslušných vlastnímmu číslu f je tedy také 3

jádro $Ker\,(f - 7\,id_{\mathbf{U}}) = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \rangle$ je generováno počátečními vektory těchto řetízků

dále najdeme dimenze jader operátorů $(f - 7\,id_{\mathbf{U}})^2$ a $(f - 7\,id_{\mathbf{U}})^3$ a jejich báze

opět je najdeme pomocí matic těchto operátorů vzhledem k bázi B

Příklad - 5. část

$$\left([f]_B^B - 7\,I_8\right)^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&4&4\\ 0&0&0&0&0&0&0&4 \end{pmatrix}$$

její jádro je

$$Ker \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&4&4\\ 0&0&0&0&0&0&0&4 \end{pmatrix} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5 \rangle$$

a tedy $Ker\,(f - 7\,id_{\mathbf{U}})^2 = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$

Příklad - 6. část

bázi jádra $Ker\,(f - 7\,id_{\mathbf{U}})^2$ tedy tvoří první dva prvky všech Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu $\lambda = 7$

rozdíl $\dim Ker\,(f - 7\,id_{\mathbf{U}})^2 - \dim Ker\,(f - 7\,id_{\mathbf{U}}) = 5 - 3 = 2$

tedy udává, kolik ze Jordanových řetízků příslušných $\lambda = 7$ má délku aspoň 2

jeden ze Jordanových řetízků příslušných $\lambda = 7$ má proto délku 1

podstatné je, že dimenze těchto jader nezávisí na volbě báze B

podobně zjistíme přesný počet Jordanových řetízků délky 2 pomocí $\dim Ker\,(f - 7\,id_{\mathbf{U}})^3$

Příklad - 7. část

$$\left([f]_B^B - 7\,I_8\right)^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&8&12\\ 0&0&0&0&0&0&0&8 \end{pmatrix}$$

$Ker\ \left([f]_B^B - 7\,I_8\right)^3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6 \rangle$

$Ker\,(f - 7\,id_{\mathbf{U}})^3 = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$

bázi tedy tvoří počáteční trojice Jordanových řetízků délky příslušných $\lambda = 7$

Příklad - 8. část

to znamená, že počet Jordanových řetízků délky aspoň 3 příslušných $\lambda = 7$ je

$$\dim Ker\,(f - 7\,id_{\mathbf{U}})^3 - \dim Ker\,(f - 7\,id_{\mathbf{U}})^2 = 6 - 5 = 1$$

a tedy počet řetízků délky přesně 2 je $2 - 1 = 1$

protože $Ker\ \left([f]_B^B - 7\,I_8\right)^4 = Ker\ \left([f]_B^B - 7\,I_8\right)^3$

dostáváme, že počet Jordanových řetízků délky aspoň 4 je 0 a tedy počet řetízků délky přesně 3 je 1

podle věty o dimenzi jádra a obrazu lineárního zobrazení můžeme dimenze jader $Ker\ \left([f]_B^B - 7\,I_8\right)^i$ zjistit pomocí dimenzí obrazů $Im\ \left([f]_B^B - 7\,I_8\right)^i$ operátorů $\left([f]_B^B - 7\,I_8\right)^i$

Příklad - 9. část

ukážeme si, jak dimenze obrazů $Im\ \left([f]_B^B - 7\,I_8\right)^i$ souvisí se Jordanovými řetízky operátoru f

$$Im\ \left([f]_B^B - 7\,I_8\right) = Im \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8 \rangle$$

a tedy $Im\,(f - 7\,id_{\mathbf{u}}) = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$

to znamená že bázi $Im\,(f - 7\,id_{\mathbf{u}}$ dostaneme tak, že z báze B vynecháme koncové prvky všech Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu $\lambda = 7$

Příklad - 10. část

rozdíl $\quad 8 - \dim\,(Im\,(f - 7\,id_{\mathbf{u}}) = \dim \mathbf{U} - \dim\,(Im\,(f - 7\,id_{\mathbf{u}})$
$\quad = \dim\,(Im\,(f - 7\,id_{\mathbf{u}})^0 - \dim\,(Im\,(f - 7\,id_{\mathbf{u}})^1 = 3$

se tedy rovná počtu Jordanových řetízků příslušných $\lambda = 7$

podobně spočítáme, že $Im\ \left([f]_B^B - 7\,I_8\right)^2 = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8 \rangle$

a tedy $Im\,(f - 7\,id_{\mathbf{u}})^2 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$

bázi $Im\,(f - 7\,id_{\mathbf{u}})^2$ dostaneme tak, že z každého Jordanova řetízku příslušného $\lambda = 7$ vynecháme poslední dva prvky

rozdíl $\dim\,(Im\,(f - 7\,id_{\mathbf{u}}) - \dim Im\,(f - 7\,id_{\mathbf{u}})^2 = 2$ tak udává počet Jordanových řetízků příslušných $\lambda = 7$ délky aspoň 2

Shrnutí

je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je operátor na prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n a B báze $\mathbf{U}$ vzniklá spojením Jordanových řetízků operátoru f, pak platí

1. operátor f má n vlastních čísel včetně násobností
2. pro libovolné vlastní číslo λ operátoru f je jeho algebraická násobnost λ rovna součtu délek Jordanových řetízků v B příslušných vlastnímu číslu λ
3. pro libovolné vlastní číslo λ operátoru f a libovolné $l \in \mathbb{N}$ je jádro operátoru $(f - \lambda id)^l$ rovno lineárnímu obalu l počátečních vektorů z každého řetízku v B, který je příslušný vlastnímu číslu λ (z řetízků délky menší než l bereme všechny vektory)
4. pro libovolné vlastní číslo λ operátoru f a libovolné $l \in \mathbb{N}$ je obraz operátoru $(f - \lambda id_{\mathbf{U}})^l$ roven lineárnímu obalu všech vektorů v B kromě l koncových vektorů z řetízků příslušných vlastnímu číslu λ (z řetízků příslušných vlastnímu číslu λ délky menší než l nebereme žádný vektor)

Shrnutí - pokračování

speciálně pro libovolné vlastní číslo λ operátoru f platí

5. geometrická násobnost vlastního čísla λ je rovná počtu řetízků v B příslušných vlastnímu číslu λ a prostor $M_\lambda = Ker\,(f - \lambda id)$ je roven lineárnímu obalu počátečních vektorů těchto řetízků
6. počet řetízků délky alespoň l příslušných vlastnímu číslu λ se rovná
$$m_l = \dim Ker\,(f - \lambda id)^l - \dim Ker\,(f - \lambda id)^{l-1} \ .$$
(aby měl výraz smysl i pro $l = 1$ definujeme $(f - \lambda id)^0 = id$)
7. počet řetízků příslušných vlastnímu číslu λ délky právě l je $m_l - m_{l+1}$

Věta o Jordanově kanonickém tvaru

věta je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na konečně generovaném vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n, pak je ekvivalentní

- pro operátor f existuje Jordanův kanonický tvar
- operátor f (resp. matice A) má n vlastních čísel včetně algebraických násobností

důsledek: pro každý operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na konečně dimenzionálním prostoru $\mathbf{U}$ nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$ existuje Jordanův kanonický tvar.

Hledání Jordanových řetízků pro operátory v dimenzi 3

už jsme si ukázali, jak najít bázi složenou z jednoho Jordanova řetízku v případě operátoru na prostoru dimenze 2, který má jedno vlastní číslo s algebraickou násobností 2 a geometrickou násobností 1

je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na prostoru $\mathbf{U}$ dimenze 3, pro který platí, že součet algebraických násobností jeho vlastních čísel se také rovná 3, existuje pro f Jordanův kanonický tvar

pokud navíc f není diagonalizovatelný, mohou nastat pouze tři možnosti

Možnosti v dimenzi 3

- operátor f má dvě různá vlastní čísla λ_1, λ_2, vlastní číslo λ_1 má algebraickou násobnost 1 a λ_2 má algebraickou dimenzi 2; protože f není diagonalizovatelný, má λ_2 geometrickou násobnost 1; hledáme tedy Jordanovy řetízky

$$\mathbf{u}_1 \xmapsto{f-\lambda_1 id} \mathbf{o}$$
$$\mathbf{v}_2 \xmapsto{f-\lambda_2 id} \mathbf{v}_1 \xmapsto{f-\lambda_2 id} \mathbf{o}$$

- operátor f má jediné vlastní číslo λ, jeho algebraická násobnost je tedy 3 a předpokládáme, že jeho geometrická násobnost je 2; existují tedy dva Jordanovy řetízky příslušné λ, jeden má proto délku 1 a druhý 2

$$\mathbf{u}_1 \xmapsto{f-\lambda id} \mathbf{o}$$
$$\mathbf{v}_2 \xmapsto{f-\lambda id} \mathbf{v}_1 \xmapsto{f-\lambda id} \mathbf{o}$$

Poslední možnost

- zbývá možnost, že jediné vlastní číslo λ operátoru f má geometrickou násobnost 1 (a algebraickou 3); v tomto případě existuje jeden řetízek příslušný λ, který má délku 3

$$\mathbf{u}_3 \xmapsto{f-\lambda id} \mathbf{u}_2 \xmapsto{f-\lambda id} \mathbf{u}_1 \xmapsto{f-\lambda id} \mathbf{o}$$

příklad: zkusíme najít bázi složenou ze Jordanových řetízků pro operátor $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení příkladu

charakteristický polynom operátoru f_A je
$p_A(t) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$

vlastní čísla operátoru A jsou 1 (algebraická násobnost je 2) a -1 (s algebraickou násobností 1), existuje pro něj tudíž Jordanův tvar

prostor vlastních vektorů příslušný $\lambda = 1$ je

$$M_1 = Ker\,(f - id) = Ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

geometrická násobnost vlastního čísla 1 je 1, takže operátor není diagonalizovatelný a Jordanovy řetízky budou tvaru

Řešení příkladu - pokračování

prostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu $\lambda = -1$ je

$$M_{-1} = Ker\,(f + id) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Jordanovy řetízky bydou tvaru

$$\mathbf{u}_1 \xmapsto{f+id} \mathbf{o}$$
$$\mathbf{v}_2 \xmapsto{f-id} \mathbf{v}_1 \xmapsto{f-id} \mathbf{o}$$

za vektor $\mathbf{u}_1$ můžeme zvolit libovolný nenulový vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = -1$, např. $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0)^T$

Řešení příkladu - dokončení

protože geometrická dimenze vlastního čísla $\lambda = 1$ je také 1, můžeme za vektor $\mathbf{v}_1$ zvolit libovolný nenulový vlastní vektor příslušný $\lambda = 1$, např. $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2)^T$

zbývá najít vektor $\mathbf{v}_2$, pro který platí $(f_A - id_{\mathbf{U}})(\mathbf{v}_2) = (A - I_3)(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$

najdeme jej jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

takže můžeme zvolit například $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)^T$

posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je potom lineárně nezávislá (Jordanovy řetízky příslušné různým vlastním číslům s nenulovými začátky) a tedy báze v $\mathbb{R}^3$ vzniklá spojením Jordanových řetízků

Další příklad

budeme hledat Jordanovy řetízky pro operátor $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

charakteristický polynom operátoru je $p_A(\lambda) = -\lambda^3$, operátor má jediné vlastní číslo $\lambda = 0$ s algebraickou násobností 3, pro operátor f_A tedy existuje Jordanova báze

geometrickou násobnost vlastního čísla $\lambda = 0$ zjistíme jako dimenzi prostoru

$$M_0 = Ker\, f_A = Ker\, A = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Další příklad - pokračování

geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda = 0$ je tedy 2, operátor f_A není diagonalizovatelný, Jordanovy řetízky budou dva, oba příslušné 0:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{u}_1 & \xmapsto{f_A} & \mathbf{o} \\ \mathbf{v}_2 & \xmapsto{f_A} & \mathbf{v}_1 & \xmapsto{f_A} & \mathbf{o} \end{array}$$

v tom případě bude $Im\, f_A = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$ a $Ker\, f_A = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$

vektor $\mathbf{v}_1$ proto musí ležet v průniku $(Im\, f_A) \cap (Ker\, f_A) = Im\, f_A$

takový je například vektor $\mathbf{v}_1 = (2, 0, 1)^T$

doplníme jej na bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ jádra $Ker\, f_A$ například vektorem $\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0)^T$

Další příklad - dokončení

nakonec najdeme vektor $\mathbf{v}_2$, pro který platí $f_A(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$

takový musí existovat, protože jsme zvolili $\mathbf{v}_1 \in Im\, f_A$

můžeme zvolit například $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)^T$

oba Jordanovy řetízky spojíme do posloupnosti $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$

protože počátky řetízků $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ tvoří LN posloupnost, je i posloupnost B lineárně nezávislá a tedy báze v $\mathbb{R}^3$

pro matici operátoru f_A vzhledem k bázi B pak platí

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odlišnost dimenzí aspoň 4

v případě dimenzí nejvýše 3 jsme mohli počty a délky Jordanových řetízků příslušných jednotlivým vlastním číslům zjistit pouze pomocí algebraických a geometrických násobností těchto vlastních čísel

pro operátory na prostorech dimenze aspoň 4 už se nám to nemusí podařit

má-li operátor $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jediné vlastní číslo λ s algebraickou násobností 4 a geometrickou násobností 2, může pro něj existovat báze složená buď ze dvou řetízků délky 2 a nebo z jednoho řetízku délky 1 a jednoho řetízku délky 3

jak postupovat v takovém případě si ukážeme na následujícím příkladu

Příklad v dimenzi 4

budeme hledat bázi složenou ze Jordanových řetízků pro operátor $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

charakteristický polynom se rovná $p_f(\lambda) = \lambda^4$, jediné vlastní číslo $\lambda = 0$ má algebraickou násobnost 4

jeho geometrická násobnost se rovná dimenzi prostoru

$$Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Příklad v dimenzi 4 - pokračování

v prostoru $\mathbb{R}^4$ tedy bude existova báze vzniklá spojením dvou Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu $\lambda = 0$, nevíme ale budou-li jejich délky 2+2 nebo 1+3

počet Jordanových řetízků délky aspoň 2 zjistíme pomocí dimenze $Ker\,(f_A - 0 \cdot id\,\lambda)^2 = Ker\,A^2$

protože $A^2 = 0_{4\times 4}$, platí $\dim(f_A - 0\,\lambda)^2 = 4$, což znamená, že počet Jordanových řetízků délky aspoň2 je aspoň $4 - 2 = 2$

hledáme tedy Jordanovy řetízky

$$\mathbf{u}_2 \xmapsto{f_A} \mathbf{u}_1 \xmapsto{f_A} \mathbf{o}$$

$$\mathbf{v}_2 \xmapsto{f_A} \mathbf{v}_1 \xmapsto{f_A} \mathbf{o}$$

Příklad v dimenzi 4 - dokončení

podle souhrnu víme, že $Ker\,f_A = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$ a $Im\,f_A = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$, tj. za vektory $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ můžeme zvolit libovolnou bázi $Ker\,A$, například $\mathbf{u}_1 = (0,1,0,1)^T$ a $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)^T$

pak dopočteme $\mathbf{u}_2$ tak, aby platilo $f_A(\mathbf{u}_2) = A\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$, například $\mathbf{u}_2 = (0,1,0,0)^T$

analogicky najdeme $\mathbf{v}_2$, pro které platí $f_A(\mathbf{v}_2) = A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, například $\mathbf{v}_2 = (1,0,0,0)^T$

posloupnost $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je LN (Jordanovy řetízky s lineárně nezávislou posloupností počátků) a tvoří proto bázi $\mathbb{R}^4$; potom

$$[f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení příkladu ze str. 9-12

postupnou přeměnu tří chemických sloučenin jsme popsali soustavou diferenciálních rovnic

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

s počáteční podmínkou $x(0) = (1,0,0)^T$; matice soustavy je

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

její charakteristický polynom je $p_A(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda)^2$,

vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = -1$ s algebraickou násobností 1 a $\lambda_2 = 0$ s algebraickou násobností 1

Chemické reakce - 1. pokračování

geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda_1 = -1$ je rovna dimenzi

$$Ker\ (A - (-1 \cdot id)) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a je tedy menší než jeho algebaická násobnost, matice A není diagonalizovatelná
geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda_2 = 0$ je nutně také 1 a vlastní vektory matice A příslušné $\lambda_2 = 0$ leží v

$$Ker\,(A - 0 \cdot id) = Ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Chemické reakce - 2. pokračování

existuje tedy báze $\mathbb{R}^3$ složená ze Jordanových řetízků

$$\mathbf{u}_2 \xmapsto{f_A+id} \mathbf{u}_1 \xmapsto{f_A+id} \mathbf{o}$$
$$\mathbf{v}_1 \xmapsto{f_A} \mathbf{o}$$

vektor $\mathbf{u}_1$ je nenulový vlastní vektor A příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1$ a můžeme zvolit například $\mathbf{u}_1 = (0,-1,1)^T$

protože $\mathbf{u}_1 \in Im\,(A + I_3)$, najdeme vektor $\mathbf{u}_2$ takový, že $(A + I_3)(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$, např. $\mathbf{u}_2 = (-1,1,0)^T$

vektor $\mathbf{v}_1$ může být libovolný nenulový vlastní vektor A příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$, např. $\mathbf{v}_1 = (0,0,1)^T$

Chemické reakce - 3. pokračování

označíme $R = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, potom platí

matice R je matice přechodu $[id]^B_K$ od báze $B = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_1)$ ke kanonické bázi K v $\mathbb{R}^3$; potom platí

$$R^{-1}AR = J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

stejně jako v případě soustav obyčejných diferenciálních rovnic s diagonalizovatelnou vyjádříme vektory $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ vzhledem k bázi B

dostaneme $\mathbf{y}(t) = [\mathbf{x}(t)]_B = [id]^K_B \mathbf{x}(t) = R^{-1}\mathbf{x}(t)$

a také $\mathbf{y}'(t) = R^{-1}\mathbf{x}'(t)$

Chemické reakce - 4. pokračování

původní soustavu $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ jsme tak převedli na soustavu

$$\mathbf{y}'(t) = J\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

tu už částečně řešit umíme:

platí $y_3'(t) = 0y_3(t)$ a tedy $y_3(t) = y_3(0)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$

dále $y_2'(t) = (-1)y_2(t)$ a tedy $y_2(t) = y_2(0)e^{-t}$

zbývá spočítat $y_1(t)$, zde víme, že
$y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t) = -y_1(t) + y_2(0)e^{-t}$

nahlédneme, že můžeme zvolit $y_1(t) = y_2(0)t \cdot e^{-t} + c \cdot e^{-t}$

Chemické reakce - 5. pokračování

dosazením $t = 0$ zjistíme, že $c = y_1(0)$

dostáváme tak, že platí

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1t} & te^{-1}t & 0 \\ 0 & e^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$$

a protože $\mathbf{x}(t) = R\mathbf{y}_t$ a $\mathbf{y}(0) = R^{-1}\mathbf{x}(0)$, platí

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

Chemické reakce - dokončení

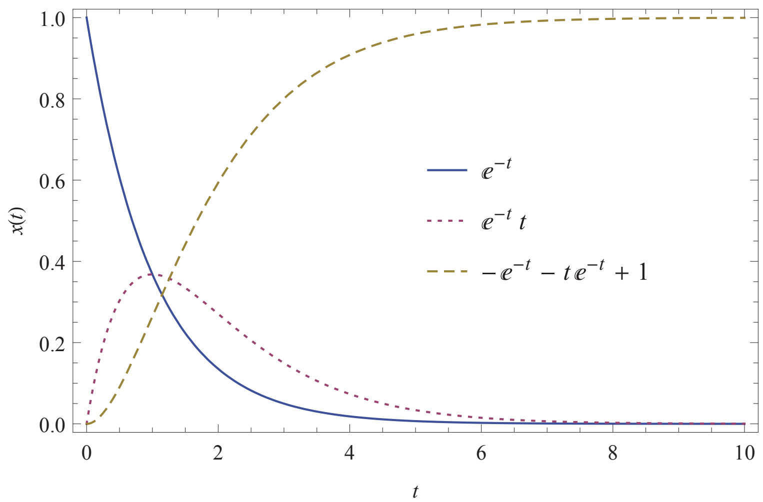
a po dosazení za $\mathbf{y}(t)$ vyjde

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t} - te^{-t} \\ -e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

tj.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \\ -e^{-t} - te^{-t} + 1 \end{pmatrix}$$

Grafy průběhu koncentrací



Definice invariantního podprostoru operátoru

definice: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbf{U}$, pak podprostor $\mathbf{V} \leq \mathbf{U}$ nazýváme *invariantní podprostor perátoru* f, pokud platí pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, že také $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}$

invariantní podprostor čtvercové matice A definujeme jako invariantní podprostor operátoru f_A určeného maticí A

Příklady invariantních podprostorů

každý operátor má dva triviální invariantní podprostory $\{\mathbf{o}\}$ a $\mathbf{V}$.

z geometrického náhledu vidíme, že rotace v $\mathbb{R}^2$ má pouze triviální invariantní podprostory.

osová souměrnost v $\mathbb{R}^2$ podle přímky $\langle \mathbf{v} \rangle$ má kromě triviálních podprostorů ještě dva invariantní podprostory: $\langle \mathbf{v} \rangle$ a $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ (ortogonální doplněk je vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.)

každý podprostor prostoru $\mathbf{U}$ je invariantním podprostorem operátoru $id_{\mathbf{U}}$ a také operátoru $t \cdot id_{\mathbf{U}}$ pro libolný skalár t.

Invariantní podprostory každého operátoru

tvrzení: pro každý lineární operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ jsou následující podprostory $\mathbf{U}$ invariantní podprostory operátoru f:

1. $Ker(f)$
2. $Im(f)$
3. podprostor $\langle \mathbf{u} \rangle$ generovaný libovolným nenulovým vlastním vektorem $\mathbf{u}$ operátoru f,
4. obecněji, podprostor $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ generovaný Jordanovým řetízkem $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ operátoru f příslušným vlastnímu číslu λ

důkaz:

Další invariantní podprostory

tvrzení: Jsou-li $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ dva invariantní podprostory operátoru $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$, pak jsou podprostory $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ a $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ rovněž invariantními podprostory operátoru f

důkaz:

Zúžení operátoru na invariantní podprostor

tvrzení: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na konečně dimenzionálním prostoru $\mathbf{U}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{V} \leq \mathbf{U}$ invariantní podprostor operátoru f, pak charakteristický polynom zúžení $g = f|_V$ operátoru f na podprostor $\mathbf{V}$ dělí charakteristický polynom operátoru f

důkaz:

Vlastní čísla a vlastní vektory

Důsledek

důsledek: předpokládáme, že $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je operátor na prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n a $\mathbf{V}$ je invariantní podprostor operátoru f dimenze k; pokud má operátor f právě n vlastních čísel včetně násobností, pak má operátor $g = f|_V : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ právě k vlastních čísel včetně násobností

důkaz:

Vlastní čísla a vlastní vektory

Příklad

uvažujme operátor $f = f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ určený maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ukážeme, že $\mathbf{W} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (0,1,0)^T, (1,1,2)^T \rangle$ je jeho invariatní podprostor

matice zúžení $g = f|_W$ operátoru f na podprostor $\mathbf{W}$ vzhledem k bázi $C = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je

$$[g]^C_C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jeho charakteristický polynom je $p_g(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Pokračování příkladu

příslušné vlastní podprostory jsou

$$[M_1]_C = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad [M_{-1}]_C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$M_1 = \langle -u + v \rangle = \langle (1,0,2)^T \rangle, \quad M_{-1} = \langle u \rangle = \langle (0,1,0)^T \rangle$$

a matice operátoru g vzhledem k bázi $D = ((1,0,2)^T, (0,1,0)^T)$ podprostoru $\mathbf{W}$ je

$$[g]^D_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

geometricky to znamená:

Důkaz věty o Jordanově kanonickém tvaru

Lineární závislost mezi mocninami matice

je-li A čtvercová matice řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$ pak posloupnost

$$I_n = A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n^2-1}, A^{n^2}$$

obsahuje n^2+1 prvků prostoru $\mathbf{T}^{n\times n}$, který má dimenzi n^2

tato posloupnost tedy musí být lineárně závislá

podobně je pro každý lineární operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na prostoru dimenze n posloupnost

$$id_{\mathbf{U}} = f^0, f^1, f_2, \dots, f^{n^2-1}, f^{n^2}$$

lineárních operátorů na $\mathbf{U}$ lineárně závislá, protože je to posloupnost n^2+1 prvků prostoru $Hom(\mathbf{U},\mathbf{U})$, který má dimenzi n^2 (je isomorfní prostoru $\mathbf{T}^{n\times n}$)

Dosazení matice (operátoru) do polynomu

definice: je-li $\mathbf{T}$ je těleso, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ polynom s koeficienty $a_0, \dots, a_n$ v $\mathbf{T}$, A čtvercová matice řádu k nad $\mathbf{T}$ a f lineární operátor na prostoru $\mathbf{U}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak *dosazením matice A do polynomu $p(t)$* rozumíme matici

$$p(A) = a_0 I_k + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n \quad ,$$

dosazením operátoru f do polynomu $p(t)$ rozumíme operátor

$$p(f) = a_0 id_V + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$$

příklad: reálná matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ má charakteristický polynom $p_A(\lambda) = \lambda_2 - 5\lambda - 2$ a platí

$p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2 =$

Dosazení matice (operátoru) do součinu polynomů

všimněme si ještě, že jsou-li $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ a $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_m t^m$ dva polynomy s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$, pak koeficient u t^k v součinu pq se rovná

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j$$

jaký koeficient bude u mocniny A^k v součinu matic $p(A) \cdot q(A)$?

protože $p(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$
a $q(A) = b_0 + b_1 A + b_2 A^2 + \cdots + b_m A^m$,
je koeficient u A^k v součinu $p(A) \cdot q(A)$ rovný

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Cayleyho-Hamiltonova věta

platí tedy $(pq)(A) = p(A) \cdot q(A)$ pro každou čtvercovou matici A nad $\mathbf{T}$ a libovolné dva polynomy $p(t), q(t)$ s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$

jednoduchou indukcí to můžeme zobecnit na součin libovolného počtu polynomů $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_l(t)$ s koeficienty v $\mathbf{T}$

stejně tak pro libovolný lineární operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ platí také

$$(p_1 p_2 \cdots p_l)(f) = p_1(f) p_2(f) \cdots p_l(f)$$

Cayleyho-Hamiltonova věta: je-li A čtvercová matice řádu n nad $\mathbf{T}$ (resp. je-li f lineární operátor na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$), pak $p_A(A) = 0$ (resp. $p_f(f) = 0$)

Důkaz Cayleyho-Hamiltonovy věty

důkaz: uděláme pouze pro matice

bez důkazu přijmeme fakt (bude dokázaný ve druhém ročníku v přednášce z obecné algebry), že pro každé těleso $\mathbf{T}$ existuje jeho rozšíření takové, že charakteristický polynom matice A má v tom rozšíření n kořenů včetně násobností

budeme předpokládat, že už těleso $\mathbf{T}$ má tuto vlastnost a matice A má tedy v $\mathbf{T}$ vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ s algebraickými násobnostmi $l_1, l_2, \ldots, l_m$, pro které platí $l_1 + l_2 + \cdots + l_m = n$

pro charakteristický polynom $p_A(\lambda)$ tak platí

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{l_m}$$

a také

$$p_A(A) = (-1)^n (A - \lambda_1 I_n)^{l_1} (A - \lambda_2 I_n)^{l_2} \cdots (A - \lambda_m I_n)^{l_m}$$

Důkaz - pokračování

podle věty o Jordanově kanonickém tvaru existuje regulární matice R řádu n taková, že

$$R^{-1} A R = J$$

kde matice J je v Jordanově kanonickém tvaru; potom

$$A^k = R J^k R^{-1}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$

matice $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_l)$ je blokově diagonální, platí proto

$$J^k = \mathrm{diag}(J_1^k, J_2^k, \ldots, J_l^k)$$

Důkaz - druhé pokračování

dále si uvědomíme (připomeneme), že pro každý polynom $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ platí

$$p(RJR^{-1}) = R \cdot p(J) \cdot R^{-1}$$

ukážeme, že $p_A(J) = 0_{n \times n}$; víme už, že

$$p_A(J) = (-1)^n (J - \lambda_1 I_n)^{l_1} (J - \lambda_2 I_n)^{l_2} \cdots (J - \lambda_m I_n)^{l_m}$$

zvolíme libovolný diagonální blok K v matici J, potom $K = J_{\lambda_i, k_i}$ pro nějaké vlastní číslo λ_i a $k_i \leq l_i$ (neboť l_i je součet délek všech Jordanových řetízků operátoru f_A příslušných vlastnímu číslu λ_i)

příslušný blok v matici $J - \lambda_i I_n$ se rovná

$$K - \lambda_i I_n = J_{\lambda_i, k_i} - \lambda_i I_n = J_{0, k_i}$$

Důkaz - dokončení

víme už, že

$$J_{0,k_i}^{l_i} = 0$$

to znamená, že příslušný blok K v mocnině $(J - \lambda_i I_n)^{l_i}$ se rovná $0_{k_i \times k_i}$

proto se také příslušný blok K rovná $0_{k_i \times k_i}$ v součinu

$$(-1)^n (J - \lambda_1 I_n)^{l_1} (J - \lambda_2 I_n)^{l_2} \cdots (J - \lambda_m I_n)^{l_m} = p_A(J)$$

to znamená, že všechny diagonální bloky v $p_A(J)$ se rovnají nulové matici, proto $p_A(J) = 0_{n \times n}$

a tedy také $p_A(A) = p_A(RJR^{-1}) = R \cdot p_A(J) \cdot R^{-1} = 0_{n \times n}$

Řízený diskrétní lineární dynamický systém

máme dán nějaký diskrétní lineární dynamický systém

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k,$$

kde A je reálná matice řádu n

tento lineární dynamický systém můžeme „řídit“

„řízení“ můžeme popsat pomocí jiné reálné matice B řádu n a rovnicí

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k + B\,\mathbf{u}_k$$

matici B si můžeme představit jako *knipl* nebo *joystick*, vektor $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ je jeho nastavení v čase $t = k$, kterým můžeme ovlivnit stav systému $\mathbf{x}_{k+1}$ v následujícím časovém okamžiku $t = k + 1$

Vývoj lineárních dynamických systémů s řízením

budeme ječtě předpokládat, že počáteční stav systému $\mathbf{x}_0 = 0$

možné stavy systému v čase $t = 1$ jsou

$$\mathbf{x}_1 = A\,\mathbf{x}_0 + B\,\mathbf{u}_0 = B\,\mathbf{u}_0, \text{ kde } \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ je libovolný vektor}$$

jeho možné stavy v čase $t = 2$ jsou

$$\mathbf{x}_2 = A\,\mathbf{x}_1 + B\,\mathbf{u}_1 = AB\,\mathbf{u}_0 + B\,\mathbf{u}_1 = AB\mathbf{x}_0 + B\mathbf{u}_1$$

kde $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^n$ jsou libovolné vektory

možné stavy systému v čase $t = 2$ tedy tvoří

$$Im\,(AB|B)$$

Použití Cayleyho-Hamiltonovy věty

pokud předpokládáme indukcí, že možné stavy systému v čase $t = k$ jsou

$$\mathbf{x}_k = A^{k-1}B\mathbf{u}_0 + A^{k-2}B\mathbf{u}_1 + \cdots + AB\mathbf{u}_{k-2} + B\mathbf{u}_{k-1},$$

kde $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ jsou libovolné, pak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\ &= A^kB\mathbf{u}_0 + A^{k-1}B\mathbf{u}_1 + \cdots + A^2B\mathbf{u}_{k-2} + AB\mathbf{u}_{k-1} + B\mathbf{u}_k\end{aligned}$$

tj. dosažitelné stavy systému v čase $t = k + 1$ tvoří sloupcový prostor

$$Im(A^kB|A^{k-1}B|\cdots|AB|B)$$

Cayleyho-Hamiltonova věta říká, že A^n je lineární kombinací posloupnosti matic $A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n$

Použití Cayleyho-Hamiltonovy věty - dokončení

to znamená, že každý sloupec matice A^n je lineární kombinací sloupců matic $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I_n$

a také, že každý soupec matice $A^n B$ je lineární kombinací sloupců matic $A^{n-1}B, A^{n-2}B, \dots, AB, I_n B$

neboli $$Im(A^n B|A^{n-1}B|A^{n-2}B|\cdots|AB|I_n B)$$ $$= Im(A^{n-1}B|A^{n-2}B|\cdots|AB|I_n B)$$

pro každé $k > n$ tak dostáváme

$$Im(A^k B|A^{k-1}B|\cdots|AB|I_n B) = Im(A^{n-1}B|A^{n-2}B|\cdots|AB|I_n B)$$

jinak řečeno, každý stav systému, kterého můžeme někdy v budoucnu dosáhnout, můžeme dosáhnout už v čase $t = n$

Unitární diagonalizovatelnost - obsah

Nevýhody Jordanova kanonického tvaru

základní nevýhodou Jordanova kanonického tvaru je numerická nestabilita

nepatrnou změnou jediného prvku matice A se může zcela změnit struktura Jordanových řetízků operátoru f_A určeného maticí A

příčina spočívá v tom, že v případě tělesa reálných nebo komplexních čísel mohou být vektory báze složené ze Jordanových řetízků „téměř“ rovnoběžné

jaké důsledky má „skoro“ rovnoběžnost řádků nebo sloupců matice A pro stabilitu numerického řešení soustavy lineárních rovnic s maticí A jsme viděli v prvním semestru

diagonalizovatelnost matice A dává jasnou geometrickou představu, jaké jsou mocniny f_A^k operátoru f_A

Následující dvě části

nijak ale nezaručuje, že báze složená z vlastních vektorů matice A je ortogonální, v mnoha případech matic toho ani nelze dosáhnout

v následujících dvou částech kapitoly o vlastních číslech a vektorech se pokusíme Jordanův kanonický tvar „vylepšit“

napřed si ukážeme velkou třídu matic A, pro které existuje *ortonormální báze* složená z vlastních vektorů matice A

a v závěrečné části si ukážeme, jak využít ortogonalitu pro studium operátorů f_A určených libovolnou reálnou nebo komplexní maticí A, která ani nemusí být čtvercová

v poslední části si také vysvětlíme, proč se v grafech lineárních operátorů v této kapitole objevovaly elipsy

Definice unitární diagonalizovatelnosti

definice: je-li $\mathbf{U}$ konečně generovaný vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a f lineární operátor na $\mathbf{U}$, pak říkáme, že f je *unitárně diagonalizovatelný* (resp. *ortogonálně diagonalizovatelný*), pokud existuje ortonormální báze B prostoru $\mathbf{U}$ taková, že $[f]^B_B$ je diagonální

v následující větě uvedeme ekvivalentní definici unitární (ortogonální) diagonalizovatelnosti podobnou ekvivalentním definicím diagonalizovatelnosti operátoru a existence Jordanova kanonického tvaru, které jsme uvedli dříve v této kapitole

Charakterizace unitární diagonalizovatelnosti

věta: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ lineární operátor na konečně generovaném vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ nad tělesem $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), pak jsou následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. operátor f je unitárně diagonalizovatelný (resp. ortogonálně diagonalizovatelný)
2. operátor f
   - má n vlastních čísel včetně algebraických násobností
   - geometrická násobnost každého vlastního čísla operátoru f je rovná jeho algebraické násobnosti
   - pro libovolná dvě vlastní čísla λ_1, λ_2 operátoru f platí $M_{\lambda_1} \perp M_{\lambda_2}$

Důkaz

důkaz 2 $\Rightarrow$ 1: z prvních dvou předpokladů bodu 2. plyne, že operátor f je diagonalizovatelný

v každém z prostorů M_{λ_i} můžeme vybrat ortonormální bázi B_i

spojení těchto bází $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ má $n = \dim \mathbf{U}$ prvků a podle třetího předpokladu je to ortonormální posloupnost v $\mathbf{U}$

je to tedy LN posloupnost a proto báze v $\mathbf{U}$

1 $\Rightarrow$ 2: první dvě vlastnosti v bodu 2. plynou z předpokladu, že f je diagonalizovatelný

je-li B báze taková, že $[f]^B_B$ je diagonální matice, je každý prvek B nenulový vlastní vektor f příslušný nějakému vlastnímu číslu λ_i

Dokončení důkazu

počet vlastních vektorů báze B příslušných λ_i je nejvýše rovný geometrické násobnosti λ_i a ta se rovná algebraické násobnosti l_i vlastního čísla λ_i

protože $n = l_1 + l_2 + \cdots + l_k$ musí se počet vlastních vektorů v bázi B příslušných vlastnímu číslu λ_i rovnat l_i a tedy tyto vlastní vektory generují celý prostor M_{λ_i}

pro $\lambda_i \neq \lambda_j$ jsou oba podprostory generovány různými prvky báze B

protože je báze B ortonormální, z ortogonality množin generátorů plyne ortogonalita jejich lineárních obalů, tj. $M_{\lambda_i} \perp M_{\lambda_j}$ pro $\lambda_i \neq \lambda_j$

Unitární diagonalizovatelnost a ortogonální projekce na přímky

je-li $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze prostoru $\mathbf{U}$, pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ platí

$$[\mathbf{x}]_B = (\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{x} \rangle, \ldots, \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{x} \rangle)^T$$

je-li navíc báze B taková, že $[f]_B^B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ pro nějaký operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$, platí

$$[f(\mathbf{x})]_B = (\lambda_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{x} \rangle, \ldots, \lambda_n \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{x} \rangle)^T$$
$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{x} \rangle \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{x} \rangle \mathbf{v}_n$$

pro každé $i = 1, \ldots, n$ je zobrazení $p_i : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ definované předpisem

$$p_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{x} \rangle \mathbf{v_i}$$

ortogonální projekce prostoru $\mathbf{U}$ na přímku $\langle \mathbf{v}_i \rangle$

To znamená

to znamená, že

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 p_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 p_2(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_n p_n(\mathbf{x})$$

pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, tj.

$$f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_n p_n$$

to znamená, že každý unitárně diagonalizovatelný operátor je lineární kombinací ortogonálních projekcí do navzájem kolmých podprostorů dimenze 1

platí i opačná implikace, tj. že každá lineární kombinace ortogonálních projekcí do navzájem kolmých přímek je unitárně diagonalizovatelný operátor

Transponované a hermitovsky sdružené čtvercové matice

pojem sdruženého lineárního zobrazení zobecňuje pojem transponované, případně hermitovsky sdružené matice

reálná čtvercová matice A řádu n a příslušná transponovaná matice A^T splňují pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vztah

$$A^T\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y}$$

$\cdot$ značí standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$

plyne to z výpočtu $A^T\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (A^T\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y}$

podobně pro komplexní matici A platí

$$A^*\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} \ ,$$

protože $A^*\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (A^*\mathbf{x})^*\mathbf{y} = \mathbf{x}^* A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y}$

Analogie pro lineární zobrazení

věta: jsou-li $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ konečně generované vektorové prostory nad $\mathbb{C}$ (nebo $\mathbb{R}$) se skalárními součiny (které jsou jako obvykle značeny $\langle\,|\,\rangle$) a $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak existuje právě jedno lineární zobrazení $g : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{U}$ platí

$$\langle g(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle$$

důkaz: napřed existence

jak g definujeme:

g je lineární:

Definice sdruženého lineárního zobrazení

důkaz jednoznačnosti

definice: jsou-li $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ konečně generované vektorové prostory nad $\mathbb{C}$ (nebo $\mathbb{R}$) se skalárními součiny a $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak lineární zobrazení $g : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{U}$ platí

$$\langle g(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{y}) \rangle$$

nazýváme *sdružené lineární zobrazení* k f, **označení**: f^*

příklad: $(id_{\mathbf{U}})^* = id_U$, $O^* = O$

Sdružený operátor k operátoru derivování

v případě lineárního zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ mezi prostory, které **nejsou** konečně generované, nemusí sdružené lineární zobrazení k f existovat

nicméně existovat může

příklad: je-li $\mathbf{U}$ prostor všech nekonečně diferencovatelných reálných funkcí reálné proměnné f na intervalu $[0, 1]$ takových, že $f(0) = f(1) = 0$ a $D : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ diferenciální operátor, tj. $D(f) = f'$ pro každou funkci $f \in \mathbf{U}$, pak platí

Matice sdruženého lineárního zobrazení

tvrzení: je-li $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, kde $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou konečně generované komplexní (resp. reálné) vektorové prostory se skalárním součinem, je-li dále B ortonormální báze prostoru $\mathbf{U}$ a C ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$, pak platí

$$[f^*]^C_B = ([f]^B_C)^*$$

důkaz:

Sdružené zobrazení ke zobrazení určenému maticí

tvrzení: pro libovolnou komplexní (resp. reálnou) matici A typu $m \times n$ platí

$$(f_A)^* = f_{A^*} \quad (\text{resp. } \ (f_A)^* = f_{A^T})$$

kde sdružování na levé straně je vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu

důkaz:

Jednoduché vlastnosti sdružování

tvrzení: jsou-li **U**, **V** konečně generované vektorové prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), jsou-li dále $f, g : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení a $a \in \mathbb{C}$ (resp. $a \in \mathbb{R}$), pak platí

1. $f^{**} = f$
2. $(f+g)^* = f^* + g^*$
3. $(af)^* = \overline{a} f^*$
4. $(fg)^* = g^* f^*$
5. je-li f izomorfismus, pak je f^* izomorfismus a platí $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$

důkaz:

Sdružování vlastních čísel

tvrzení: je-li **U** konečně generovaný komplexní (resp. reálný) vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a f je lineární operátor na **U**, pak $\lambda \in \mathbb{C}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{R}$) je vlastní číslo operátoru f právě tehdy, když je $\overline{\lambda}$ (resp. λ) vlastní číslo operátoru f^*

důkaz:

Příklad

příklad: reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla 1 a -2 a příslušné podprostory vlastních čísel $M_1 = \langle (-1,4)^T \rangle$, $M_{-2} = \langle (-1,1)^T \rangle$

transponovaná matice A^T má stejná vlastní čísla a $M_1 = \langle (1,1)^T \rangle$, $M_{-2} = \langle (4,1)^T \rangle$

Definice normálních operátorů a matic

definice: operátor na komplexním (resp. reálném) prostoru **U** se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ se nazývá *normální*, pokud $f^* f = f f^*$

definice: komplexní (resp. reálná) čtvercová matice A se nazývá *normální*, pokud $A^* A = AA^*$ (v reálném případě můžeme psát $A^T A = AA^T$)

snadno nahlédneme, že matice A je normální právě když je normální operátor f_A určený maticí A

příklad: mezi normální matice patří unitární (ortogonální) matice a hermitovské (symetrické) matice

mezi normální operátory patří proto unitární (ortogonální) operátory a hermitovské operátory

Základní vlastnosti normálních operátorů

příklad: reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je normální, protože

$$A^T A = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

matice A není symetrická, antisymetrická, ani ortogonální

skalární násobek normálního operátoru (matice) je opět normální, součet nebo složení (součin) dvou normálních operátorů (matic) normální být nemusí

Další vlastnosti

pokud ale oba operátory (matice) komutují, pak je i jejich součet a složení (součin) normální

ukážeme si pouze speciální případ

tvrzení: je-li f normální operátor na komplexním (reálném) vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ a $t \in \mathbb{C}$ ($t \in \mathbb{R}$), pak je operátor $f - t\,id_{\mathbf{U}}$ také normální

důkaz:

A další vlastnosti

tvrzení: je-li f normální operátor na komplexním (resp. reálném) vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ se skalárním součinem a $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$, pak platí

$$\|f(\mathbf{v})\| = \|f^*(\mathbf{v})\|$$

důkaz:

Vlastní vektory normálních operátorů

tvrzení: je-li f normální operátor na komplexním (resp. reálném) vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ se skalárním součinem, $\lambda \in \mathbb{C}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{R}$) a $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$, pak $\mathbf{v}$ je vlastní vektor operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ právě tehdy, když je $\mathbf{v}$ vlastní vektor operátoru f^* příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$

důkaz:

Spektrální věta pro normální operátory

věta: je-li $\mathbf{U}$ konečně generovaný vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem a f lineární operátor na $\mathbf{U}$ (resp. nechť A je čtvercová matice nad $\mathbb{C}$), pak následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. operátor f (resp. matice A) je normální
2. operátor f (resp. matice A) je unitárně diagonalizovatelný (-á)

důkaz: $2. \Rightarrow 1.$

Důkaz opačné implikace

$1. \Rightarrow 2.$ použijeme matematickou indukci podle $n = \dim \mathbf{U}$

je-li $n = 1$, pak každý operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ je jak unitárně diagonalizovatelný tak normální

je-li $n > 1$, pak indukční předpoklad je, že každý normální operátor na nějakém prostoru dimenze $n-1$ je unitárně diagonalizovatelný

operátor f je definovaný na komplexním prostoru, má tedy aspoň jedno vlastní číslo λ a zvolíme libovolný vlastní vektor $\mathbf{u}_n$ operátoru f příslušný λ a zvolíme jej tak, aby $\|\mathbf{u}_n\| = 1$

ukážeme, že $\mathbf{W} = \mathbf{u}_n^\perp$ je invariantní podprostor operátoru f

Dokončení důkazu opačné implikace

protože $\mathbf{W}$ je ortogonální doplněk prostoru $\langle \mathbf{u}_n \rangle$ dimenze 1, je $\dim \mathbf{W} = n - 1$

použijeme indukční předpoklad na zúžení $f|_W$ operátoru f na podprostor $\mathbf{W}$

podle něho existuje ortonormální báze $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1})$ prostoru $\mathbf{W}$ tvořená vlastními vektory operátoru f

posloupnost $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n)$ je pak také ortonormální, proto také lineárně nezávislá, a tedy báze, složená z vlastních vektorů operátoru f

upozornění: normální reálná matice je tedy unitárně diagonalizovatelná **nad** $\mathbb{C}$, obecně ale nemusí být unitárně diagonalizovatelná nad $\mathbb{R}$

později ukážeme, že reálná matice je unitárně diagonalizovatelná **nad** $\mathbb{R}$ právě když je symetrická

Příklad

příklad: viděli jsme už, že reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je normální; její charakteristický polynom

$$p_A(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 2 = -(t-2)(t^2 - t + 1)$$

má pouze jeden reálný kořen $\lambda = 2$ násobnosti 1, matice A tedy není unitárně diagonalizovatelná nad $\mathbb{R}$

chápejme nyní A jako matici nad $\mathbb{C}$, podle spektrální věty pro normální operátory je matice A unitárně diagonalizovatelná

má tři vlastní čísla

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \ \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Definice hermitovských a symetrických operátorů

důležitým speciálním případem normálních operátorů jsou hermitovské (symetrické v reálném případě) operátory

definice: operátor na komplexním (resp. reálném) prostoru **U** se skalárním součinem se nazývá *hermitovský* (resp. *symetrický*), pokud $f^* = f$

komplexní (resp. reálná) matice A řádu n je hermitovská (resp. symetrická) právě když je operátor f_A na aritmetickém prostoru $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) hermitovský (resp. symetrický) vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu

Spektrální věta pro hermitovské operátory

věta: je-li **U** konečně generovaný vektorový protor nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem a f lineární operátor na **U** (resp. je-li A čtvercová matice nad $\mathbb{C}$), pak je ekvivalentní

1. operátor f (resp. matice A) je hermitovský (-á)
2. operátor f (resp. matice A) je unitárně diagonalizovatelný (-á) a všechna jeho (její) vlastní čísla jsou reálná

důkaz: $1. \Rightarrow 2.$ je-li f hermitovský operátor, je normální

podle spektrální věty pro normální operátory je unitárně diagonalizovatelný

zbývá dokázat, že jeho vlastní čísla jsou reálná

je-li λ vlastní číslo f a $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ vlastní vektor příslušný λ, pak je také příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$ operátoru $f^* = f$; proto $\overline{\lambda} = \lambda$

Důkaz opačné implikace

$2. \Rightarrow 1.$ z předpokladu, že f je unitárně diagonalizovatelný plyne, že existuje báze B v **U** taková, že $[f]^B_B = D$, kde D je diagonální

na hlavní diagonále matice D jsou vlastní čísla operátoru f, to znamená, že D je reálná matice a $D^* = D$

potom platí

$$[f^*]^B_B = \left([f]^B_B\right)^* = D^* = D = [f]^B_B$$

odtud plyne $f^* = f$ a tedy f je hermitovský operátor

Spektrální věta pro symetrické operátory

věta: je-li **U** konečně generovaný vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem a f lineární operátor na **U** (resp. je-li A čtvercová matice nad $\mathbb{R}$), pak je ekvivalentní

1. operátor f (resp. matice A) je symetrický (-á)
2. operátor f (resp. matice A) je ortogonálně diagonalizovatelný (-á)

důkaz: $1. \Rightarrow 2.$ dokážeme maticovou verzi

je-li A reálná symetrická matice, je také hermitovská jako matice nad $\mathbb{C}$

podle spektrální věty pro hermitovské operátory je tedy unitárně diagonalizovatelná nad $\mathbb{C}$ a všechna její vlastní čísla jsou reálná

Dokončení důkazu

proto má n vlastních čísel včetně násobností, algebraická násobnost každého vlastního čísla se rovná jeho geometrické násobnosti a prostory M_λ vlastních vektorů A příslušných různým vlastním číslům λ jsou navzájem ortogonální

pro každé vlastní číslo λ má prostor $M_\lambda = Ker\,(A - \lambda I_n)$ dimenzi (nad $\mathbb{C}$) rovnou geometrické násobnosti čísla λ

řešíme-li soustavu homogenních lineárních rovnic s maticí $A - \lambda I_n$ nad $\mathbb{R}$, bude mít její nulový prostor tutéž dimenzi nad $\mathbb{R}$ jako nad $\mathbb{C}$

proto je také geometrická násobnost vlastního čísla λ matice A nad $\mathbb{R}$ stejná jako nad $\mathbb{C}$

a nakonec kolmost prostorů M_λ pro různá λ nad $\mathbb{R}$ (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) plyne z jejich kolmosti nad $\mathbb{C}$

2. $\Rightarrow$ 1. se dokáže stejně jako v případě důkazu předchozí spektrální věty pro hermitovské operátory

Příklad

pro symetrickou matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

najdeme ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$ složenou z vlastních vektorů matice A

charakteristický polynom $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$, vlastní čísla A jsou 1 a -1

prostory vlastních vektorů jsou

$$M_1 = \langle (1,1,0)^T, (0,0,1)^T \rangle, M_{-1} = \langle (1,-1,0)^T \rangle$$

Pokračování příkladu

v prostoru M_1 je ortonormální báze například $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, kde

$$\mathbf{v_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v prostoru M_{-1} tvoří ortonromální bázi například vektor

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je ortonormální báze prostoru Re^3 složená z vlastních vektorů matice A

Zápis pomocí rozkladu matice

vektory báze B zapíšeme do sloupců matice

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matice Q je ortogonální, proto $Q^{-1} = Q^T$ a

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \mathrm{diag}(1,1,-1)$$

poslední rovnost můžeme také zapsat jako rozklad matice A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Definice pozitivně definitních operátorů

hermitovské (symetrické) operátory mají jednu příjemnou vlastnost

je-li f hermitovský operátor na $\mathbf{U}$, pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ platí

$$\langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle = \langle f^*(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \rangle = \langle f(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle}$$

to znamená, že $\langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle$ je vždy reálné číslo

definice: operátor f na konečně generovaném komplexním (resp. reálném) prostoru $\mathbf{U}$ se skalárním součinem se nazývá

- *pozitivně definitní*, pokud je hermitovský (resp. symetrický) a pro všechna $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbf{U}$ platí $\langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle > 0$
- *pozitivně semidefinitní*, pokud je hermitovský (resp. symetrický) a pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ platí $\langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle \geq 0$

Definice pozitivně (semi)definitních matic

pro matice opět vyjdeme z operátoru určeného maticí a standardního skalárního součinu

definice: čtvercová matice A nad $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) se nazývá

- *pozitivně definitní*, pokud je hermitovská (resp. symetrická) a pro všechna $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) platí $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} > 0$
- *pozitivně semidefinitní*, pokud je hermitovská (resp. symetrická) a $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} \geq 0$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$)

mnoho praktických úloh vede na řešení soustav lineárních rovnic s pozitivně (semi)definitní maticí

Příklad

příklad: pro libovolnou reálnou matici A typu $m \times n$ je matice $A^T A$ symetrická, neboť $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$

pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|^2 \geq 0$$

matice $A^T A$ je pozitivně definitní, má-li soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ pouze nulové řešení, což je právě když $rank(A) = n$, a to je právě když posloupnost sloupcových vektorů A je lineárně nezávislá

podobně pro každou komplexní matici A typu $m \times n$ je matice $A^* A$ nejen hermitovská, je také pozitivně semidefinitní

je navíc pozitivně definitní právě když je posloupnost sloupcových vekterů A lineárně nezávislá

Pozitivně (semi)definitní operátory a vlastní čísla

příklad: pro každou reálnou matici A typu $m \times n$ a diagonální matici $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ přepíšeme součin

$$A^T CA = (DA)^T DA,$$

kde $D = \mathrm{diag}(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \dots, \sqrt{c_n})$. což dokazuje, že také součin $A^T CA$ je pozitivně semidefinitní

pozitivně (semidefinitní) operátory můžeme mezi hermitovskými (symetrickými) operátory poznat podle vlastních čísel

věta: hermitovský (symetrický) operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na komplexním (reálném) vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ se skalárním součinem je pozitivně definitní (resp. semidefinitní) právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla operátoru f kladná (resp. nezáporná)

Důkaz

důkaz $\Rightarrow$: je-li λ vlastní číslo operátoru f a $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ vlastní vektor f příslušný λ, pak

$$\langle \mathbf{v} \,|\, f(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{v} \,|\, \lambda\mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \lambda \|\mathbf{v}\|^2$$

protože $\|\mathbf{v}\| > 0$, je $\lambda > 0$, je-li f pozitivně definitní, a $\lambda \geq 0$, je-li f pozitivně semidefinitní

$\Leftarrow$ protože je f hermitovský, existuje báze B prostoru $\mathbf{U}$ složená z vlastních vektorů operátoru f taková, že

$$[f]_B^B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = D$$

použitím tvrzení o výpočtu skalárního součinu vektorů pomocí jejich souřadnic vzhledem k ortonormální bázi dostaneme pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$

$$\langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle = ([\mathbf{x}]_B)^* \, [f(\mathbf{x})]_B = ([\mathbf{x}]_B)^* \, [f]_B^B [\mathbf{x}]_B = ([\mathbf{x}]_B)^* \, D[\mathbf{x}]_B$$

Dokončení důkazu

označíme-li $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, pak

$$([\mathbf{x}]_B)^* \, D[\mathbf{x}]_B = \lambda_1 |x|_1^2 + \lambda_2 |x|^2 + \cdots + \lambda_n |x_n|^2$$

odtud usoudíme, že (vzhledem k tomu, že $t_i \geq 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$) $\langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, pokud je f pozitivně semidefinitní

a že $\langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle > 0$ pro každé $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pokud je f pozitivně definitní

příklad: reálné symetrické matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Pozitivně semidefinitní operátor z libovolného *LZ*

zobecněním příkladu ze str. 9-239 je následující

tvrzení: jsou-li $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ vektorové prostory se skalárními součiny a $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak je operátor f^*f pozitivně semidefinitní

důkaz: protože $(f^*f)^* = f^* \, (f^*)^* = f^*f$, je operátor f^*f hermitovský

pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ pak platí

$$\langle \mathbf{v} \,|\, f^*f(\mathbf{v}) \rangle = \overline{\langle f^*f(\mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle} = \overline{\langle f(\mathbf{v}) \,|\, f(\mathbf{v}) \rangle} = \|f(\mathbf{v})\|^2 \geq 0$$

Ekvivalentní definice unitárních operátorů

unitární lineární zobrazení jsem definovali už na str. 8-84 a několik různých ekvivalentních definic je na následující str. 8-85

pro operátory $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ uvedeme ještě jednu ekvivalentní definici

tvrzení: operátor f na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ nad $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) je unitární (resp. ortogonální) právě tehdy, když $f^* = f^{-1}$

důkaz $\Rightarrow$: je-li operátor f unitární, je prostý a tedy existuje inverzní operátor f^{-1}; potom platí pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$

$$\left\langle f^{-1}(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{y} \right\rangle = \left\langle ff^{-1}(\mathbf{x}) \,|\, f(\mathbf{y}) \right\rangle = \langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{y}) \rangle$$

a tedy $f^{-1} = f^*$

$\Leftarrow$: platí-li naopak $f^* = f^{-1}$, pak pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ je

$$\|f(\mathbf{x})\| = \sqrt{\langle f(\mathbf{x}) \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle} = \sqrt{\langle f^*f(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \rangle} = \|\mathbf{x}\|,$$

což dokazuje, že zobrazení f je unitární

Charakterizace unitárních operátorů pomocí vlastních čísel

každý unitární operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ je tedy normální, proto je unitárně diagonalizovatelný a můžeme jej mezi normálními operátory charakterizovat pomocí vlastních čísel

věta: je-li $\mathbf{U}$ konečně generovaný vektorový protor nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem a f je lineární operátor na $\mathbb{C}$ (resp. je-li A je čtvercová matice nad $\mathbb{C}$), pak je ekvivalentní

1. operátor f (resp. matice A) je unitární
2. operátor f (resp. matice A) je unitárně diagonalizovatelný (-á) a pro všechna vlastní čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ platí $|\lambda| = 1$

Důkaz

důkaz 1. $\Rightarrow$ 2.: je-li f unitární, je normální a tedy unitárně diagonalizovatelný

pro každé vlastní číslo λ a vlastní vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ příslušný λ platí $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ a z unitárnosti f plyne

$$\|\mathbf{v}\| = \|f(\mathbf{v})\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{v}\|$$

a tedy $|\lambda| = 1$

2. $\Rightarrow$ 1. z předpokladů plyne existence ortonormální báze B v $\mathbf{U}$ taková, že $[f]_B^B = D$, kde $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ a $|\lambda_i| = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$

pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$

pak platí $[f(\mathbf{x})]_B = [f]_B^B[\mathbf{x}]_B = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n)^T$,

kde $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a tedy

Dokončení důkazu

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{x})\|^2 &= ([f(\mathbf{x})]_B)^* \, [f(\mathbf{x})]_B = |\lambda_1|^2|x_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2|x_n|^2 \\ &= ([\mathbf{x}]_B)^* \, [\mathbf{x}]_B = \|\mathbf{x}\|^2,\end{aligned}$$

což dokazuje, že f je unitární

dále budeme zkoumat ortogonální operátory na prostorech $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem

dimenze 2: je-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ortogonální operátor, označíme $A = [f]_K^K$, matice A je reálná ortogonální matice podle tvrzení na str. 8-88

matice A podle téhož tvrzení určuje unitární operátor $f_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ a pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ platí $f(\mathbf{x}) = f_A(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$

protože je f_A unitární operátor, je unitárně diagonalizovatelný (nad $\mathbb{C}$) a všechna vlastní čísla operátoru f_A, tj. vlastní čísla matice A, jsou v absolutní hodnotě rovna 1

Ortogonální operátory v dimenzi 2

buď jsou obě reálná a nebo je to dvojice komplexně sdružených komplexních čísel

existuje ortonormální báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ v $\mathbb{C}^2$ taková, že $[f_A]_B^B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$

nastane proto jedna z následujících možností

- obě vlastní čísla jsou rovna 1, prvky báze B můžeme vybrat v $\mathbb{R}^2$ a operátor f je identický
- obě vlastní čísla jsou rovna -1, operátor f je středová symetrie se středem v počátku
- jedno vlastní číslo je 1 a druhé -1, operátor f je v tom případě osová symetrie s osou generovanou nenulovým vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 1
- komplexně sdružená různá vlastní čísla $\lambda_1 = \cos\phi + i\sin\phi$ a $\lambda_2 = \overline{\lambda} = \cos\phi - i\sin\phi$

Ortogonální operátory v dimenzi 2 – pokračování

je-li $\mathbf{v}_1 = (a+bi, c+di)$ vlastní vektor f_A příslušný λ_1, pak už víme (str. 9-94 a následující), že $\overline{\mathbf{v}}_1 = (a-bi, c-di)$ je vlastní vektor f_A příslušný $\overline{\lambda}$

víme odtud také, že reálné vektory $\mathbf{w}_1 = 2\,Re\,\mathbf{v}_1 = 2(a,c)$ a $\mathbf{w}_2 = -2\,Im\,\mathbf{v}_1 = -2(b,d)$ tvoří bázi $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ prostoru $\mathbb{R}^2$ a matice

$$[f]_C^C = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

protože je operátor f_A unitárně diagonalizovatelný, jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\overline{\mathbf{v}}_1$ ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu, tj.

$$\mathbf{v}_1^*\overline{\mathbf{v}}_1 = (a-ib, c-id)\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix} = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - 2i(ab+cd) = 0$$

Ortogonální operátory v dimenzi 2 – dokončení

proto $ab + cd = 0$, odkud plyne kolmost vektorů $\mathbf{w}_1 \perp \mathbf{w}_2$

posloupnost C je proto ortogonální báze $\mathbb{R}^2$

dále $\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{b^2+d^2} = \|\mathbf{w}_2\|$, báze $D = (\mathbf{w}_1/\|\mathbf{w}_1\|, \mathbf{w}_2/\|\mathbf{w}_2\|)$ v $\mathbb{R}^2$ je proto ortonormální a

$$[f]_D^D = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

protože středová symetrie je rotace o úhel π a identické zobrazení je rotace o úhel 0, můžeme výsledky o ortogonálních operátorech v $\mathbb{R}^2$ shrnout

tvrzení: každé ortogonální zobrazení f v prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem je buď rotace nebo reflexe, rotace je to právě když $\det[f]_B^B = 1$ a reflexe je to právě když $\det[f]_B^B = -1$, kde B je libovolná báze $\mathbb{R}^2$

Ortogonální operátory v dimenzi 3

protože složení dvou ortogonálních (unitárních zobrazení) je opět ortogonální (unitární), s použitím věty o součinu determinantů dostáváme

důsledek: složení dvou rotací v $\mathbb{R}^2$ je opět rotace, složení dvou reflexí je rotace a složení rotace s reflexí (v libovolném pořadí) je opět nějaká reflexe

dimenze 3: nyní předpokládáme, že $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je ortogonální operátor a $[f]_K^K = A$

reálná matice A určuje unitární operátor f_A na prostoru $\mathbb{C}^3$

podle charakterizace unitárních operátorů je f_A unitárně diagonalizovatelný, tj. existuje ON báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ prostoru $\mathbb{C}^3$ složená z vlastních vektorů operátoru f_A, tj. matice A, a navíc všechna vlastní čísla f_A mají absolutní hodnotu rovnou 1

Ortogonální operátory v dimenzi 3 – pokračování

charakteristický polynom $p_A(\lambda)$ je polynom stupně 3 s reálnými koeficienty

operátor f_A má tedy buď tři reálná vlastní čísla (rovná ± 1) nebo jedno reálné vlastní číslo λ a dvě komplexně sdružená komplexní vlastní čísla $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ a $e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$

napřed se vypořádáme s případem jednoho reálného vlastního čísla λ, můžeme předpokládat, že $\mathbf{v}_1$ je vlastní vektor f_A příslušný λ, ten můžeme zvolit také reálný

podprostor $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle \subseteq \mathbb{C}^3$ je invariantní podprostor operátoru f_A

zúžení operátoru f_A na podprostor $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ je unitární operátor s vlastními čísly $e^{i\phi}$ a $e^{-i\phi}$

Ortogonální operátory v dimenzi 3 – druhé pokračování

z popisu ortogonálních operátorů na $\mathbb{R}^2$ víme, že $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ sestává z reálných vektorů a je ortogonální báze $\mathbb{C}^2$, a $(\mathbf{w}_1/\|\mathbf{w}_1\|, \mathbf{w}_2/\|\mathbf{w}_1\|)$ je *ON* báze v $\mathbb{C}_2$ taková, že matice zúžení f_A na podprostor $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\rangle$ vzhledem k této bázi se rovná

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

posloupnost $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1/\|\mathbf{w}_1\|, \mathbf{w}_2/\|\mathbf{w}_1\|)$ sestává s reálných vektorů, je *ON* báze v $\mathbb{C}^3$ a proto také v $\mathbb{R}^3$, pro kterou v případě, že $\lambda = 1$ platí

$$[f]^D_D = [f_A]^D_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Ortogonální operátory v dimenzi 3 – třetí pokračování

operátor f je tedy rotace kolem osy $\langle \mathbf{v}_1\rangle$ o úhel ϕ

je-li $\lambda = -1$, platí

$$[f]^B_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

protože

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

je f složením rotace kolem osy $\langle \mathbf{v}_1\rangle$ s reflexí vzhledem k rovině $\{\mathbf{v}_1\}^\perp$

Ortogonální operátory v dimenzi 3 – čtvrté pokračování

jsou-li všechna vlastní čísla operátoru f_A reálná, můžeme zvolit ortonormální bázi B v $\mathbb{C}^3$ složenou z reálných vektorů a matice $[f]^B_B = [f_A]^B_B$ má (až na pořadí prvků na hlavní diagonále) jeden z tvarů

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

v prvním případě jde o identické zobrazení (tj. rotaci o úhel 0 kolem jakékoliv osy), ve druhém případě jde o zrcadlení vzhledem k rovině $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \{\mathbf{v}_3\}^\perp$, ve třetím případě jde o rotaci kolem osy $\langle \mathbf{v}_1\rangle$ o úhel π a ve čtvrtém případě jde o složení této rotace se zrcadlením určeným rovinou $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\rangle$

Ortogonální operátory v dimenzi 3 – dokončení

dokázali jsme tak

tvrzení: každé ortogonální zobrazení v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ je buď rotace kolem nějaké osy, ortogonální reflexe vzhledem k nějaké rovině a nebo složení rotace s ortogonální reflexí

rotace je to právě tehdy, když determinant matice tohoto zobrazení vzhledem k jakékoliv bázi je rovný 1

důsledek: složení dvou rotací v $\mathbb{R}^3$ je zase rotace v $\mathbb{R}^3$, složení dvou reflexí je rotace (osa rotace je rovná průniku rovin reflexí)

Singulární rozklad - obsah

- *Singulární rozklad*
  Příklad singulárního rozkladu
  Věta o singulárním rozkladu
  Singulární rozklad matice
  Různá použití singulárního rozkladu

Zobrazení určené diagonální maticí

podíváme se na lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené maticí

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

je-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ prvek jednotkové kružnice v $\mathbb{R}^2$,
tj. $\|\mathbf{x}\| = x_1^2 + x_2^2 = 1$, pak jeho obraz

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f_A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{pmatrix}$$

splňuje rovnici

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = x_1^2 + x_2^2 = 1$$

vektor $\mathbf{y} = f_A(\mathbf{x})$ tedy leží na elipse s délkami poloos $|a|$ a $|b|$

poloosy jsou ve směrech vektorů $\mathbf{e}_1$ (délka $|a|$) a $\mathbf{e}_2$ (délka $|b|$)

Zobecněný elipsoid

definice: jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ reálná čísla a
$B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *ON* báze v prostoru $\mathbf{U}$ se skalárním součinem,
pak množinu všech vektorů $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ jejichž souřadnice
$[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ splňují

$$\frac{|x_1|^2}{a_1^2} + \frac{|x_2|^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{|x_n|^2}{a_n^2} \leq 1$$

nazýváme *zobecněný elipsoid* v $\mathbf{U}$, čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou *délky poloos* elipsoidu, vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou *směry poloos*

příklad: podíváme se na zobrazení $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené maticí

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4\sqrt{6} + \sqrt{2} & 4\sqrt{6} - \sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} - \sqrt{6} & 4\sqrt{2} + \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

matici A můžeme vyjádřit jako součin tří matic

Geometrické vyjádření

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

geometricky:

Algebraický zápis

rozklad matice A zapíšeme ve tvaru $A = U\Sigma V^T$, kde $\Sigma = \mathrm{diag}(2, 1/2)$ a

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

jsou ortogonální matice; platí proto také $V^T = V^{-1}$

pro sloupce matic $U = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2)$ a $V = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2)$ platí

$$f_A(\mathbf{v}_1) = A\,\mathbf{v}_1 = U\Sigma V^T\,\mathbf{v}_1 = 2\,\mathbf{u}_1$$

$$f_A(\mathbf{v}_2) = A\,\mathbf{v}_2 = U\Sigma V^T\,\mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{u}_2$$

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ a $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ jsou ON báze v $\mathbb{R}^2$

vektor $\mathbf{v}_i$ se zobrazením f_A zobrazí do směru vektoru $\mathbf{u}_i$ s koeficientem σ_i, kde σ_i je prvek na místě (i,i) diagonální matice Σ

Obdélníkové diagonální matice

ukážeme, že uvedeným způsobem lze rozložit jakoukoliv reálnou nebo komplexní matici

nejdříve zobecníme pojem diagonální matice na matice libovolného obdélníkového typu

definice: říkáme, že matice $D = (d_{ij})$ typu $m \times n$ je *obdélníková diagonální matice*, pokud $d_{ij} = 0$ kdykoliv $i \neq j$ (kde $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$)

obdélníkovou diagonální matici budeme zapisovat $D = \mathrm{diag}(d_{11}, \ldots, d_{rr})$ nebo podrobněji

$$D = \mathrm{diag}_{m\times n}(d_{11}, \ldots, d_{rr})$$

je-li $r < \min(m, n)$, rozumí se, že zbylé diagonální prvky $d_{kk} = 0$ pro $k > r$

Příprava

je-li A reálná (nebo komplexní) matice typu $m \times n$ a $A = U\Sigma V^T$ pro ortogonální (nebo unitární) matice $V = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\ldots|\mathbf{v}_n)$, $U = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\ldots|\mathbf{u}_m)$ a obdélníkovou diagonální matici $\Sigma = \mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ s nezápornými reálnými čísly σ_i na hlavní diagonále, pak platí

$$A\,\mathbf{v}_i = \sigma_i\,\mathbf{u}_i \;\text{ pro }\; i = 1, 2, \ldots, r, \quad A\,\mathbf{v}_i = \mathbf{o} \;\text{ pro }\; i > r$$

posloupnosti $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ a $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m)$ jsou ON báze v $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^m$ (nebo $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$), pro které

$$[f_A]^B_C = \mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$$

zobrazení $(f_A)^* f_A$ je pozitivně semidefinitní a

$$[(f_A)^* f_A]^B_B = [(f_A)^*]^C_B\,[f_A]^B_C = \Sigma^*\,\Sigma = \mathrm{diag}_{n\times n}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2)$$

Singulární rozklad

věta o singulárním rozkladu: jsou-li $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U}$ konečně generované komplexní nebo reálné vektorové prostory se skalárním součinem a $f : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineární zobrazení, pak existují ON báze B prostoru $\mathbf{V}$ a ON báze C prostoru $\mathbf{U}$ takové, že $[f]^B_C$ je obdélníková diagonální matice s nezápornými prvky na hlavní diagonále

důkaz: označíme $n = \dim \mathbf{V}$ a $m = \dim \mathbf{U}$

operátor $f^*f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je pozitivně semidefinitní a podle spektrální věty pro hermitovské (symetrické v reálném případě) operátory existuje ON báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ve $\mathbf{V}$ taková, že $[f^*f]^B_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ a $\lambda_i \geq 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$

nechť r z vlastních čísel λ_i je nenulových a uspořádáme je podle velikosti

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$$

Pokračování důkazu

pro $i \in \{1,\dots,r\}$ označíme $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ a $\mathbf{u}_i = \sigma_i^{-1} f(\mathbf{v}_i)$

pak pro libovolná $i,j \in \{1,\dots,r\}$, platí

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j \rangle &= \left\langle \sigma_i^{-1} f(\mathbf{v}_i) \middle| \sigma_j^{-1} f(\mathbf{v}_j) \right\rangle = \sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1} \langle f(\mathbf{v}_i) | f(\mathbf{v}_j) \rangle \\ &= \sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1} \langle f^* f(\mathbf{v}_i) | \mathbf{v}_j \rangle = \sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1} \lambda_i \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}\end{aligned}$$

z toho vyplývá, že pro $i \neq j$ jsou vektory $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \in \mathbf{U}$ na sebe kolmé

navíc $\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_i \rangle = \sigma_i^{-2}\lambda_i = 1$, takže $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ pro každé $i = 1,2,\dots,r$

můžeme tedy posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r)$ doplnit na ortonormální bázi $C = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ prostoru $\mathbf{U}$

Dokončení důkazu

pro $i \in \{1,\dots,r\}$ je $f(\mathbf{v}_i) = \sigma_i \mathbf{u}_i$, neboli $[f(\mathbf{v}_i)]_C = \sigma_i \mathbf{e}_i$

pro $i > r$ je $[f(\mathbf{v}_i)]_C = \mathbf{o}$, proto

$$[f]^B_C = \mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$$

protože $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2$ jsou všechna nenulová vlastní čísla operátoru $f^* f$ včetně algebraických násobností, jsou určena operátorem f jednoznačně

báze B a C operátorem f jednoznačně určené nejsou

definice: platí-li pro operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ a *ON* báze B ve $\mathbf{V}$ a C v $\mathbf{U}$, že $[f]^B_C = \mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, kde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, pak čísla $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ nazýváme *singulární hodnoty* operátoru f

Geometrický význam prvků bází B, C

je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$, $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ *ON* báze ve $\mathbf{V}$, $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$ *ON* báze v $\mathbf{U}$ a

$$[f]^B_C = \mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$$

pak $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ jsou všechny nenulové singulární hodnoty f a

$$f(\mathbf{v}_i) = \sigma_i \mathbf{u}_i \quad \text{pro} \quad i = 1,2,\dots,r, \qquad f(\mathbf{v}_i) = 0 \quad \text{pro} \quad i > r$$

to znamená, že

$$Im\, f = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \rangle \quad \text{a tedy} \quad \dim(Im\, f) = r$$

a dále to znamená, že

$$\dim(Ker\, f) = n - r \quad \text{a tedy} \quad Ker\, f = \langle \mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

Geometrický význam singulárního rozkladu 1

platí $[f(\mathbf{x})]_C = [f]^B_C [\mathbf{x}]_B$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

je-li $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, pak

$$[f(\mathbf{x})]_C = [f]^B_C [\mathbf{x}]_B = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T = (\underbrace{\sigma_1 x_1, \sigma_2 x_2, \dots, \sigma_r x_r, 0, \dots, 0}_{m \text{ složek}})^T$$

vektor $\mathbf{x}$ je prvek jednotkové koule ve $\mathbf{V}$ právě když

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$$

pak pro souřadnice $[f(\mathbf{x})]_C = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ platí

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{y_r^2}{\sigma_r^2} \leq 1$$

Geometrický význam singulárního rozkladu 2

to znamená, že

- obraz jednotkové koule ve $\mathbf{V}$ je zobecněný elipsoid v podprostoru $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle \leq \mathbf{U}$
- singulární hodnoty $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ jsou délky poloos tohoto elipsoidu
- $\mathbf{u}_i$ je směr poloosy délky σ_i
- $\mathbf{v}_i$ je vektor prostoru $\mathbf{V}$, který se zobrazením f zobrazí do směru $\mathbf{u}_i$ poloosy délky σ_i
- hodnotu $f(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sigma_1 x_1 \mathbf{u}_1 + \sigma_2 x_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \sigma_r x_r \mathbf{u}_r \\ &= \sigma_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_1 + \sigma_2 \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_2 + \cdots + \sigma_r \langle \mathbf{v}_r | \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_r \end{aligned}$$

Unitární diagonalizace a singulární rozklad 1

je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ operátor na konečně generovaném prostoru se $\langle\,|\,\rangle$, pak je normální právě když existuje *ON* báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ve $\mathbf{V}$, pro kterou platí $[f]_B^B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

singulární hodnoty lineárního zobrazení f jsou druhé odmocniny nenulových vlastních čísel operátoru $f^* f$:

$$\begin{aligned} [f^* f]_B^B &= [f^*]_B^B [f]_B^B = \mathrm{diag}(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n)\, \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ &= \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2) \end{aligned}$$

poznámka: singulární hodnoty normálního operátoru $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ se rovnají absolutním hodnotám jeho nenulových vlastních čísel

z diagonalizace $[f]_B^B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ normálního operátoru f také dostaneme snadno jeho singulární rozklad

Unitární diagonalizace a singulární rozklad 2

budeme předpokládat, že vlastní čísla normálního operátoru f jsou již uspořádaná podle velikosti jejich absolutních hodnot, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jsou nenulová

je-li λ_i nenulové vlastní číslo operátoru f, pak položíme $\mathbf{u}_i = (\lambda_i / |\lambda_i|) \mathbf{v}_i$

posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r)$ je *ON* a můžeme ji proto doplnit do *ON* báze $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru $\mathbf{V}$

potom $[f]_C^B = \mathrm{diag}_{n \times n}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_r|)$ je singulární rozklad f

v případě pozitivně definitního operátoru f diagonalizace a singulární rozklad splývají

Singulární rozklad matice

v praxi se singulární rozklad nejčastěji používá v podobě singulárního rozkladu matice

věta o singulárním rozkladu matice: je-li A komplexní (resp. reálná) matice typu $m \times n$, pak existují unitární (resp. ortogonální) matice U řádu m a V řádu n a obdélníková diagonální matice $\Sigma = \mathrm{diag}_{m \times n} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ takové, že

$$A = U \Sigma V^* = U \Sigma V^{-1}$$

důkaz: dokážeme komplexní případ pomocí singulárního rozkladu zobrazení $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, kde v obou prostorech $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^m$ uvažujeme standardní skalární součin

existují *ON* báze B v $\mathbb{C}^n$ a C v $\mathbb{C}^m$ takové, že

$$[f_A]_C^B = \Sigma = \mathrm{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$$

Dokončení důkazu

vektory báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ napíšeme do sloupců matice

$$V = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\cdots|\mathbf{v}_n) = [id]^B_{K_n}$$

a prvky báze $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m)$ do sloupců matice

$$U = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_m) = [id]^C_{K_m}$$

potom $\quad A = [f]^{K_n}_{K_m} = [id]^C_{K_m}\,[f]^B_C\,[id]^{K_n}_B = U\,\Sigma\,V^*$

všimněme si, že singulární rozklad $A = U\,\Sigma\,V^*$ v sobě obsahuje báze všech čtyř základních prostorů určených maticí A

prvních r sloupců $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_r)$ matice U tvoří bázi $Im\,(f_A) = Im\,A$; proto je $(\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m)$ báze $(Im\,A)^\perp = Ker\,A^T$

analogicky posloupnost $(\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ tvoří bázi $Ker\,f_A = Ker\,A$ a proto prvních r sloupců $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ matice $\mathbf{V}$ tvoří bázi $(Ker\,A)^\perp = Im\,A^T$

Příklad

najdeme singulární rozklad reálné matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(= J_{1,2})$

spočteme matici $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ta má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$

singulární hodnoty matice A jsou $\sigma_{1,2} = \sqrt{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$

přibližně $\sigma_1 \approx 1{,}618, \quad \sigma_2 \approx 0{,}618$

vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ najdeme jako normalizované vlastní vektory matice $A^T A$ příslušné vlastním číslům λ_1, λ_2

opět přibližně $\mathbf{v}_1 \approx \begin{pmatrix} 0{,}526 \\ 0{,}851 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 \approx \begin{pmatrix} -0{,}851 \\ 0{,}526 \end{pmatrix}$

Dokončení příkladu

vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ báze $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ najdeme ze vztahu $\mathbf{u}_i = \sigma_i^{-1} f_A(\mathbf{v}_i) = \sigma_i^{-1} A\,\mathbf{v}_i$

přibližně $\mathbf{u}_1 \approx \begin{pmatrix} 0{,}851 \\ 0{,}526 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}526 \\ 0{,}851 \end{pmatrix}$

označíme $V = [id]^B_K$ a $U = [id]^C_K$, potom

$$\Sigma = [f]^B_C = \begin{pmatrix} 1{,}618 & 0 \\ 0 & 0{,}618 \end{pmatrix}$$

a singulární rozklad $A = U \Sigma\, V^T$ matice A je přibližně

$$A \approx \begin{pmatrix} 0{,}851 & -0{,}526 \\ 0{,}526 & 0{,}851 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}618 & 0 \\ 0 & 0{,}618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}526 & 0{,}851 \\ -0{,}851 & 0{,}526 \end{pmatrix}$$

matice V^T je matice otočení o přibližně $-58{,}28°$,

matice U je matice otočení o úhel přibližně $31{,}72°$

Další příklad

najdeme singulární rozklad matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

matice $A^T A = \begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla

přibližně $\lambda_1 \approx 90{,}7$, $\lambda_2 \approx 0{,}265$

vlastní vektory $\mathbf{v}_1 \approx \begin{pmatrix} 0{,}620 \\ 0{,}785 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}785 \\ -0{,}620 \end{pmatrix}$

singulární hodnoty matice A jsou

$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \approx 9{,}53$ a $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx 0{,}514$

pak $\mathbf{u}_1 = \sigma_1^{-1} A\mathbf{v}_1 \approx \begin{pmatrix} 0{,}229 \\ 0{,}524 \\ 0{,}816 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \sigma_2^{-1} A\mathbf{v}_2 \approx \begin{pmatrix} 0{,}895 \\ 0{,}272 \\ -0{,}350 \end{pmatrix}$

Dokončení dalšího příkladu

posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ doplníme do *ON* báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ vektorem $\mathbf{u}_3 = (?, ?, ?)^T$

singulární rozklad matice A je potom

$$A \approx \begin{pmatrix} 0{,}229 & 0{,}895 & ? \\ 0{,}524 & 0{,}272 & ? \\ 0{,}816 & -0{,}350 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9{,}53 & 0 \\ 0 & 0{,}514 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}620 & 0{,}785 \\ 0{,}785 & -0{,}620 \end{pmatrix}$$

třetí sloupec matice $U = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3)$ se v rozkladu vůbec neprojeví, protože třetí řádek matice Σ je nulový

stejně tak můžeme rozklad matice A zapsat kompaktně

$$A \approx \begin{pmatrix} 0{,}229 & 0{,}895 \\ 0{,}524 & 0{,}272 \\ 0{,}816 & -0{,}350 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9{,}53 & 0 \\ 0 & 0{,}514 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}620 & 0{,}785 \\ 0{,}785 & -0{,}620 \end{pmatrix}$$

Kompaktní singulární rozklad

poslední příklad ukazuje, že singulární rozklad $A = U\Sigma V^*$ matice A typu $m \times n$ s hodností $rank(A) = r$ můžeme zapsat úsporněji

v tom případě je pouze prvních r sloupců a prvních r řádků matice $\Sigma = \mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ nenulových

je-li $U = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_m)$ a $V = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\cdots|\mathbf{u}_n)$, označíme

$U' = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_r)$, $V' = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\cdots|\mathbf{u}_r)$ a $\Sigma' = \mathrm{diag}_{r\times r}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$

potom platí také rozklad $A = U'\,\Sigma'\,(V')^*$

v něm jsou obsažené všechny informace o singulárních číslech matice A, báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r)$ sloupcového prostoru $Im\,A$ matice A a báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$ řádkového prostoru $Im\,A^T$ matice A

Dyadická expanze matice

roznásobíme-li kompaktní singulární rozklad

$$A = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_r) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{pmatrix}$$

dostaneme vyjádření $A = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \cdots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*$

matice A jako lineární kombinace matic $\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^*$, které mají všechny typ $m \times n$ a hodnost 1

tomuto vyjádření říkáme *dyadická expanze* matice A

později si ukážeme, že dyadická expanze má velký význam při komprimaci dat

Polární rozklad matice

při některých fyzikálních aplikacích se používá tzv. *polární rozklad* čtvercové (reálné nebo komplexní) matice A

dostaneme jej ze singulárního rozkladu $A = U\,\Sigma\,V^*$

ten si přepíšeme ve tvaru $A = (U\,\Sigma\,U^*)(U\,V^*)$

v první závorce je pozitivně semidefinitní matice, ve druhé je unitární matice

tvrzení: každou čtvercovou (reálnou nebo komplexní) matici A můžeme vyjádřit jako součin

$$A = R\,W,$$

kde R je pozitivně semidefinitní matice a W je unitární (ortogonální v případě reálné A)

lze (poměrně snadno) dokázat, že polární rozklad matice A je určený jednoznačně, pokud je A regulární

Přírůstek ve směru

pro operátor $f : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ chceme zjistit, jak velký může být podíl

$$\frac{\|f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

pro nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

pro každý skalár $a \neq 0$ platí

$$\frac{\|f(a\mathbf{x})\|}{\|a\mathbf{x}\|} = \frac{\|a\,f(\mathbf{x})\|}{|a|\,\|\mathbf{x}\|} = \frac{|a|\,\|f(\mathbf{x})\|}{|a|\,\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

stačí proto zkoumat „natažení“ vektorů jednotkové délky

Přírůstek ve směru pomocí singulárního rozkladu 1

věta o singulárním rozkladu zaručuje existenci *ON* bází B v prostoru $\mathbf{V}$ a C v prostoru $\mathbf{U}$, pro které platí

$$[f]^B_C = \mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \text{a} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

zvolíme llibovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ s normou $\|\mathbf{x}| = 1$

označíme $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, potom

$$1 = \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}\,|\mathbf{x}\rangle = ([\mathbf{x}]_B)^*\,[\mathbf{x}]_B = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$$

spočítáme $\|f(\mathbf{x})\|$:

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|[f(\mathbf{x})]_C\| = \sqrt{\sigma_1^2|x_1|^2 + \sigma_2^2|x_2|^2 + \dots + \sigma_r^2|x_r|^2}$$

Přírůstek ve směru pomocí singulárního rozkladu 2

protože $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, platí

$$\|f(\mathbf{x})\| \leq \sqrt{\sigma_1^2|x_1|^2 + \sigma_1^2|x_2|^2 + \dots + \sigma_1^2|x_r|^2} = \sigma_1$$

podobně

$$\|f(\mathbf{x})\| \geq \sqrt{\sigma_r^2|x_1|^2 + \sigma_r^2|x_2|^2 + \dots + \sigma_r^2|x_r|^2} = \sigma_r$$

dokázali jsme tak

tvrzení: je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ lineární zobrazení, pak pro každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí

$$\sigma_r \leq \frac{\|f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \sigma_1,$$

kde σ_1 je největší singulární hodnota zobrazení f a σ_r je jeho nejmenší singulární hodnota

Spektrální norma operátoru a matice

definice: je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ nenulové lineární zobrazení a $\mathbf{V}, \mathbf{U}$ dva konečně generované prostory se skalárním součinem, pak největší singulární číslo zobrazení f nazýváme *spektrální norma* zobrazení f a označujeme jej $\|f\|$; spektrální normu nulového zobrazení $O : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ definujeme jako 0

spektrální normu $\|A\|$ reálné (nebo komplexní) matice A typu $m \times n$ definujeme jako normu lineárního zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (nebo $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$) určeného maticí A

důsledek: pro každé lineární zobrazení $F : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ mezi dvěma reálnými (resp. komplexními) konečně generovanými prostory se skalárním součinem a každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí

$$\|f(\mathbf{x})\| \leq \|f\|\,\|\mathbf{x}\|$$

pro každou čtvercovou reálnou nebo komplexní matici A platí

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\,\|\mathbf{x}\|$$

Spektrální norma inverzní matice

je-li A regulární (reálná nabo komplexní) matice řádu n a $A = U\Sigma V^T$ její singulární rozklad, pak diagonální matice $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ je regulární, tj. $\sigma_i \neq 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$

potom $A^{-1} = (U\Sigma V^T)^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$ je singulární rozklad matice A^{-1}

protože $\Sigma^{-1} = \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1})$

pokud $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$, pak je $\sigma_1^{-1} \leq \sigma_2^{-1} \leq \cdots \leq \sigma_n^{-1}$

dokázali jsme tak následující

tvrzení: je-li A regulární reálná nebo komplexní matice, pak $\|A^{-1}\| = \sigma_n^{-1}$, kde σ_n je nejmenší singulární hodnota matice A

Příklad

příklad: najdeme spektrální normu reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

už dříve jsme o ní zjistili, že je normální a tedy unitárně diagonalizovatelná

její singulární hodnoty najdeme jako absolutní hodnoty jejích vlastních čísel

ty jsme už spočítali jako $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = (1 \pm \sqrt{3})/2$

singulární hodnoty matice A jsou tedy $2, 1, 1$

platí proto $\|A\| = 2$ a $\|A^{-1}\| = 1$

Singulární hodnoty a numerická stabilita 1

příklad: pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ jsme našli singulární hodnoty

$\sigma_1 \approx 9{,}53$ a $\approx 0{,}514$

platí proto $\|A\| \approx 9{,}53$

máme řešit soustavu lineární rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s regulární maticí A řádu n

její řešení je $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

předpokládejme nyní, že pravou stranu $\mathbf{b}$ neznáme přesně, známe ji s nějakou chybou $\mathbf{e}$

ta vznikla třeba v důsledku zaokrouhlování nebo v důsledku šumu při měření, apod.

Singulární hodnoty a numerická stabilita 2

ve skutečnosti řešíme tedy rovnici $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{e}$

ta je stále řešitelná, protože A je regulární

dostaneme řešení $\hat{\mathbf{x}} = A^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{e}) = A^{-1}\mathbf{b} - A^{-1}\mathbf{e}$

rozdíl mezi vypočítaným řešením $\hat{\mathbf{x}}$ a řešením $\mathbf{x}$ rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je

$$\delta\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{e}$$

normu „chyby“ při řešení v důsledku chyby při zadání soustavy tak můžeme odhadnout shora jako

$$\|\delta\mathbf{x}\| = \|A^{-1}\mathbf{e}\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\mathbf{e}\|$$

má-li matice A^{-1} velké singulární číslo, **může** výpočet se výsledek $\hat{\mathbf{x}}$ velmi lišit od přesného řešení $\mathbf{x}$

singulární čísla matice A^{-1} jsou rovná inverzím singulárních čísel matice A

Číslo podmíněnosti regulární matice

v některých případech není důležitá absolutní velikost $\delta\mathbf{x}$ chyby při výpočtu, ale její relativní velikost

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

vzhledem k normě řešení $\mathbf{x}$ v závislosti na relativní chybě $\|\mathbf{e}\|/\mathbf{b}$

protože $\mathbf{b} = A\,\mathbf{x}$, plyne z důseldku na str. 9-284 dole, že $\|\mathbf{b}\| = \|A\,\mathbf{x}\| \leq \|A\|\,\|\mathbf{x}\|$, neboli

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

po vynásobení s nerovností $\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\mathbf{e}\|$ dostaneme

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\|\,\|A\|\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Definice čísla podmíněnosti regulární matice

velikost relativní chyby $\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s regulární maticí A je tak shora odhadnutá součinem relativní chyby $\|\mathbf{e}\|/\mathbf{b}$ pravé strany vynásobené součinem největšího a nejmenšího singulárního čísla matice A

definice: je-li A regulární matice, pak číslo

$$\|A\|\,\|A^{-1}\|$$

nazýváme *číslo podmíněnosti* matice A

připomňme, že číslo podmíněnosti regulární matice A se rovná součinu největšího a nejmenšího singulárního čísla matice A

jde opět poue o **horní odhad** velikosti relativní chyby řešení soustavy $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Aproximace matice maticí nižší hodnosti – 1

uvažujeme (reálnou nebo komplexní) matici A typu $m \times n$ a hodnosti r

chceme najít matici B hodnosti menší nebo rovné $s < r$, která „nejlépe“ aproximuje matici A

blízkost aproximace měříme pomocí spektrální normy $\|A - B\|$ rozdílu matic $A - B$

najdeme singulární rozklad matice A

$$A = U\,\mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)\,V^T,$$

kde $U = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_m)$ a $V = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\cdots|\mathbf{v}_n)$ jsou ortogonální (unitární) matice

Aproximace matice maticí nižší hodnosti – 2

singulární rozklad určuje dyadický rozvoj (expanzi) matice A

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^*)$$

pokud předpokládáme (jako obvykle), že $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, zolíme

$$B = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^*)$$

při této volbě matice B dostáváme dyadický rozvoj

$$A - B = \sum_{i=s+1}^{r} \sigma_i(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^*)$$

Aproximace matice maticí nižší hodnosti – 3

z něho snadno dostaneme kompaktní singulární rozklad matice A_B:

$$A - B = (\mathbf{u}_{s+1}|\cdots|\mathbf{u}_m)\,\mathrm{diag}_{m\times n}((\mathbf{v}_{s+1}|\cdots|\mathbf{v}_m))^T$$

a tedy spektrální norma rozdílu $A - B$ se rovná

$$\|A - B\| = \sigma_{s+1}$$

dokážeme, že pro každou matici C typu $m \times n$ s hodností nejvýše s platí $\|A - C\| \geq \sigma_{s+1}$

prostor $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{s+1}\rangle$ má dimenzi $s + 1$

jádro $Ker\ C$ matice C má dimenzi

$$\dim(Ker\ C) = n - \dim(Im\ C) \geq n - s$$

Aproximace matice maticí nižší hodnosti– 4

podle věty o dimenzi průniku a spojení podprostorů existuje nenulový vektor

$$\mathbf{x} \in (Ker\ C) \cap \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{s+1}\rangle$$

najdeme vyjádření $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_{s+1}\mathbf{v}_{s+1}$, potom

$$C\mathbf{x} = 0 \quad \text{x} \quad A\mathbf{x} = x_1\sigma_1\mathbf{u}_1 + x_2\sigma_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_{s+1}\sigma_{s+1}\mathbf{u}_{s+1}$$

protože posloupnost vektorů $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{s+1})$ je ON, platí

$$\|A\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2\sigma_1^2 + |x_2|^2\sigma_2^2 + \cdots + |x_{s+1}|^2\sigma_{s+1}^2} \geq \sigma_{s+1}\|\mathbf{x}\|$$

platí proto

$$\|A - C\| \geq \frac{\|(A - C)\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \sigma_{s+1}$$

Dyadický rozvoj a komprimace dat

máme-li data uložená do reálné matice A velké hodnosti, můžeme je aproximovat tak, že z dyadického rozvoje matice A

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^*)$$

vynecháme sčítance s malými singulárními hodnotami σ_i, tj. vezmeme pouze prvních s členů dyadického rozvoje

jinými slovy, data A aproximujeme nejbližší (vzhledem ke spektrální normě) maticí hodnosti nejvýše s

Dyadický rozvoj a výpočet $A\mathbf{x}$

jiné použití aproximace matice A pomocí matice hodnosti nejvýše s je při výpočtu hodnoty zobrazení $f_A(\mathbf{x})$, tj. při výpočtu $A\mathbf{x}$,

protože aproximace B matice A má hodnost s, můžeme vzít její skeletní rozklad $B = CD$, tj. součin matic typu $m \times s$ a $s \times n$ a spočítat $B\mathbf{x}$

v prvním semestru jsem si ukázali, jak použití skeletního rozkladu snižuje počet aritmetických operací při výpočtu součinu $B\mathbf{x} = CD\mathbf{x}$

normu rozdílu $A\mathbf{x} - B\mathbf{x}$ odhadneme jako

$$\|A\mathbf{x} - B\mathbf{x}\| = \|(A - B)\mathbf{x}\| \leq \|A - B\|\,\|\mathbf{x}\| = \sigma_{s+1}\|\mathbf{x}\|$$

Pesudoinverze 1

obecná soustava lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s maticí A typu $m \times n$ nemusí mít řešení

v části o metodě nejmenších čtverců jsme si ukázali, že nejlepší aproximaci $\hat{\mathbf{x}}$ řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ najdeme jako řešení normální soustavy

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$$

v případě, že matice $A^T A$ není regulární (čtvercová je), má soustava $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ více řešení

ukážeme si, jak v takovém případě najdeme přibližně řešení $\hat{\mathbf{x}}$ s minimální normou $\|\hat{\mathbf{x}}\|$

jako první to uděláme pro případ, že matice $A = \mathrm{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) = \Sigma$ je zobecněná diagonální matice

Pesudoinverze 2

v tom případě hledáme přesné řešení normální soustavy

$$\Sigma^T \Sigma\,\hat{\mathbf{x}} = \Sigma^T\mathbf{b}$$

platí $\Sigma^T\Sigma = \mathrm{diag}_{n\times n}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_s^2)$ a

$\Sigma^T\mathbf{b} = (\sigma_1 b_1, \sigma_2 b_2, \dots, \sigma_r b_r, 0, \dots, 0)^T$

všechna řešení normální soustavy $\Sigma^T\Sigma\hat{\mathbf{x}} = \Sigma^T\mathbf{b}$ jsou tedy tvaru

$$\hat{\mathbf{x}} = (\sigma_1^{-1}b_1, \sigma_2^{-1}b_2, \dots, \sigma_r^{-1}b_r, t_{r+1}, \dots, t_n)^T,$$

kde $t_{r+1}, \dots, t_n$ jsou libovolné parametry

nejmenší normu má tedy

$$\hat{\mathbf{x}} = (\sigma_1^{-1}b_1, \sigma_2^{-1}b_2, \dots, \sigma_r^{-1}b_r, 0, \dots, 0)^T$$

a podmínkou minimality normy je určené jednoznačně

Pseudoinverze 3

označíme-li $\Sigma^\dagger = \mathrm{diag}_{n\times m}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1})$, pak aproximaci řešení soustavy $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s nejmenší normou můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\hat{\mathbf{x}} = \Sigma^\dagger\mathbf{b}$$

pomocí singulárního rozkladu najdeme aproximaci $\hat{\mathbf{x}}$ řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s minimální normou pro obecnou matici A

najdeme singulární rozklad $A = U\Sigma V^T$

hledáme přesné řešení soustavy $A^T A\,\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ s nejmenší normou, po dosazení $A = U\Sigma V^T$ dostaneme

$$V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T\,\hat{\mathbf{x}} = V\Sigma^T U^T\mathbf{b}$$

protože $U^T = U^{-1}$ (neboť U je ortogonální matice) a V je regulární (neboť U je také ortogonální matice), je tato soustava ekvivalentní

$$\Sigma^T\Sigma V^T\,\hat{\mathbf{x}} = \Sigma^T U^T\mathbf{b}$$

Pseudoinverze 4

označíme-li $\hat{\mathbf{y}} = V^T\,\hat{\mathbf{x}}$, dostaneme soustavu

$$\Sigma^T\Sigma\,\hat{\mathbf{y}} = \Sigma^T U^T\mathbf{b},$$

což je normální soustava k soustavě

$$\Sigma\,\mathbf{y} = \Sigma^T U^T\mathbf{b}$$

ta má aproximaci $\hat{\mathbf{y}}$ řešení s nejmenší normou rovné $\hat{\mathbf{y}} = \Sigma^\dagger U^T\mathbf{b}$

to znamená, že $V^T\hat{\mathbf{x}} = \Sigma^T U^T\mathbf{b}$ je aproximace řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s nejmenší normou

protože $\|V^T\hat{\mathbf{x}}\| = \|\hat{\mathbf{x}}\|$, je $\hat{\mathbf{x}} = V\Sigma^\dagger U^T\mathbf{b}$ aproximace řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s nejmenší normou

Moore-Penroseova pseudoinverze

matici $A^{\dagger} = V\Sigma^{\dagger}U^T$ nazýváme *Moore-Penroseova pseudoinverze* matice A

Kapitola 10

Bilineární a kvadratické formy

Bilineární a kvadratické formy - obsah

- *Bilineární formy*
- *Diagonalizace*

Bilineární formy - obsah

- *Bilineární formy*
  Bilineární formy
  Matice bilineární formy
  Symetrické a antisymetrické formy

Minkowského geometrie časoprostoru

vzdálenost (normu) ve vektorovém prostoru definujeme pomocí skalárního součinu

v některým oborech se vzdálenosti mezi vektory měří způsobem, který nelze definovat pomocí skalárního součinu

například ve speciální teorii relativity je vzdálenost dvou událostí $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)^T$ a $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)^T$ (vektorů v prostoru $\mathbb{R}^4$) definována jako

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (t_1 - t - 2)^2}$$

„norma“ události $\mathbf{x} = (x, y, z, t)^T$ je její vzdálenost od $(0, 0, 0, 0)^T$, tj.

$$\|\mathbf{x}\| = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

Definice bilineární formy

takovou „normu“ nemůžeme definovat pomocí žádného skalárního součinu

základní pojem této kapitoly je zobecnění skalárního součinu, které budeme nazývat *bilineární forma*

definice: je-li $\mathbf{U}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, pak *bilineární forma* na prostoru $\mathbf{U}$ je zobrazení $f : U \times U \to T$, které je lineární v obou složkách, tj. pro libovolné $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in U$ a $t \in T$ platí

(1) $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
$f(\mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

(2) $f(t\mathbf{v}, \mathbf{w}) = t(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
$f(\mathbf{v}, t\mathbf{w}) = tf(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

pomocí bilineárních forem budeme také zkoumat kvadratické polynomy více proměnných

Příklad

příklad: bilineární formou na $\mathbb{R}^3$ je například zobrazení

$$\begin{aligned} & f((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) \\ & = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_1y_3 + 6x_2y_1 + x_2y_3 + 10x_3y_2 \\ & = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

později si ukážeme, že každou bilineární formu f na aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$ můžeme zapsat pomocí nějaké čtvercové matice A řádu n jako

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$$

Bilineární formy a skalární součin

každý skalární součin $\langle\, | \,\rangle$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ můžeme chápat jako bilineární formu

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle$$

bilineární forma definovaná skalárním součinem oproti obecné bilineární formě splňuje navíc

- $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$ (symetrie)
- $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ (pozitivní semidefinitnost)

pozor! skalární součin na komplexním vektorovém prostoru bilineární forma není

naproti tomu pro libovolný operátor g na reálném prostoru $\mathbf{U}$ se skalárním součinem $\langle\, | \,\rangle$ je $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{y}) \rangle$ bilineární forma

Kvadratická forma vytvořená bilineární formou

příklad: jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, pak $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ je bilineární forma

definice: je-li f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak zobrazení $f_2 : U \to T$ definované předpisem

$$f_2(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \text{pro každé } \mathbf{v} \in U$$

nazýváme *kvadratická forma* vytvořená bilineární formou f

příklad: bilineární forma na $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} &f((x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T) \\ &= 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_1y_3 + 6x_2y_1 + x_2y_3 + 10x_3y_2 \end{aligned}$$

vytváří kvadratickou formu

$$\begin{aligned} f_2((x_1, x_2, x_3)^T) &= 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_1x_3 + 6x_2x_1 + x_2x_3 + 10x_3x_2 \\ &= 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_1x_3 + 11x_2y_3 \end{aligned}$$

Kvadratická forma vytvořená skalárním součinem

protože bilineární formu f umíme zapsat pomocí matice A jako

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y},$$

můžeme také kvadratickou formu f_2 vytvořenou f zapsat pomocí téže matice A jako

$$f_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

příklad: kvadratická forma f_2 vytvořená skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ na prostoru $\mathbf{U}$ (tj. bilineární formou $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle$) je

$$f_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$$

Aproximace funkcí více proměnných

hladkou funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ můžeme aproximovat Taylorovými polynomy, aproximace je tím přesnější, čím větší stupeň má Taylorův polynom

podobně můžeme aproximovat funkce více proměnných, geometricky to lze ještě nahlédnout v případě fukce $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

chceme pochopit jake se funkce h chová v okolí nějakého bodu $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$, řekněme $\mathbf{d} = (0, 0)^T$

Velmi hrubá aproximace je nahradit funkci její funkční hodnotou $c = h(\mathbf{d})$

$$h(x_1, x_2) \approx c$$

Aproximace pomocí lineárních a kvadratických forem

přesnější je lineární aproximace, kdy nahradíme funkci její tečnou rovinou

$$h(x_1, x_2) \approx c + b_1x_1 + b_2x_2$$

nekonstantní část $g(x_1, x_2) = b_1x_1 + b_2x_2$ je lineární forma na $\mathbb{R}^2$, koeficienty a_1, a_2 se vypočtou pomocí parciálních derivací

ještě přesnější je aproximace polynomem stupně 2:

$$h(x_1, x_2) \approx c + b_1x_1 + b_2x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

kvadratická část $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ je kvadratická forma na $\mathbb{R}^2$ (koeficienty se vypočtou z druhých parciálních derivací)

tato aproximace je důležitá například při hledání extrémů

Kvadratické útvary

proto je důležité vědět, jak vypadá graf kvadratické funkce (polynomu) více proměnných

obecněji nás zajímá, jak vypadá kvadratický útvar, například množina bodů v $\mathbb{R}^3$ splňujících rovnici

$$10x_1^2 + 13x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 = 9$$

základní myšlenka na řešení takových problémů je stejná jako u lineárních operátorů: najít bázi, vzhledem ke které je bilineární forma přehledná/srozumitelná

Vyjádření bilineární formy pomocí matice

ujasníme si, že každá bilineární forma na prostoru $\mathbf{U}$ je jednoznačně určena svými hodnotami na dvijicích prvků nějaké báze v $\mathbf{U}$

ukážeme, že je-li f je bilineární forma na $\mathbf{U}$ a $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je báze prostoru $\mathbf{U}$, pak pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ můžeme $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vyjádřit pomocí souřadnic vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vzhledem k bázi B a hodnot $a_{ij} = f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$

označíme si vektory souřadnic

$$[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \quad [\mathbf{y}]_B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$$

Výpočet

pak spočítáme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n, y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{v}_i, \sum_{i=1}^n y_i\mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f\left(\mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{v}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jf(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_ja_{ij} \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Definice matice bilineární formy vzhledem k bázi

definice: je-li $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ báze vektorového prostoru $\mathbf{U}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ a f je bilineární forma na $\mathbf{U}$, pak *maticí bilineární formy f vzhledem k B* rozumíme čtvercovou matici řádu n nad $\mathbf{T}$, která má na pozici (i, j) prvek $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ **označení**: $[f]_B$

tvrzení: je-li B báze konečně generovaného prostoru $\mathbf{U}$, f bilineární forma na U a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$, pak

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T[f]_B[\mathbf{y}]_B$$

to znamená, že jsou-li souřadnice vektorů $[\mathbf{x}]_B = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $[\mathbf{y}]_B = (y_1, \ldots, y_n)^T$ a $[f]_B = (a_{ij})_{n\times n}$, pak

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j \ .$$

Tomuto vyjádření také říkáme *analytické vyjádření bilineární formy f*

Bilineární forma určená maticí

tvrzení: je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n nad $\mathbf{T}$ a B báze v $\mathbf{U}$, pak zobrazení

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_B^T A [\mathbf{y}]_B$$

je bilineární a prvek a_{ij} na pozici (i, j) se rovná $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$

při pevně zvolené bázi B tedy takto bilineární formy na $\mathbf{U}$ vzájemně jednoznačně odpovídají čtvercovým maticím nad $\mathbf{T}$ řádu n

jak se změní matice bilineární formy změníme-li bázi?

příklad: obrazení $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$

Pokračování příkladu

její matice vzhledem ke kanonické bázi je

$$[f]_K == \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

zvolíme si nějakou jinou bázi v $\mathbb{R}^2$, například

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Matice f vzhledem k B je podle definice

$$[f]_B = \begin{pmatrix} f((1,-1)^T, (1,-1)^T) & f((1,-1)^T, (2,0)^T) \\ f((2,0)^T, (1,-1)^T) & f((2,0)^T, (2,0)^T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Další pokračování příkladu

například prvek na místě $(1, 2)$ spočteme jako

$$f((1,-1)^T, (2,0)^T) = (1, -1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, -1) \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -4$$

Matice bilineární formy f vzhledem k B nám umožňuje rychle spočítat $f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T)$ známe-li vyjádření vektorů vzhledem k bázi B:

$$[(x_1, x_2)^T]_B = (x_1', x_2')^T, \quad [(y_1, y_2)^T]_B = (y_1', y_2')^T,$$

potom

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = (x_1'\ x_2') \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$
$$= -2x_1'y_1' - 4x_1'y_2' + 4x_2'y_1' + 8x_2'y_2'$$

Výpočet matice $[f]_B$ jiným způsobem

označíme X matici přechodu od B ke kanonické bázi K

$$X = [id]_K^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

pro libovolný vektor $\mathbf{z} \in U$ platí $[\mathbf{z}]_K = X[\mathbf{z}]_B$ a transponováním získáme $[\mathbf{z}]_K^T = [\mathbf{z}]_B^T X^T$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
$$= (x_1', x_2') \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$
$$= (x_1', x_2') \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

Změna báze obecně

tvrzení: je-li f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{U}$, jsou-li B a C báze v $\mathbf{U}$ a $X = [id]_B^C$ je matice přechodu od C k B, pak

$$[f]_C = ([id]_B^C)^T [f]_B [id]_B^C = X^T [f]_B X$$

důkaz: pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\mathbf{x}]_B^T [f]_B [\mathbf{y}]_B = ([id]_B^C [\mathbf{x}]_C)^T [f]_B ([id]_B^C [\mathbf{y}]_C) \\ &= [\mathbf{x}]_C^T X^T [f]_B X [\mathbf{y}]_C \end{aligned}$$

z jednoznačnosti matice bilineární formy vzhledem k bázi nyní plyne $[f]_C = X^T [f]_B X$

Geometrické významy čtvercové matice

čtvercová matice A řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$ má nyní pro nás dva různé geometrické významy

určuje lineární operátor $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ na $\mathbf{T}^n$, $[f_A]_K^K = A$

nebo bilineární formu $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ na $\mathbf{T}^n$, $[f]_K = A$

podstatný je rozdíl mezi změnou matice operátoru f_A nebo matice bilineární formy f při změně báze prostoru $\mathbf{T}^n$

je-li $R = [id]_K^B$ matice přechodu od B ke kanonické bázi, pak matice lineárního operátoru f_A vzhledem k B je

$$[f_A]_B^B = [id]_B^K [f_A]_K^K [id]_K^B = R^{-1} A R$$

zatímco matice bilineární formy f vzhledem k B je

$$([id]_K^B)^T [f]^K [id]_K^B = R^T A R$$

Kvadratická forma vytvořená různými bilineárními formami

kvadratická forma na prostoru $\mathbf{U}$ může být vytvořena různými bilineárními formami, například bilineární formy

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) &= 2x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ g((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) &= 2x_1 y_1 + 4x_2 y_1 \end{aligned}$$

na prostoru $\mathbb{R}^2$ vytvářejí stejnou kvadratickou formu

$$f_2((x_1, x_2)^T) = g_2((x_1, x_2)^T) = 2x_1^2 + 4x_1 x_2$$

nyní si, v případě těles charakteristiky různé od dva, jednoznačně rozložíme každou bilineární formu na součet symetrické a antisymetrické, a ukážeme, že vytvořená kvadratická forma je určena symetrickou částí bilineární formy

Definice symetrické a antisymetrické bilineární formy

definice: bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ se nazývá

- *symetrická*, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
- *antisymetrická*, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

tvrzení: je-li $\mathbf{U}$ konečně generovaný vektorový prostor, B báze v $\mathbf{U}$ a f bilineární forma na $\mathbf{U}$, pak platí

- f je symetrická právě tehdy, když je $[f]_B$ symetrická matice
- f je antisymetrická právě tehdy, když je $[f]_B$ antisymetrická matice.

Důkaz

dokážeme pouze první část

označíme $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$

prvek na místě (i,j) v matici $[f]_B$ je podle definice rovný $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$

je-li tedy f symetrická pak prvek na místě (i,j) je stejný jako prvek na místě (j,i), takže $[f]_B$ je symetrická matice

je-li naopak $[f]_B$ symetrická matice, pak pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= ([\mathbf{x}]_B)^T [f]_B [\mathbf{y}]_B = ([\mathbf{x}]_B)^T ([f]_B)^T [\mathbf{y}]_B \\ &= \left(([\mathbf{x}]_B)^T ([f]_B)^T [\mathbf{y}]_B\right)^T = ([\mathbf{y}]_B)^T [f]_B [\mathbf{x}]_B = f(\mathbf{y},\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Rozklad bilineární formy

chceme rozložit danou bilineární formu f na prostoru $\mathbf{U}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ na součet symetrické formy f_s a antisymetrické formy f_a

to znamená, že chceme, aby pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ platilo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= f_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ f(\mathbf{y},\mathbf{x}) &= f_s(\mathbf{y},\mathbf{x}) + f_a(\mathbf{y},\mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) - f_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{aligned}$$

dostali jsme pro $f_s(\mathbf{x},\mathbf{y})$ a $f_a(\mathbf{x},\mathbf{y})$ soustavu dvou rovnic, která má jednoznačné řešení v případě, že její determinant je nenulový

determinant je nenulový právě když $1 \neq -1$, tj. právě když je charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ různá od 2

Tvrzení o rozkladu bilineární formy

v tom případě má soustava jednoznačné řešení

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{x},\mathbf{y})) &= \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f(\mathbf{y},\mathbf{x})) \\ f_a(\mathbf{x},\mathbf{y})) &= \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - f(\mathbf{y},\mathbf{x})) \end{aligned}$$

a snadno ověříme, že forma f_s je skutečně symetrická a forma f_a je antisymetrická

dokázali jsme tak

tvrzení: je-li $\mathbf{U}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ charakteristiky různé od 2, pak každou bilineární formu f na $\mathbf{U}$ lze vyjádřit jako součet $f = f_s + f_a$, kde f_s je symetrická a f_a je antisymetrická, tento rozklad je jednoznačný a platí

$$f_s(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) + f(\mathbf{y},\mathbf{x})), \quad f_a(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - f(\mathbf{y},\mathbf{x})) \ .$$

Příklad

bilineární forma f na $\mathbb{R}^2$ definovaná jako

$$f((x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T) = 2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_1y_2 = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

je součtem bilineárních forem

$$f_s((x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$f_a((x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T) = x_1y_2 - x_2y_1 = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

to odpovídá maticovému součtu

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kvadratická forma závisí na symetrické části

tvrzení: jsou-li f, g dvě bilineární formy na prostoru $\mathbf{U}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ s charakteristikou různou od 2, pak platí $f_2 = g_2$ právě když $f_s = g_s$; navíc platí

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(f_2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y})\right)$$

důkaz: pro jakoukoliv antisymetrickou formu g na $\mathbf{U}$ platí $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, a protože je $(1+1) \neq 0$, plyne odtud $g_2(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$

odtud plyne

$$f_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f_a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

kvadratická forma f_2 vytvořená bilineární formou f tak závisí pouze na symetrické části f_a formy f

Dokončení důkazu

důkaz opačné implikace vyplyne z důkazu vyjádření f_s pomocí f_2

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(f_2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y})\right) &= \tfrac{1}{2}\left(f_s(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_s(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - f_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f_s(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right)\\ &= f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})\end{aligned}$$

příklad: kvadratická forma

$$f_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$$

na prostoru Re^2 je vytvořená symetrickou bilineární formou

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_2 + 7x_2y_2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizace - obsah

Předpoklad pro zbytek kapitoly

v další části této kapitoly se budeme zabývat pouze symetrickými bilineárními formami na prostorech nad tělesem charakteristiky různé od 2

podle předchozího tvrzení to je totéž jako zabývat se kvadratickými formami na těchto prostorech

stejně jako v případě lineárních operátorů se budeme snažit najít co nejjednodušší matici, která bilineární formu určuje

to znamená najít bázi prostoru, vzhledem ke které má bilineární forma co nejjednodušší matici

narozdíl od lineárních operátorů lze bilineární formu „diagonalizovat" vždy (!! je-li charakteristika $\mathbf{T}$ různá od 2 !!)

f-ortogonální báze

je-li f bilineární forma na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ a $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ báze $\mathbf{U}$ taková, že $[f]_C$ je diagonální, pak

$$f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \quad \text{pokud} \quad i \neq j$$

takovou bázi budeme nazývat *f-ortogonální*

je-li $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ f-ortogonální báze $\mathbf{U}$, pak pro kvadratickou formu f_2 vytvořenou f platí

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) x_i^2 \end{aligned}$$

kde $[\mathbf{x}]_C = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

Diagonalizace bilineární a kvadratické formy

pokud naopak existují prvky $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbf{T}$ takové, že

$$f_2(\mathbf{x}) = \textstyle\sum_{k=1}^n d_k x_k^2$$

kde $[\mathbf{x}]_C = (x_1, x_2 \dots, x_n)^T$, pak podle předchozího tvrzení

$$f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \tfrac{1}{2}\left(f_2(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) - f_2(\mathbf{v}_i) - f_2(\mathbf{v}_j)\right) = \tfrac{1}{2}\left(d_i + d_j - d_i - d_j\right) = 0$$

pro $i \neq j$, protože $[\mathbf{v}_i]_C = \mathbf{e}_i$, $[\mathbf{v}_j]_C = \mathbf{e}_j$ a $[\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j]_C = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$

dokázali jsme tak

tvrzení: je-li f bilineární forma na prostoru $\mathbf{U}$ konečné dimenze, pak báze C v $\mathbf{U}$ je f-ortogonální právě když kvadratická forma f_2 vytvořená f má vyjádření ve tvaru

$$f_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n d_k x_k^2,$$

kde $[\mathbf{x}]_C = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; potom $[f]_C = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$

Hodnost bilineární formy

je-li f bilineární forma na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ a jsou-li B, C báze v $\mathbf{U}$, pak platí

$$[f]_C = X^T [f]_B X,$$

kde $X = [id]_B^C$ je matice přechodu od báze C k bázi B

protože je X regulární matice, platí $rank([f]_C) = rank([f]_B)$

definice: *hodnost bilineární formy f* na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ je hodnost matice formy f vzhledem k libovolné bázi prostoru $\mathbf{U}$; **označení**: $r(f)$ nebo $rank(f)$

je-li B f-ortogonální báze $\mathbf{U}$, tj. $[f]_B = \mathrm{diag}(d_1, d_1, \dots, d_n)$, pak $r(f)$ se rovná počtu nenulových prvků na hlavní diagonále $[f]_B$

počet nenulových prvků na hlavní diagonále $[f]_B$ tak nezávisí na volbě f-ortogonální báze

Metoda symetrických úprav 1

f-ortogonální báze budeme hledat *metodou symetrických úprav*

je-li B báze v prostoru $\mathbf{U}$, pak bilineární forma f na $\mathbf{U}$ je jednoznačně popsána maticí $[f]_B$

chceme najít f-ortogonální bázi C v $\mathbf{U}$, tj. bázi, pro kterou platí $[f]_C = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$

pro obě matice platí vztah $\quad [f]_C = \left([id]_B^C\right)^T [f]_B \, [id]_B^C$

připomeňme ještě, že ve sloupcích matice přechodu $[id]_B^C$ najdeme souřadnice prvků hledané báze C vzhledem k bázi B

Metoda symetrických úprav 2

matice $\left([id]_B^C\right)^T$ je regulární coby matice transponovaná k matici přechodu $[id]_B^C$

matici $\left([id]_B^C\right)^T$ proto můžeme vyjádřit jako součin elementárních matic $\left([id]_B^C\right)^T = E_k \cdots E_2 E_1$

přechodem k transponovaným maticím dostaneme $[id]_B^C = E_1^T E_2^T \cdots E_k^T$

platí tedy $\quad [f]_C = E_k \cdots E_2 E_1 \, [f]_B \, E_1^T E_2^T \cdots E_k^T$

poslední rovnost dává návod, jak nějakou f-ortogonální bázi C najít

Metoda symetrických úprav 3

matici $[f]_B$ převedeme do diagonálního tvaru $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ pomocí posloupnosti úprav, z nichž každá je jedna z následujících

- prohození i-tého a j-tého řádku a následné prohození i-tého a j-tého sloupce
- vynásobení i-tého řádku nenulovým skalárem $t \in \mathbf{T}$ a následné vynásobení i-tého sloupce stejným skalárem t
- přičtení t-násobku i-tého řádku k j-tému řádku pro $j \neq i$ a následné přičtení t-násobku i-tého sloupce k j-tému sloupci

odtud název *metoda symetrických elementárních úprav*

pro součin elementárních matic platí $\quad E_k E_{k-1} \cdots E_1 = \left([id]_B^C\right)^T$

to znamená, že souřadnice vektorů f-ortogonální báze C vzhledem k bázi B najdeme v řádcích součinu $E_k E_{k-1} \cdots E_1 = \left([id]_B^C\right)^T$

Metoda symetrických úprav 4

celý výpočet můžeme uspořádat podobně jako jsme postupovali při výpočtu inverzní matice

matici $A = [f]_B$ a jednotkovou matici I_n zapíšeme jako bloky jedné matice $(A|I_n)$ typu $n \times (2n)$

jeden krok úprav je vynásobení matice elementární maticí E zleva a následné vynásobení levého bloku maticí E^T zprava

dostaneme tak posloupnost matic

$(A|I_n)$, $(E_1 A E_1^T | E_1)$, $(E_2 E_1 A E_1^T E_2^T | E_2 E_1)$, $\ldots$

$$(E_k \cdots E_2 E_1 A E_1^T E_2^T \cdots E_k^T | E_k \cdots E_2 E_1) = \left(\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) \middle| \left([id]_B^C\right)^T\right)$$

Příklad

budeme diagonalizovat bilineární formu f na $\mathbb{R}^3$ danou maticí

$$[f]_K = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

symetrické elementární úpravy děláme na matici

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Dokončení příkladu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & -3/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & -3/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

báze $C = ((1,1,0)^T, (-1,1,0)^T, (-1,-2,1)^T)$ je tedy f-ortogonální a $[f]_C = \mathrm{diag}(2,-2,-4)$

Vlastnosti výpočtu

je-li $(Q|R)$ bloková matice typu $n \times (2n)$ se symetrickým čtvercovým blokem Q, pak po jedné symetrivké elementární úptavě dostaneme matici $EQE^T|ER$ a matice EQE^T je opět symetrická

pokud uděláme dvě elementární symetrické úpravy, levý blok se bude rovnat $FEQE^TF^T$; díky asociativitě násobení matic můžeme výpočet porvést také v pořadí $(FEQ)E^TF^T$; použili jsme tento postup při nulování prvního sloupce pod prvkem na místě $(1,1)$

podobně můžeme při výpočtu $E_i \cdots E_2E_1QE_1E_2 \cdots E_i$ napřed spočítat součin $E_i \cdots E_2E_1Q$ pomocí *eřú* a poté dopočítat $E_i \cdots E_2E_1QE_1E_2 \cdots E_i$ pomocí *esú*

Organizace výpočtu

celý proces diagonalizace symetrické matice $A = (a_{ij})$ pomocí symetrických *eú* můžeme uspořádat do analogie Gaussovy eliminace

1. je-li A nulová, je diagonální a výpočet končí
2. je-li A nenulová a všechny prvky na hlavní diagonále jsou 0, pak najdeme prvek $a_{ij} \neq 0$, přičteme j-tý řádek k i-tému řádku a j-tý sloupec k i-tému sloupci, pak je prvek na místě (i,i) rovný $2a_{ij} \neq 0$
3. poté prohodíme i-tý a první řádek a i-tý a první sloupec, prvek na místě $(1,1)$ – pivot – bude $2a_{ij} \neq 0$
4. poté vynulujeme všechny prvky v prvním sloupci pod pivotem a pomocí odpovídajících sloupcových úprav všechny prvky vpravo od pivotu prvním řádku
5. celý postup opakujeme s maticí B, kterou dostaneme vynecháním prvního řádku a prvního sloupce

Věta o diagonalizaci symetrických bilineárních forem

věta: pro každou symetrickou bilineární formu f na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ existuje f-ortogonální báze v $\mathbf{U}$

důkaz: stačí dokázat, že každou čtvercovou matici A můžeme diagonalizovat pomocí symetrických *eú*

je-li A nenulová a proběhlo už $i-1$ cyklů předchozího algoritmu, dostaneme blokovou matici

$$A' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

kde D je diagonální matice řádu $i-1$ a B je symetrická matice

je-li B nulová, algoritmus končí a matice A' je diagonální

je-li B nenulová, v případě potřeby proběhnou kroky 2. a 3. algoritmu, po kterých bude prvek na místě (i,i) nenulový

Když vycházejí pivoty nenulové

krok 4. algoritmu pak zajistí, že po jeho skončení budou všechny prvky mimo hlavní diagonálu v i-tém sloupci a i-tém řádku nulové, řád diagonálního bloku se tak zvětší o 1

zajímavý je průběh diagonalizace pomocí symetrických *eú* v případě, kdy po skončení $(i-1)$-ního cyklu vyjde buď blok B nulový a nebo dostaneme na místě (i,i) nenulový prvek

speciálně už začínáme s maticí $A = (a_{ij})$ s prvkem $a_{11} \neq 0$

v tom případě nikdy neděláne kroky 2. a 3. algoritmu

v kroku 4. pak používáme při řádkových úpravách pouze přičítání násobků i-tého řádku k řádkům s indexem $j > i$

Když vycházejí pivoty nenulové

v průběhu celého algoritmu si tak vystačíme s elementárními maticemi E, které jsou dolní trojúhelníkové a s čísly 1 na hlavní diagonále

po skončení algoritmu pak dostaneme diagonální matici

$$D = E_k \cdots E_2 E_1 A E_1^T E_2^T \cdots E_k^T$$

součin $E_k \cdots E_2 E_1$ je také dolní trojúhelníková matice s jednotkami na hlavní diagonále

všimněme si ještě, že součin $E_k \cdots E_2 E_1 A$ je výsledek Gaussovy eliminace provedené na matici A, je tedy v *řot* a s pivoty na hlavní diagonále

doplnění součinu $E_k \cdots E_2 E_1 A$ o elementární sloupcové úpravy $(E_k \cdots E_2 E_1 A) E_1^T E_2^T \cdots E_k^T$ pivoty na hlavní diagonále nezmění

Tvrzení o symetrickém rozkladu

tvrzení: Je-li A symetrická matice taková, že při Gaussově eliminaci nemusíme prohazovat řádky, pak existuje dolní trojúhelníková matice L s jednotkami na hlavní diagonále a diagonální matice $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ s pivoty na hlavní diagonále, pro které platí

$$A = LDL^T$$

důkaz: z diskuse před formulací tvrzení plyne, že

$$A = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1} D (E_1^T E_2^T \cdots E_k^T)^{-1}$$

stačí tedy položit $L = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1}$

matice L je dolní trojúhelníková s jednotkami na hlavní diagonále, neboť je inverzní k dolní trojúhelníkové matici s jednotkami na hlavní diagonále; a dále

$(E_1^T \cdots E_k^T)^{-1} = ((E_k \cdots E_1)^T)^{-1} = ((E_k \cdots E_1)^{-1})^T = L^T$

Příklad

rozkladu symetrické matice A z předchozí věty se také říká *symetrický rozklad* matice A

příklad: zkusíme najít symetrický rozklad $A = LDL^T$ pro reálnou symetrickou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

stejně jako při diagonalizaci symetrické matice pomocí symetrických elementárních úprav budeme upravovat matici

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

v pravém bloku budeme počítat součin elementárních matic $E_k \cdots E_2 E_1$ a matici L pak najdeme jako $L = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1}$

Výpočet

pokud se v průběhu výpočtu nikde neobjeví nulový pivot, najdeme symetrický rozklad

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

takže $D = \mathrm{diag}(1, 1, -2$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a tedy $A = LDL^T$

Doplňování kvadratické formy na čtverce

ukážeme si na předchozím příkladu metodu, jak diagonalizovat kvadratickou formu pomocí „doplňování na čtverce“

matice A definuje bilineární formu f na prostoru $\mathbb{R}^3$ a ta vytváří kvadratickou formu

$$f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2,$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$

Lagrange (kolem roku 1750) používal při studiu vlastností kvadratických forem následující postup

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2 \end{aligned}$$

Vztah doplňování na čtverce a symetrických *eú*

všimněme si, že poslední výpočet přesně kopíruje diagonalizaci matice A pomocí elementárních symetrických úprav

koeficienty u jednotlivých čtverců se rovnají diagonálním prvkům matice výsledné matice D

zavedeme-li pro vektor $\mathbf{x}$ nové souřadnice předpisem

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

jsou nové souřadnice (x_1', x_2', x_3') souřadnicemi vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k nějaké bázi C, pro kterou platí

$$[\mathbf{x}]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\mathbf{x}]_K = [id]^K_C [\mathbf{x}]_K$$

Dokončení

Vztah doplňování na čtverce a symetrických *eú* – dokončení

v souřadnicích $[\mathbf{x}]_C = (x_1', x_2', x_3')^T$ má kvadratická forma f_2 vyjádření
$$f_2(\mathbf{x}) = (x_1')^2 + (x_2')^2 - 2(x_3')^2$$
a báze C je tedy f-ortogonální

při zdůvodňování metody symetrických eekvivalentních úprav jsem spočítali, že součin elementárních matic $E_k \cdots E_2 E_1$, které jsme použili při diagonalizaci bilineární formy f zadané maticí $A = [f]_K$, se rovná matici $\left([id]_K^C\right)^T$

matice k ní inverzní $(E_k \cdots E_2 E_1)^{-1}$ se tedy rovná
$$\left(([id]_K^C)^T\right)^{-1} = \left(([id]_K^C)^{-1}\right)^T = ([id]_C^K)^T$$

Různé f-ortogonální báze bilineárních forem

je-li f bilineární forma na konečně generovaném prostoru $\mathbf{U}$ nad $\mathbf{T}$ a $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ f-ortogonální báze $\mathbf{U}$, pak
$$[f]_C = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$
vynásobíme-li každý z vektorů $\mathbf{v}_i$ nenulovým skalárem λ_i, dostaneme bázi $B = (\lambda_1\mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{v}_n)$ prostoru $\mathbf{U}$, pro kterou platí
$$f(\lambda_i\mathbf{v}_i, \lambda_j\mathbf{v}_j) = \lambda_i\lambda_j\, f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$$
pro každé i, j

báze B je proto také f-ortogonální a
$$[f]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1^2 d_1, \lambda_2^2 d_2, \ldots, \lambda_n^2 d_n)$$

Ortogonální báze bilineárních forem nad $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$

je-li $\mathbf{T} = \mathbb{C}$, můžeme zvolit $\lambda_i = (\sqrt{d_i})^{-1}$ pro každé nenulové d_i

bilineární forma f má potom vzhledem k bázi B diagonální matici, která má na hlavní diagonále pouze čísla 1 a 0, počet jednotek se rovná hodnosti $rank(f)$

je-li $\mathbf{T} = \mathbb{R}$, volbou $\lambda_i = \lambda_i = (\sqrt{|d_i|})^{-1}$ pro nenulové d_i dostaneme f-ortogonální bázi B takovou, že diagonální matice $[f]_B$ má na hlavní diagonále pouze prvky 1 nebo -1 nebo 0

uspořádáme-li vhodně prvky báze B, dostaneme
$$[f]_B = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1, -1, \ldots, -1, 0, 0, \ldots, 0)$$
počet nenulových prvků na hlavní diagonále je hodnost $rank(f)$ bilineární formy f a je tedy formou f určený jednoznačně, nezávisí na volbě báze B

Věta o setrvačnosti bilineárních forem

o něco překvapivější je, že také počty prvků rovných 1 a prvků rovných -1 nezávisí na volbě báze B a jsou formou f určené jednoznačně

věta: je-li f symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n a C, C' báze $\mathbf{U}$ takové, že
$$[f]_C = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\times}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{l\times}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m\times})$$
$$[f]_{C'} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k'\times}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{l'\times}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m'\times})$$
pak $k = k', l = l', m = m'$

Důkaz věty o setrvačnosti 1

víme už, že $m = m' = rank(f)$

označíme si prvky bází C a C'

$$C = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$$

$$C' = (\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_{k'}, \mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_{l'}, \mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_m)$$

důkaz rovnosti $k = k'$ uděláme sporem,budeme předpokládat, že naopak $k > k'$ a označíme si podprostory

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle, \qquad \mathbf{W} = \langle \mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_{l'}, \mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_m \rangle$$

potom $\dim \mathbf{V} = k$, $\dim \mathbf{W} = l' + m = n - k'$,
$\dim(\mathbf{V} + \mathbf{W}) \leq \dim \mathbf{U} = n$

podle věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů platí

$$\dim(\mathbf{V} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{V} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{V} + \mathbf{W}) \geq k + n - k' - n = k - k' > 0$$

Důkaz věty o setrvačnosti 2

existuje tedy nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V} \cap \mathbf{W}$; protože $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, pro jeho souřadnice

$$[\mathbf{x}]_C = (a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_l, c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$$

platí $b_1 = \cdots = b_l = c_1 = \cdots = c_m = 0$, a protože $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, aspoň jedno z čísel a_i je různé od 0; proto

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}) &= 1a_1^2 + \cdots + 1a_k^2 + (-1)b_1^2 + \cdots + (-1)b_l^2 + 0c_1^2 + \cdots + c_m^2 \\ &= a_1^2 + \cdots + a_k^2 > 0 \end{aligned}$$

podobně z $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$ plyne, že pro souřadnice

$$[\mathbf{x}]_{C'} = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_{k'}, b'_1, b'_2, \ldots, b'_{l'}, c'_1, c'_2, \ldots, c'_m)^T$$

platí $a'_1 = a'_2 = \cdots = a'_{k'} = 0$; pak

Důkaz věty o setrvačnosti – dokončení

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}) &= (-1)(b'_1)^2 + \cdots + (-1)(b'_{l'})^2 + 0(c'_1)^2 + \cdots + (c'_m)^2 \\ &= -(b'_1)^2 - (b'_2)^2 - (b'_{l'})^2 \leq 0 \end{aligned}$$

což je spor s před chvilkou dokázaným $f_2(\mathbf{x}) > 0$

musí proto platit $k \leq k'$ a ze symetrie plyne rovněž $k' \leq k$

proto $k = k'$, a protože už víme, že $m' = m$, platí také $l = l'$

definice: je-li f symetrická bilineární forma na reálném konečně generovaném vektorovém prostoru $\mathbf{U}$, pak číslo k (resp. l) z předchozí věty nazýváme *pozitivní (resp. negativní) index setrvačnosti formy* f, značíme $n_+(f)$ (resp. $n_-(f)$); číslo m z předchozí věty nazýváme *nulita* formy f a označujeme je $n_0(f)$; *signaturou formy* f rozumíme trojici $(n_0(f), n_+(f), n_-(f))$

Příklad

najdeme signaturu bilineární formy f na $\mathbb{R}^3$ s maticí

$$A = [f]_K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Symetrickými elementárními úpravami dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

signatura bilineární formy f je tedy $(1, 1, 1)$

Jiný příklad

jinou možností je doplnit kvadratickou formu f_2 vytvořenou bilineární formou f na čtverce

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}) &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= 2\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}\right)^2 - \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_3^2}{2} + x_2x_3 \\ &= 2\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 \end{aligned}$$

opět dostáváme signaturu $(1,1,1)$

jiný příklad: spočítáme signaturu kvadratické formy $f_2((x_1,x_2)^T) = 4x_1x_2 + x_2^2$ na prostoru $\mathbb{R}^2$

Dokončení jiného příkladu

(symetrická) bilineární forma f, která vytváří kvadratickou formu f_2, má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalizujeme matici A pomocí *seú*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -4/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4/5 \end{pmatrix}$$

signatura formy f (nebo f_2) je tedy $(0,1,1)$

stejně tak jsme mohli diagonalizovat kvadratickou formu f_2

$$f_2((x_1,x_2)^T) = 4x_1x_2 + x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2 - 4x_1^2$$

a zjistit totéž

Pozitivně definitní a semidefinitní bilineární formy

definice: (symetrická) bilineární forma f na reálném prostoru $\mathbf{U}$ se nazývá *pozitivně definitní*, platí-li

$$f_2(\mathbf{x}) > 0$$

pro každý nenulový prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, a nazývá se *pozitivně semidefinitní*, pokud $f_2(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$

tvrzení: (symetrická) bilineární forma f na reálném prostoru $\mathbf{U}$ dimenze n je pozitivně definitní právě když $n_+(f) = n$

důkaz: vezmeme f-ortogonální bázi B prostoru $\mathbf{U}$, pak

$$[f]_B = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

pro kvadratickou formu f_2 vytvořenou formou f pak platí

$$f_2(\mathbf{x}) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ se souřadnicemi $[\mathbf{x}]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

Dokončení důkazu

$\Rightarrow$: je-li f pozitivně definitní, pak zvolíme $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ tak, aby platilo $[\mathbf{x}]_B = \mathbf{e}_i$, a dostaneme

$$0 < f_2(\mathbf{x}) = d_i \quad \text{pro každé} \quad i = 1, \ldots, n$$

$\Leftarrow$: je-li naopak $d_i > 0$ pro všechna i, pak $f_2(\mathbf{x}) > 0$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$

poznámka 1: podobně lze pomocí signatury charakterizovat pozitivně semidefinitní formy; forma f na $\mathbf{U}$ je pozitivně semidefinitní právě když

poznámka 2: podíváme-li se na definici skalárního součinu, pak vidíme, že skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ je totéž, co pozitivně definitní (symetrická) bilineární forma na $\mathbf{U}$

Srovnání s pozitivně (semi)definitními operátory

na str. 9-237 jsme definovali pozitivně (semi)definitní operátory

tvrzení: symetrický operátor $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ na reálném prostoru $\mathbf{U}$ se skalárním součinem je pozitivně (semi)definitní právě když je bilineární forma

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{y}) \rangle$$

symetrická a pozitivně (semi)definitní

důkaz: je-li f pozitivně (semi)definitní operátor, snadno ověříme, že potom je g symetrická bilineární forma; například symetrie g plyne z

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{y}) \rangle = \langle f(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle = g(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

použili jsme symetrii operátoru f ve druhé rovnosti a symetrii skalárního součinu ve třetí

Srovnání s pozitivně (semi)definitními maticemi

dokončení důkazu: dále spočítáme, že

$$g_2(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} \,|\, f(\mathbf{x}) \rangle$$

a odtud je už ekvivalence v tvrzení přímo vidět

tvrzení: symetrická bilineární forma f na konečně generovaném reálném prostoru $\mathbf{U}$ je pozitině definitní právě když je pozitivně definitní matice $[f]_B$ formy f vzhledem k lib. bázi B prostoru $\mathbf{U}$

důkaz: pro každou bázi B prostoru $\mathbf{U}$ je $f_2(\mathbf{x}) = ([\mathbf{x}]_B)^T \, [f]_B [\mathbf{x}]_B$

pro nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ proto platí $f_2(\mathbf{x}) > 0$ právě když $([\mathbf{x}]_B)^T \, [f]_B [\mathbf{x}]_B > 0$

protože souřadnice $[\mathbf{x}]_B$ nabývají všech možných hodnot $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\dim \mathbf{U}}$, je f pozitině definitní forma právě když je $[f]_B$ pozitivně definitní matice

Některé charakterizace pozitivně definitních matic

tvrzení: symetrická reálná matice A řádu n je pozitivně definitní právě když bilineární forma $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \, \mathbf{y}$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$

aplikujeme-li větu na str. 9-240 na operátor $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ určený symetrickou reálnou maticí A řádu n, dostaneme další charakterizace pozitivně definitních matic

tvrzení: symetrická reálná matice A řádu n je pozitivně definitní právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná

pozitivně definitní matice se objevují při řešení řady praktických úloh, proto je pro ně známa řada dalších ekvivalentních definic

Další vlastnosti pozitivně definitních matic

víme, že každá reálná symetrická matice A řádu n je ortogonálně diagonalizovatelná, str. 9-232

speciálně má tedy n vlastních čísel včetně násobností

tvrzení: pokud se charakteristický polynom matice A řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$ rozkládá nad tělesem $\mathbf{T}$ na součin lineárních činitelů, pak

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou všechna vlastní čísla matice A včetně násobností

důkaz: víme, že $\det A$ se rovná absolutnímu členu p_A, str. 9-42

absolutní člen polynomu $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$

se také rovná součinu $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Další ekvivalentní definice pozitivně definitních matic

definice: *hlavním minorem* čtvercové matice A rozumíme matici A_i tvořenou prvními i řádky a prvními i sloupci matice A

tvrzení: pro symetrickou reálnou matici A je ekvivalentní

1. A je pozitivně definitní
2. determinanty všech hlavní minorů matice A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)
3. Gaussova eliminace použitá na matici A může proběhnout bez prohazování řádků a všechny pivoty vyjdou kladné
4. $A = LDL^T$ pro nějakou dolní trojúhelníkovou matici L s jednotkami na hlavní diagonále a nějakou diagonální matici D s kladnými čísly na hlavní diagonále
5. $A = RR^T$ pro nějakou regulární dolní trojúhelníkovou matici R (Choleského rozklad)

Začátek důkazu

důkaz: 1. $\Rightarrow$ 2. ukážeme, že každý hlavní minor A_i matice A je pozitivně definitní

zvolíme libovolný nenulový vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^i$ a doplníme jej nulami na vektor $\mathbf{x}^T = (\mathbf{y}^T|\mathbf{o}^T) \in \mathbb{R}^n$

matice A je pozitivně definitní, platí proto

$$0 < \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (\mathbf{y}^T|\mathbf{o}^T)A(\mathbf{y}^T|\mathbf{o}^T)^T = \mathbf{y}^T A_i \mathbf{y},$$

což dokazuje, že hlavní minor A_i je také pozitivně definitní

protože je pozitivně definitní, má kladná vlastní čísla (mohou být různá od vlastních čísel matice A) a tedy kladný determinant podle tvrzení na str. 10-67

Pokračování důkazu

2. $\Rightarrow$ 3. předpokládáme, že všechny hlavní minory A_i matice $A = (a_{ij})$ mají kladné determinanty

speciálně to znamená, $a_{11} = \det A_1 > 0$, první pivot je kladný

první cyklus Gaussovy eliminace můžeme proto provést bez prohazování řádků, prvek a_{11} zůstane nezměněný

po skončení prvního cyklu bude minor A_2 převedený pomocí *eřú* do *řot* B_2

protože má A_2 kladný determinant, je det $0 < \det B_2 = a_{11}b_{22}$ a tedy $b_{22} > 0$, druhý pivot také vyjde kladný

druhý cyklus Gaussovy eliminace tedy může opět proběhnout bez prohazování řádků

Druhé pokračování důkazu

předpokládejme, že pro nějaké kladné $i < n$ je po $(i-1)$-ním cyklu převeden do *řot* minor A_i a všechny pivoty na místech $(1,1), \ldots, (i,i)$ jsou kladné

během i-tého cyklu přičítáme násobky i-tého řádku k řádkům pod ním, dosud nalezené pivoty se tím nezmění

po prvním kroku i-tém cyklu je vynulovaný rovněž prvek na místě $(i+1, i)$ a minor A_{i+1} je převedený do *řot*, další kroky v i-tém cyklu *GE* na tom nic nezmění

$\det A_{i+1}$ je kladný podle předpokladu a rovný součinu dosud nalezených pivotů (včetně nově nalezeného pivotu na místě $(i+1, i+1)$)

protože jsou všechny dříve nalezené pivoty kladné, musí být kladný i pivot na místě $(i+1, i+1)$

Zbývající implikace

3. $\Rightarrow$ 4. plyne z tvrzení o symetrickém rozkladu na str. 10-46, protože předpokládáme navíc, že všechny pivoty jsou kladné

4. $\Rightarrow$ 5. protože v symetrickém rozklad $A = L\,D\,L^T$ platí $d_i > 0$ pro každý doagonální prvek matice $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, platí také

$$A = L\,D^{1/2} D^{1/2} L^T = (L\,D^{1/2})(L\,D^{1/2})^T$$

kde $D^{1/2} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})$; nyní stačí položit $R = L\,D^{1/2}$, matice R je regulární coby součin dvou regulárních matic a dolní trojúhelníková coby součin dvou dolních trojúhelníkových matic

5. $\Rightarrow$ 1. protože je R regulární, platí $R^T\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, potom

$$\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x} = \mathbf{x}^T R^T R\,\mathbf{x} = \|R^T\mathbf{x}\| > 0$$

což dokazuje, že A je pozitivně definitní

Ortonormální báze reálné bilineární formy

při studiu vlastností geometrického útvaru definovaného symetrickou bilineární formou f (resp. jí vytvořenou kvadratickou formou f_2) na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{U}$ se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ je výhodné najít f-ortogonální bázi C, která je současně ortonormální bází vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle\,|\,\rangle$

taková f-ortogonální báze vždy existuje, nemůžeme ale už požadovat, aby prvky na hlavní diagonále $[f]_C$ byly pouze $0, 1, -1$

věta: je-li $\mathbf{U}$ reálná vektorový prostor konečné dimenze se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ a f symetrická bilineární forma na $\mathbf{V}$, pak existuje f-ortogonální báze C prostoru $\mathbf{U}$, která je současně ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle\,|\,\rangle$

Důkaz

důkaz: pro skalární součin $\langle\,|\,\rangle$ existuje ortonormální báze B prostoru $\mathbf{U}$ podle důsledku 1 na str. 7-47

označíme $A = [f]_B$, matice A je symetrická

podle spektrální věty pro symetrické operátory/matice na str. 9-232 existuje ortonormální báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ složená z vlastních vektorů matice A

matice $R = (\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_n)$ je tedy ortogonální a platí, že $R^{-1}A\,R = R^T A\,R = D$ je diagonální matice

zvolíme bázi $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \in \mathbf{U}$ tak, aby platilo $[\mathbf{v}_i]_B = \mathbf{u}_i$

protože B je ON báze v $\mathbf{U}$, platí

$$\langle \mathbf{v}_i\,|\mathbf{v}_j\rangle = ([\mathbf{v}_i]_B)^T\,[\mathbf{v}_j]_B = \mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_j = \delta_{ij}$$

báze C je proto také ortonormální báze v $\mathbf{U}$

Dokončení důkazu

platí, že matice přechodu od báze C k bázi B je $[id_U]^C_B = R$, proto jsme bázi C zvolili tak, jak jsme ji zvolili

pro matici $[f]_C$ potom platí

$$[f]_C = \left([id]^C_B\right)^T [f]_B\,[id]^C_B = R^T A\,R = D$$

ON báze C se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ je proto také f-ortogonální

poznámka: protože skalární součin na reálném prostoru $\mathbf{U}$ je totéž, co pozitivně definitní symetrická bilineární forma g na prostoru $\mathbf{U}$, plyne z právě dokázané věty, že

jsou-li f, g dvě symetrické bilineární formy na reálném prostoru $\mathbf{U}$ konečné dimenze, z nichž **jedna je pozitivně definitní**, pak existuje báze v $\mathbf{U}$, která je současně f-ortogonální a g-ortogonální

První příklad – 1

příklad: jak vypadá množina bodů v $\mathbb{R}^3$ splňujících rovnici

$$x_3 = -x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2 \quad ?$$

jde o graf kvadratické formy

$$f_2((x_1, x_2)^T) = -x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2$$

vytvořené symetrickou bilineární formou

$$f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = -x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_2 - 3x_2y_2$$

která má vzhledem ke kanonické bázi K v $\mathbb{R}^2$ matici

$$[f]_K = A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -3 \end{pmatrix}$$

První příklad – 2

symetrickými elementárními úpravami ji převedeme do diagonální matice $\mathrm{diag}(-1, -1)$, forma f má signaturu $(0, 0, 2)$

existuje báze B v $\mathbb{R}^2$ taková, že $[f]_B = \mathrm{diag}(-1, -1)$

pro vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ označíme souřadnice $[\mathbf{x}]_B = (x_1', x_2')$, potom

$$f_2((x_1, x_2)^T) = ([\mathbf{x}]_B)^T \, [f]_B \, [\mathbf{x}]_B = -(x_1')^2 + (x_2')^2$$

v bázi B graf funkce f_2 vypadá jako rotační paraboloid obrácený směrem dolů

báze B ale nemusí bát ortogonální ani její vektory nemusí mít normu 1, takže vzhledem k nějaké ortonormální bázi je paraboloid „lineárně deformovaný“

ve skutečnosti jde o eliptický paraboloid

První příklad – také jsme mohli

doplnit kvadratickou formu f_2 na čtverce

$$x_3 = f_2((x_1, x_2)^T) = -x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2 = -\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{11}{4}x_2^2$$

vidíme znovu, že signatura f je $(0, 0, 2)$

zavedeme-li nové souřadnice pro vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = [id]_B^K \, [\mathbf{x}]_K$$

dostaneme opět vyjádření $f_2((x_1, x_2)^T) = -(x_1')^2 - (x_1')^2$

vektory báze B najdeme ve sloupcích matice

$$[id]_K^B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

Druhý příklad – 1

příklad: chceme zjistit, jak vypadá (útvar) množina bodů $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ splňujících rovnici

$$10x_1^2 + 13x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 = 9$$

na levé straně mámě opět kvadratickou formu f_2 na $\mathbb{R}^3$ vytvořenou symetrickou bilineární formou f s maticí

$$[f]_K = A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

vzhledem ke kanonjické bázi K v $\mathbb{R}^3$

pomocí symetrických elementárních úprav opět zjistíme signaturu f, rovná se $(0, 3, 0)$

Druhý příklad – 2

vzhledem k nějaké bázi B je tedy útvar tvořený všemi body $[\mathbf{x}]_B = (x_1', x_2', x_3')^T$, které splňují rovnici

$$(x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 = 9$$

nyní najdeme ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$, která bude současně diagonalizovat formu f

budeme postupovat podle důkazu věty o ortonormální diagonalizaci

jako ortonormální bázi B v $\mathbb{R}^3$ zvolíme kanonickou bázi K, pak

$$[f]_K = A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

najdeme ON bázi C v $\mathbb{R}^3$ složenou z vlastních vektorů matice A

její vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ a $\lambda_3 = 18$

Druhý příklad – 3

v prostoru M_9 vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 9 zvolíme nějakou ON bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ a přidáme normalizovaný vlastní vektor $\mathbf{u}_3$ příslušný vlastnímu číslu 18, např.

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

dostali jsme tak ON bázi $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ pro kterou platí $[f]_C = \mathrm{diag}(9, 9, 18)$, takže vzhledem k bázi C má náš útvar rovnici

$$9(x_1'')^2 + 9(x_2'')^2 + 18(x_3'')^2 = 9$$

kde vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ má souřadnice $[\mathbf{x}]_C = (x_1'', x_2'', x_3'')^T$; takže

takže $\qquad (x_1'')^2 + (x_2'')^2 + \sqrt{2}(x_3'')^2 = 1$

náš útvar je tedy elipsoid s poloosami $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ a $(\sqrt{2}/2)\mathbf{u}_3$

Třetí příklad – 1

příklad: budeme zkoumat množinu bodů $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, jejichž souřadnice splňují rovnici

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 7 = 0$$

levá strana je součtem kvadratické formy $f_2((x_1, x_2)^T) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$, lineární formy $h((x_1, x_2)^T) = -10x_1 - 14x_2$ a konstanty 7

kvadratická forma f_2 je vytvořená bilineární formou f s maticí (vzhledem ke kanonické bázi K v $\mathbb{R}^2$)

$$A = [f]_K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

nejdříve najdeme ortonormální bázi C v $\mathbb{R}_2$, která je současně f-ortogonální

Třetí příklad – 2

vlastní čísla matice A jsou 2 a 4, bázi C vybereme z normovaných vlastních vektorů matice A, např.

$$C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

rovnici definující útvar vyjádříme v souřadnicích $(x_1', x_2')^T = [\mathbf{x}]_C$

protože $[f]_C = \mathrm{diag}(2, 4)$, platí

$$f_2(\mathbf{x}) = ([\mathbf{x}]_C)^T [f]_C [\mathbf{x}]_C = 2(x_1')^2 + 4(x_2')^2$$

matice lineární formy h vzhledem k bázi B (a $K_1 = (1)$) je

$$\begin{aligned} [h]^C_{(1)} &= [h]^K_1 [id]^C_K = (-10, -14)\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2}(2, -12) \end{aligned}$$

Třetí příklad – 3

a tedy
$$h(\mathbf{x}) = [h]^C_{(1)}[\mathbf{x}]_C = 2\sqrt{2}x_1' - 12\sqrt{2}x_2'$$

studovaný útvar je tedy množina všech bodů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, které mají souřadnice $[\mathbf{x}]_C = (x_1', x_2')^T$ splňující rovnici

$$2(x_1')^2 + 4(x_2')^2 + 2\sqrt{2}x_1' - 12\sqrt{2}x_2' + 7 = 0$$

doplníme na čtverce

$$2\left(x_1' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4\left(x_2' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 12$$

a upravíme
$$\frac{\left(x_1' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{6} + \frac{\left(x_2' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3} = 1$$

Třetí příklad – 4

vzhledem k bázi C jde tedy o elipsu se středem $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})^T$ a poloosami délek $\sqrt{6}$ a $\sqrt{3}$

vzheledem ke kanonické bázi K má střed elipsy souřadnice

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{u}_2 = (1,2)^T$$

hlavní poloosou délky $\sqrt{6}$ ve směru $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$ a vedlejší poloosou délky $\sqrt{3}$ ve směru přímky $\langle \mathbf{u}_2 \rangle$

Kapitola 11

Afinní geometrie

Afinní geometrie - obsah

- *Soustavy souřadnic*
- *Podprostory afinních prostorů*
- *Afinní zobrazení*

Soustavy souřadnic - obsah

Definice afinního prostoru

definice: *afinní prostor* $\mathbf{A}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ je neprázdná množina A (její prvky nazýváme *body*) spolu s vektorovým prostorem $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ a operací $+ : A \times V \to A$, která každému bodu $a \in A$ a vektoru $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ přiřadí bod $a + \mathbf{v} \in A$ a která splňuje axiomy

- pro každý bod $a \in A$ a každá dva vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ platí

$$a + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (a + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

- pro každý bod $a \in A$ platí $a + \mathbf{o} = a$
- pro každou uspořádanou dvojic bodů $a, b \in A$ existuje jednoznačně určený vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, pro který platí $a + \mathbf{v} = b$

vektor $\mathbf{v}$ ze třetí podmínky označujeme $b - a$

Poznámky k definici afinního prostoru

vektorový prostor $\mathbf{V}$ v tomto kontextu nazýváme *prostor vektorů* afinního prostoru $\mathbf{A}$

upozornění: nedefinovali jsme součet bodů afinního prostoru $\mathbf{A}$

z první podmínky plyne, že nemusíme psát závorky v součtu

$$a + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

zvolíme-li v afinním prostoru $\mathbf{A}$ pevný bod $a \in A$, pak zobrazení

$$\mathbf{v} \mapsto a + \mathbf{v}$$

je bijekce mezi body vektory z prostoru vektorů $\mathbf{A}$ a body tohoto prostoru

Jednoduché důsledky definice afinního prostoru

je-li $\mathbf{A}$ afinní prostor a $\mathbf{V}$ příslušný vektorový prostor, pak pro každé body $a, b, c, d \in A$ a každé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

- $a - b = -(b - a)$
- $(a + \mathbf{u}) - (b + \mathbf{v}) = (a - b) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
- $(a - b) + (c - d) = (a - d) + (c - b)$
- $(a - b) + (b - c) = (a - c)$

Dimenze afinního prostoru

definice: *dimenzi afinního prostoru* definujeme jako dimenzi jeho prostoru vektorů

afinní prostor dimenze 0 je jednoprvková množina $\{a\}$ s operací $a + \mathbf{o} = a$

afinní prostor dimenze 1 je obvykle nazýván *afinní přímka*

z výše uvedené bijekce plyne, že afinní přímka nad $\mathbb{R}$ je množina bodů $\{a + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}$, kde $\mathbf{V}$ je vektorový prostor dimenze 1 nad $\mathbb{R}$

afinní přímkou je například následující podmnožina $\mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

tato afinní přímka **není podprostorem** vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$

Afinní rovina

afinní prostor dimenze 2 nazýváme také *afinní rovina*

s využitím téže bijekce snadno ověříme, že následující podmnožina $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

je afinní rovina

opět k bodu $(1, 2, 3)^T$ přičítáme vektory z prostoru $\langle (-1, 1, -1)^T, (2, -3, 1)^T \rangle$ dimenze 2 nad $\mathbb{R}$

Aritmetické afinní prostory

obecně platí, že je-li $\mathbf{A}$ afinní prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{V}$ příslušný vektorový prostor, pak pro každý podprostor $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ a bod $a \in A$ je množina

$$\{a + \mathbf{w} : \mathbf{w} \in \mathbf{W}\} \subseteq A$$

spolu s operacemi převzatými z $\mathbf{A}$ opět afinní prostor, takto definovaným afinním prostorům říkáme *podprostory* prostoru $\mathbf{A}$

nejjednodušším příkladem afinního prostoru nad obecným tělesem $\mathbf{T}$ jsou *aritmetické afinní prostory*, které budeme značit také $\mathbf{T}^n$

jejich body tvoří množina $A = T^n$, příslušný vektorový prostor je aritmetický prostor $\mathbf{T}^n$ a sčítání bodu s vektorem je převzaté z prostoru $\mathbf{T}^n$

uvedené příklady ukazují, že afinní aritmetický prostor $\mathbf{T}^n$ má jiné podprostory než aritmetický vektorový prostor $\mathbf{T}^n$

Afinní prostory s měřením vzdáleností

chceme-li v afinním prostoru $\mathbf{A}$ měřit vzdálenosti a úhly, potřebujeme mít v prostoru vektorů $\mathbf{V}$ skalární součin

definice: *afinním eukleidovským prostorem* (resp. *afinním unitárním prostorem*) rozumíme afinní prostor A nad tělesem $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) spolu se skalárním součinem $\langle\,|\,\rangle$ na prostoru vektorů $\mathbf{V}$ afinního prostoru $\mathbf{A}$

definice: *vzdálenost* dvou bodů $a, b \in A$ v afinním eukleidovském prostoru $\mathbf{A}$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$ rozumíme číslo $\|b - a\|$, kde $\|\cdot\|$ je norma definovaná skalárním součinem na $\mathbf{V}$

Soustava souřadnic v afinním prostoru – 1

definice soustavy souřadnic v afinním prostoru **A** odpovídá tomu, co jí normálně rozumíme

zvolíme si nějaký bod $a \in A$ a nazveme jej *počátek souřadnic* a jednotkové vektory ve směru souřadných os, jinými slovy bázi $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ ve vektorovém prostoru **V** příslušném k **A**

definice: *soustavou souřadnic* v afinním prostoru **A** dimenze n nad tělesem **T** s prostorem vektorů **V** rozumíme dvojici $S = (a, B)$, kde $a \in A$ a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze v prostoru **V**

souřadný systém $S = (a, B)$ v afinním prostoru **A** nám dovoluje určit souřadnice každého bodu $a \in A$ a vektoru $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

pokud jde o vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, definujeme jeho souřadnice vzhledem k $S = (a, B)$ jako

$$[\mathbf{v}]_S = [\mathbf{v}]_B$$

Soustava souřadnic v afinním prostoru – 2

v případě bodu $b \in A$ definujeme jeho souřadnice vzhledem k $S = (a, B)$ jako

$$[b]_S = [b - a]_S = [b - a]_B$$

budeme také psát $[\mathbf{v}]_{(a,B)}$ a $[b]_{(a,B)}$

naše definice souřadnic odpovídá geometrické intuici

pro bod $b \in A$ vezmeme jednoznačně určený vektor $\mathbf{v}$ takový, že $a + \mathbf{v} = b$ (tj. vektor $\mathbf{v} = b - a$)

souřadnice bodu b jsou potom jednoznačně určená n-tice $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ prvků tělesa **T**, pro kterou platí

$$b = a + \mathbf{v} = a + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_n\mathbf{u}_n$$

Příklad

jednoduché důsledky: protože $a = a + \mathbf{o}$, platí $[a]_{a,B} = (0, 0, \dots, 0)^T$ pro jakoukoliv bázi B vektorového prostoru **V**

dále $[a + \mathbf{u}_i]_{(a,B)} = \mathbf{e}_i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$

příklad: v aritmetickém afinním prostoru $\mathbb{R}^3$ zvolíme souřadný systém

$$S = (a, B), \quad \text{kde} \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

najdeme souřadnice vektoru $\mathbf{v} = (-1, 3)^T$ a bodu $b = (-1, 3)^T$ vzhledem k S

Příklad – řešení

pro nalezení souřadnic $(t_1, t_2)^T$ vektoru $\mathbf{v}$ musíme řešit soustavu

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

pro nalezení souřadnic $(t_1, t_2)^T$ bodu $(1, 3)^T$ musíme najít souřadnice vektoru $b - a = (-1, 3)^T - (3, 2)^T = (-4, 1)^T$, tj. řešit soustavu

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

můžeme to udělat najednou pomocí úpravy matice

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

vyjde $[\mathbf{v}]_{(a,B)} = (7, 4)^T$ a $[b]_{(a,B)} = (6, 5)^T$

Kanonická a kartézská spoustava souřadnic

definice: *kanonická soustava souřadnic* v afinním aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$ je soustava souřadnic

$$K = ((0,0,\ldots,0)^n, (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n))$$

pro kanonickou soustavu souřadnic K platí, že $[a]_K = a$ pro každý bod $a \in T^n$ a $[\mathbf{v}]_K = \mathbf{v}$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{T}^n$

definice: *kartézská soustava souřadnic* v afinním euklidovském prostoru $\mathbf{A}$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$ je souřadná soustava $(a, (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n))$, kde $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze $\mathbf{V}$

v kartézské souřadné spoustavě $(a, (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n))$ má každý vektor $\mathbf{u}_i$ normu 1 a vektory báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ jsou navzájem kolmé

Operace v afinním prostoru pomocí souřadnic

tvrzení: je-li (a, B) soustava souřadnic v afinním prostoru $\mathbf{A}$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak pro libovolné body $b, c \in A$ a vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ platí

- $[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_{(a,B)} = [\mathbf{v}]_{(a,B)} + [\mathbf{w}]_{(a,B)}$
- $[t\mathbf{v}]_{(a,B)} = t\,[\mathbf{v}]_{(a,B)}$
- $[b + \mathbf{v}]_{(a,B)} = [b]_{(a,B)} + [\mathbf{v}]_{(a,B)}$
- $[b - c]_{(a,B)} = [b]_{(a,B)} - [c]_{(a,B)}$

je-li navíc $\mathbf{A}$ afinní euklidovský prostor a (a, B) kartézská souřadná soustava, pak

- $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle = [\mathbf{v}]_{(a,B)} \cdot [\mathbf{w}]_{(a,B)} = \left([\mathbf{v}]_{(a,B)}\right)^T [\mathbf{w}]_{(a,B)}$

Změna soustavy souřadnic

jsou-li $S = (a, B)$ a $S' = (a', B')$ dva systémy souřadnic v afinním prostoru $\mathbf{A}$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$, pak můžeme souřadnice bodů a vektorů v $\mathbf{A}$ vzhledem k souřadnému systému S přepočítat na souřadnice vzhledem k S' pomocí matice přechodu $[id]^B_{B'}$

tvrzení: jsou-li $S = (a, B)$ a $S' = (a', B')$ dva systémy souřadnic v afinním prostoru $\mathbf{A}$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$, pak každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a pro každý bod $b \in A$ platí

- $[\mathbf{v}]_{(a',B')} = [id]^B_{B'}\,[\mathbf{v}]_{(a,B)}$
- $[b]_{(a',B')} = [a]_{(a',B')} + [id]^B_{B'}\,[\mathbf{v}]_{(a,B)}$

Proč není definován součet bodů – 1

sčítání bodů v afinním prostoru není definované

je to proto, že jej rozumně definovat nejde

někoho by mohlo napadnout definovat součet bodů pomocí součtu jejich souřadnic

problém je v tom, že taková definice součtu závisí na systému souřadnic

například v afinním aritmetickém prostoru $\mathbf{A} = \mathbb{R}^2$ by pro body $a = (0,0)^T$ a $b = (1,0)^T$ při použití kanonického systému souřadnic K vyšlo

$$[a]_K = (0,0)^T,\ [b]_K = (1,0)^T,\ [a]_K + [b]_K = (1,0)^T$$

takže by se zdálo být rozumným definovat $a + b$ jako bod $(1,0)^T \in A$

Proč není definován součet bodů – 2

vzhledem k systému souřadnic $S = ((2,3)^T, ((1,0)^T, (0,-1)^T))$ by vyšlo

$$[a]_S = (-2,3)^T,\ [b]_S = (-1,3)^T,\ [a]_S + [b]_S = (-3,6)^T$$

a souřadnice $(-3,6)^T$ vzhledem k souřadnému systému S má bod

$$(-2,3)^T + (-3)(1,0)^T + 6(0,-1)^T = (-1,-3)^T$$

podobně lze odůvodnit, že součtem dvou bodů nemůže být ani žádný vektor

Někdy to vyjde

pro některé lineární kombinace bodů ale rozumná definice výsledku v podobě bodu nebo vektoru existuje

například pokud bychom v obou předchozích souřadných systémech počítali

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

vyšel by nám vždy stejný bod $(1/2, 0)^T$, tj. střed úsečky s krajními body a a b

podobně, kdybychom počítali

$$\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$$

pomocí obou souřadných systémů by nám vyšel bod $(1/3, 0)^T$

Lemma

lemma: je-li $\mathbf{A}$ afinní prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, $S = (a, B)$ systém souřadnic v $\mathbf{A}$, $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$, a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$, pak platí

$$\lambda_1[a_1]_S + \cdots + \lambda_k[a_k]_S = [a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)]_S$$

a tedy také

$$\lambda_1[a_1]_S + \cdots + \lambda_k[a_k]_S - [a_1]_S = [\lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)]_S$$

důkaz: jde o jednoduché cvičení v počítání se souřadnicemi

protože $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_k$

$$\begin{aligned} & \lambda_1[a_1]_S + \lambda_2[a_2]_S + \cdots + \lambda_k[a_k]_S \\ = \ & [a_1]_S + \lambda_2([a_2]_S - [a_1]_S) - \cdots - \lambda_k([a_k]_S - [a_1]_S)) \\ = \ & [a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)]_S \end{aligned}$$

druhá část plyne okamžitě z první

Afinní kombinace bodů

tvrzení: je-li $\mathbf{A}$ afinní prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ dimenze aspoň 1, jsou-li $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ libovolné body a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ libovolné skaláry, pak je ekvivalentní

1. bod $b \in A$ o souřadnicích $[b]_S = \lambda_1[a_1]_S + \lambda_2[a_2]_S + \cdots + \lambda_k[a_k]_S$ nezávisí na systému souřadnic S v $\mathbf{A}$
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$

pokud tato varianta nastává, pak platí

$$b - a_1 = \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)$$

důkaz 2. $\Rightarrow$ 1.: z předchozího lemmatu plyne, že v každém systému souřadnic platí

$$[b]_S = [a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)]_S$$

$a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)$ je bod v $\mathbf{A}$ nezávislý na S

Definice afinních kombinací

definice: je-li **A** afinní prostor nad tělesem **T**, jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_k$ libovolné body v **A** a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$, pak *afinní kombinací* bodů $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ rozumíme bod $b \in A$, pro který platí

$$[b]_S = \lambda_1[a_1]_S + \lambda_2[a_2]_S + \cdots + \lambda_k[a_k]_S$$

kde S je libovolná soustava souřadnic v **A**

označení: $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$

podle lemma na str.11-21 můžeme fakt, že b je afinní kombinace bodů $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ zapsat také jako

$$b = a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)$$

nebo jako

$$b - a_1 = \lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)$$

Alternativní vyjádření afinní kombinace

afinní kombinaci bodů $a_1, a_2, \ldots, a_k$ můžeme také vyjádřit symetricky

tvrzení: je-li **A** afinní prostor nad tělesem **T**, jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_k$ libovolné body v **A** a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$, pak afinní kombinace $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$ se rovná jednoznačně určenému bodu $b \in A$, pro který platí

$$\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b) = \mathbf{o}$$

důkaz: v **A** zvolíme nějakou soustavu souřadnic S

pak pro libovolný bod $b \in A$ platí

$$\begin{aligned} & [\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b)]_S \\ = & [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k]_S - [\lambda_1 b + \lambda_2 b + \cdots + \lambda_k b]_S \\ = & [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k]_S - [b]_S \end{aligned}$$

Fyzikální interpretace afinní kombinace

odtud plyne, že $\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b) = \mathbf{o}$ právě když $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$

poslední tvrzení říká, že afinní kombinace $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$ má v případě tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ a kladných koeficientů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ přirozený fyzikální význam

bod b je těžiště soustavy k hmotných bodů $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s hmotnostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$

Afinní kombinace dvou bodů na afinní přímce

vezmeme si dva různé body a, b na afinní přímce **A** nad tělesem **T**, příslušný vektorový prostor má dimenzi 1

vektor $b - a \neq \mathbf{o}$, takže pro každý bod c přímky **A** existuje právě jedno $\lambda \in \mathbf{T}$ takové, že $(c - a) = \lambda(b - a)$

takže $c = a + \lambda(b - a)$ a z nesymetrického vyjádření afinní kombinace na str. 11-23 plyne

$$c = (1 - \lambda)a + \lambda b$$

jednoznačnost vyjádření c jako afinní kombinace daných bodů a, b plyne z jednoznačnosti vyjádření

$$c = a + \lambda(b - a)$$

Dělení úsečky v afinním euklidovském prostoru

pro afinní kombinaci $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ platí
$\lambda_1(a - c) + \lambda_2(b - c) = \mathbf{o}$, neboli $\lambda_1(c - a) = \lambda_2(b - a)$

v euklidovském afinním prostoru to znamená, že poměr „orientovaných“ vzdáleností bodu c od bodů a, b je $\lambda_2 : \lambda_1$

to má také názorný fyzikální význam – jde o rovnováhu na páce

bod c leží uvnitř úsečky s koncovými body a, b, pokud $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, a leží vně této úsečky, pokud mají koeficienty λ_1, λ_2 různá znaménka

Příklad

body $a = (1, 2)^T$, $b = (5, 6)^T$ a $c = (2, 3)^T$ afinního aritmetického prostoru $\mathbb{R}^2$ leží na afinní přímce $(0, 1)^T + t(1, 1)^T$

můžeme proto vyjádřit bod c jako afinní kombinaci bodů a, b

body a, b, c máme zadané pomocí souřadnic vzhledem ke kanonickému souřadnému systému

hledáme čísla λ_1, λ_2, pro která platí $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ a

$$c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$$

porovnáním prvních složek dostaneme $\lambda_1 + 5\lambda_2 = 2$ a tedy $\lambda_1 = 3/4$, $\lambda_2 = 1/4$, tj.

$$c = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$$

Tvrzení o afinních kombinacích

tvrzení: je-li $\mathbf{A}$ afinní prostor dimenze $n \geq 1$ nad $\mathbf{T}$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$ a $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$, pak je ekvivalentní

1. každý bod $b \in A$ lze jednoznačně vyjádřit jako afinní kombinaci bodů $a_1, a_2, \dots, a_k$
2. posloupnost $(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1)$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}$ (speciálně také $k = n + 1$)

důkaz: v poznámce po definici afinní kombinace na str. 11-23 jsme uvedli, že nějaký bod $b \in A$ je afinní kombinací bodů $a_1, a_2, \dots, a_k$ s koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ právě když

$$b - a_1 = \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)$$

Začátek důkazu

1.$\Rightarrow$2. každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ určuje jednoznačně bod $b = a_1 + \mathbf{v}$

pro tento bod $b \in A$ pak platí $b - a_1 = \mathbf{v}$

z poslední rovnosti na předchozí straně pak plyne

$$\mathbf{v} = b - a_1 = \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1),$$

což dokazuje, že $\langle a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1 \rangle = \mathbf{V}$; je-li

$$\mathbf{o} = \mu_2(a_2 - a_1) + \mu_3(a_3 - a_1) + \cdots + \mu_k(a_k - a_1)$$

pro nějaké skaláry $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbf{T}$, položíme $\mu_1 = 1 - \mu_2 - \ldots - \mu_k$

Dokončení důkazu

pro bod $b = a_1$ pak dostáváme dvě vyjádření jako afinní kombinace bodů $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$b = a_1 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_k a_k$$

a dále $a_1 = 1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_k$

z předpokladu jednoznačnosti v bodě 1. plyne $\mu_2 = \cdots = \mu_k = 0$, což dokazuje, že posloupnost $(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1)$ je LN

2. $\Rightarrow$ 1. každý bod $b \in A$ můžeme vyjádřit jednoznačně jako součet $b = a_1 + \mathbf{v}$ pro nějaký vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

protože je $(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1)$ báze ve $\mathbf{V}$, existuje jednoznačné vyjádření

$$b = a_1 + \mathbf{v} = a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(3 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)$$

nyní stačí položit $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_k$ a použít začátek důkazu, což dokazuje jednoznačnost $b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$

Barycentrické souřadnice

definice: je-li $\mathbf{A}$ afinní prostor dimenze n nad $\mathbf{T}$ s prostorem vektorů $\mathbf{V}$, pak *barycentrická soustava souřadnic* v $\mathbf{A}$ je libovolná uspořádaná $(n+1)$-tice bodů $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ splňujících podmínku, že každý bod $b \in A$ lze jednoznačně vyjádřit jako afinní kombinaci

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$$

$(n+1)$-tici skalárů $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1})^T$ pak nazýváme *barycentrické souřadnice bodu b* vzhledem k $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$

z definice a tvrzení na str. 11-29 plyne, že $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ je barycentrická soustava souřadnic v $\mathbf{A}$ právě když

$$S = (a_1, (a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1))$$

je soustava souřadnic v $\mathbf{A}$

Převod mezi různými souřadnicemi

z důkazu implikace 2. $\Rightarrow$ 1. tvrzení na str. 11-29 také plyne, že platí-li pro nějaký bod $b \in A$

$$[b]_S = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n+1})^T,$$

pak jeho barycentrické souřadnice vzhledem k barycentrické soustavě souřadnice $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ jsou

$$(1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \cdots - \lambda_{n+1}, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n+1})^T$$

Lineární kombinace bodů odpovídající vektorům

jsou-li a, b body afinního prostoru $\mathbf{A}$, pak $b - a$ je jednoznačně určený vektor prostoru $\mathbf{A}$, pro který platí

$$b = a + (b - a)$$

tvrzení: je-li $\mathbf{A}$ afinní prostor nad $\mathbf{T}$, $a_1, \ldots, a_k \in A$ body v $\mathbf{A}$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ skaláry, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. vektor $\mathbf{v}$ o souřadnicích $[\mathbf{v}]_S = \lambda_1[a_1]_S + \cdots + \lambda_k[a_k]_S$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic S,
2. $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$

v takovém případě platí

$$\lambda_1[a_1]_S + \cdots + \lambda_k[a_k]_S = [\lambda_2(a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k(a_k - a_1)]_S$$

pro každou soustavu souřadnic S prostoru $\mathbf{A}$

Definice a různá vyjádření

definice: jsou-li $a_1, \dots, a_k \in A$ body v **A** a $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{T}$ skaláry takové, že $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_k = 0$, pak definujeme vektor v **A**

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$$

předpisem

$$[\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k]_S = \lambda_1 [a_1]_S + \lambda_2 [a_2]_S + \cdots + \lambda_k [a_k]_S$$

pro každou soustavu souřadnic v A

kromě vyjádření

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k = \lambda_2 (a_2 - a_1) + \cdots + \lambda_k (a_k - a_1)$$

z předchozí strany platí také pro libovolný bod $b \in A$

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k = \lambda_1 (a_1 - b) + \lambda_2 (a_2 - b) + \cdots + \lambda_k (a_k - b)$$

Podprostory afinních prostorů - obsah

Definice podprostorů

definice: je-li **A** afinní prostor nad tělesem **T** s prostorem vektorů **V**, pak afinní prostor **B** na stejným tělesem **T** s prostorem vektorů **W** se nazývá *afinní podprostor prostoru* **A**, pokud platí $B \subseteq A$, $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ a sčítání bodů s vektory v **B** je převzaté (zúžením) sčítání v **A**

je-li navíc **A** afinní euklidovský prostor, pak afinní euklidovský prostor **B** je *afinní euklidovský podprostor* **A**, pokud je afinním podprostorem **A** a skalární součin ve **W** je zúžením skalárního součinu ve **V**

příklad: je-li **A** afinní prostor s prostorem vektorů **V**, pak pro každý bod $a \in A$ a podprostor $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ je množina bodů

$$a + \mathbf{W} = \{a + \mathbf{w} : \mathbf{w} \in \mathbf{W}\}$$

spolu s operací sčítání bodu s vektorem převzatou z **A** afinní podprostor **A** s prostorem vektorů **W**

Odčítání bodů v podprostoru

je-li afinní prostor **B** (s prostorem vektorů **W**) podprostor afinního prostoru **A** (s prostorem vektorů **V**), pak

- pro $b \in B$ a $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ nezáleží na tom, počítáme-li $b + \mathbf{w}$ v podprostoru **B** nebo v celém prostoru **A**

jsou-li $a, b \in B$ dva body podprostoru $B \subseteq A$, můžeme vektor $\mathbf{w} = b - a$ počítat jak v **B** tak v **A**

v **B** je to jednoznačně určený vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, pro který je $a + \mathbf{w} = b$

B je podprostor **A**, proto platí $a + \mathbf{w} = b$ také v **A**

a protože v **A** je takový vektor **w** určený jednoznačně, platí

- pro každé dva body $a, b \in \mathbf{B}$ také vektor $b - a$ nezávisí na tom, počítáme-li jej v **B** nebo ve větším prostoru **A**

Afinní kombinace v podprostoru

jsou-li $a_1, \dots, a_k$ libovolné body v podprostoru **B** a $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$ pro nějaké skaláry, je jejich afinní kombinace

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$$

v podprostoru **B** rovná jednoznačně určenému bodu $b \in B \subseteq A$, pro který platí

$$\lambda_1(a_1 - b) + \lambda_2(a_2 - b) + \cdots + \lambda_k(a_k - b) = \mathbf{o}$$

a tato rovnost platí i ve velkém prostoru **A**, proto

- libovolná afinní kombinace $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$ bodů podprostoru **B** nezávisí na tom, počítáme-li ji v **B** nebo v **A**
- stejně jako rozdíl dvou bodů nebo afinní kombinace se shodují jakékoliv jiné operace, které jsou odvozené z operací v afinním prostoru

Jak dostat všechny podprostory

tvrzení: je-li **A** afinní prostor nad tělesem **T** s prostorem vektorů **V** a **B** podprostor **A** s prostorem vektorů **W**, pak pro každý bod $b \in \mathbf{B}$ platí

$$\mathbf{B} = b + \mathbf{W} = \{b + \mathbf{w} : \mathbf{w} \in \mathbf{W}\}$$

navíc platí $\mathbf{W} = \{c - b : c \in \mathbf{B}\} = \{d - c : c, d \in \mathbf{B}\}$

důkaz: pro každý vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ je $b + \mathbf{w} \in \mathbf{B}$, proto $b + \mathbf{W} \subseteq \mathbf{B}$

pro každý bod $c \in \mathbf{B}$ platí $c - b \in \mathbf{W}$, a tedy $c = b + (c - b) \in b + \mathbf{W}$

podobně snadno se dokážou obě rovnosti v dodatku

poznámka: z dodatku plyne, že podprostor **B** afinního prostoru **A** je jednoznačně určený svými body, každý vektor příslušný k **B** dostaneme jako rozdíl dvou bodů z **B**

při zadání podprostoru stačí zadat množinu bodů podprostoru

Podprostory afinního aritmetického prostoru $\mathbb{R}^3$

protože prostor vektorů afinního aritmetického prostoru $\mathbb{R}^3$ se rovná aritmetickému vektorovému prostoru $\mathbb{R}^3$, dostáváme čtyři typy

- body, tj. podprostory tvaru $B = b + \mathbf{W}$, $\dim(\mathbf{W}) = 0$, čili $\mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$ a $B = \{b\}$
- přímky, tj. podprostory tvaru $B = b + \mathbf{W}$, $\dim(\mathbf{W}) = 1$, čili $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v} \rangle$, kde $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, a $B = b + \langle \mathbf{v} \rangle$
- roviny, tj. podprostory tvaru $B = b + \mathbf{W}$, $\dim(\mathbf{W}) = 2$, čili $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, kde $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ je lineárně nezávislá posloupnost, a $B = b + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- celý prostor $B = \mathbb{R}^3$

Připomenutí

množina všech řešení soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s koeficienty v **T** a maticí A typu $m \times n$ je podprostor afinního aritmetického prostoru $\mathbf{T}^n$, neboť ji můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{u} + Ker\ A,$$

kde **u** je jedno partikulární řešení (bod v afinním aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$) a $Ker\ A$ je podprostor vektorového aritmetického prostou $\mathbf{T}^n$

Podprostory pomocí afinních kombinací

tvrzení: je-li **A** afinní prostor (s prostorem vektorů **V**), pak neprázdná množina $B \subseteq A$ je podprostor **A** právě tehdy, když každá afinní kombinace bodů z B opět leží v **B**

důkaz: už jsem si ukázali, že je-li **B** podprostor **A**, pak každá afinní kombinace bodů z B vyjde stejně, počítáme-li ji v **B** nebo v **A**

předpokládejme naopak, že každá afinní kombinace bodů z B patří do B

zvolíme bod $b \in B$ a dokážeme, že množina vektorů $W = \{c - b : c \in B\}$ je podprostor vektorového prostoru **V**

jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, platí $\mathbf{u} = c - b$ a $\mathbf{v} = d - b$ pro nějaké body $c, d \in B$; potom

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c - b) + (d - b) = (c + d - b) - b$$

a protože $c + d - b$ je afinní kombinace bodů z B, patří také do B

Dokončení důkazu

vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ je rozdílem dvou bodů z B a patří proto do W

podobně pro skalár t platí

$$t\mathbf{u} = t(c - b) = (tc - (1 - t)b) - b$$

a protože je $tc + (1 - t)b$ afinní kombinace bodů z B, je to opět bod z B, což dokazuje $t\mathbf{u} \in W$

množina W je tedy podprostor **V** a

$$B = a + \mathbf{W}$$

je podprostor afinního prostoru **A**

Afinní obal

definice: je-li X neprázdná podmnožina afinního prostoru **A** nad tělesem **T**, pak *afinní obal* množiny X je

$$\{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k : a_i \in X, \lambda_i \in \mathbf{T}, k \geq 1, \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1\}$$

označení: $\langle X \rangle$

tvrzení: pro každou neprázdnou podmnožinu X afinního prostoru **A** nad tělesem **T** je afinní obal $\langle X \rangle$ podprostorem **A**

důkaz spočívá v mechanickém ověření, že „afinní kombinace afinních kombinací bodů **A** je opět afinní kombinace bodů **A**"

definice: platí-li pro neprázdnou podmnožinu X afinního prostoru **A**, že $\langle X \rangle = A$, pak říkáme, že **A** je *afinní obal* množiny X

Bodový popis podprostoru

pro každou neprázdnou podmnožinu X afinního prostoru **A** je afinní obal $\langle X \rangle$ podprostorem **A**

je-li naopak **B** (s prostorem vektorů **W**) nějaký podprostor dimenze k afinního prostoru **A**, zvolíme v **B** nějakou soustavu souřadnic $S = (a, C)$, kde $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ je báze vektorového prostoru **W**

položíme $a_1 = a,\ a_2 = a + \mathbf{v}_1, \ldots, a_{k+1} = a + \mathbf{v}_k$

pak $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = (a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{k+1} - a_1)$ je báze ve **W** a to je podle tvrzení na str. 11-29 ekvivalentní s tím, že každý bod b lze napsat jednoznačně jako afinní kombinaci bodů $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$; proto

$$\mathbf{B} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \rangle$$

neboli **B** je afinní obal množiny $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$

Parametrický popis podprostoru

je-li $b \in A$ a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$, pak

$$\mathbf{B} = b + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$$

je podprostor afinního prostoru **A**

je-li naopak **B** podprostor afinního prostoru **A** s prostorem vektorů **W** dimenze k, zvolíme $b \in B$ a bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ ve **W**

potom $\quad \mathbf{B} = b + \mathbf{W} = b + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$

a každý bod prostoru **A** lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$b + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k$$

Od parametrického popisu k rovnicím

tvrzení: je-li $b + \mathbf{W}$ podprostor dimenze k aritmetického prostoru $\mathbf{T}^n$, pak existuje matice R typu $(n-k) \times n$ a bod $c \in \mathbf{T}^k$ takový, že podprostor $b + \mathbf{W}$ se rovná množině všech řešení soustavy $Rx = c$

připomeňme, že v afinním aritmetickém prostoru $\mathbf{T}^n$ množiny všech bodů a vektorů splývají a rovnají se kartézskému součinu T^n

důkaz: zvolíme nějakou bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ podprostoru $\mathbf{W} \leq \mathbf{T}^n$

její prvky zapíšeme do řádků matice $C = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\cdots|\mathbf{v}_k)^T$

platí $\dim(Ker\, C) = n - \dim(Im\, C) = n - \dim(Im\, C^T) = n - k$

zvolíme nějakou bázi $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-k})$ v $Ker\, C$

vektory $\mathbf{w}_i$ zapíšeme do řádků matice $R = (\mathbf{w}_1|\mathbf{w}_2|\ldots|\mathbf{w}_{n-k})^T$ a položíme $c = R\, b$

Dokončení důkazu

jádro $Ker\, R$ matice R má dimenzi $n - \dim(Im\, R) = n - (n-k) = k$

pro každý vektor $\mathbf{v}_i$ a každý vektor $\mathbf{w}_j$ platí $\mathbf{v}_i^T\mathbf{w}_j = 0$ a tedy také $\mathbf{w}_j^T\mathbf{v}_i = \left(\mathbf{v}_i^T\mathbf{w}_j\right)^T = 0$

takže $\mathbf{W} = Ker\, R$

protože b je partikulárním řešením soustavy $R\,x = c$, platí $b + \mathbf{W} = b + Ker\, R$

postup v důkazu posledního tvrzení také udává návod, jak pomocí rovnic popsat podprostor afinního prostoru, který máme zadaný parametricky

Rovnicový popis podprostoru

soustava lineárních $R\mathbf{x} = \mathbf{c}$ nad $\mathbf{T}$ s maticí typu $m \times n$ definuje podprostor $b + Ker\, R$ afinního aritmetického prostoru $\mathbf{T}^n$

v obecném afinním prostoru **A** dimenze n nad tělesem **T** s prostorem vektorů **V** zvolíme soustavu souřadnic $S = (a, C)$

soustava $R\mathbf{x} = \mathbf{c}$ určuje podprostor **W** prostoru vektorů **V** předpisem $[\mathbf{W}]_S = [\mathbf{W}]_C = Ker\, R$

dále existuje bod $d \in A$ pro jehož souřadnice platí $[d]_S = b$

$d + \mathbf{W}$ je pak podprostor **A** tvořený body, jejichž souřadnice vzhledem k S tvoří množinu všech řešení soustavy $R\mathbf{x} = \mathbf{c}$

naopak pro každý podprostor $d + \mathbf{W}$ afinního prostoru **A** je $[\mathbf{W}]_S = [\mathbf{W}]_B$ podprostor vektorového prostoru $\mathbf{T}^n$ a existuje tedy matice R nad **T** taková, že $Ker\, R = [\mathbf{W}]_S$

souřadnice bodů podprostoru $d + \mathbf{W}$ vzhledem k $S = (a, C)$ pak tvoří množinu všech řešení soustavy $R\,\mathbf{x} = [d]_S$

Od rovnicového popisu k parametrickému

příklad: najdeme parametrický popis podprostoru **B** afinního aritmetického prostoru $\mathbb{R}^5$ zadaného (vzhledem ke kanonické bázi) rovnicemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

soustavu vyřešíme Gaussovo eliminací

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

A zpět

$$\mathbf{B} = b + \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

teď budeme naopak hledat rovnicový popis podprostoru **B** z tohoto parametrického zadání

znamená to najít soustavu lineárních rovnic $R\mathbf{x} = \mathbf{c}$, jejíž množina řešení se bude rovnat podprostoru **B**

generátory podprostoru **W** zapíšeme do řádků matice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a najdeme její jádro

Dokončení

$$Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

matici R tedy zvolíme takto:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a spočteme pravou stranu $\mathbf{c} = R\,\mathbf{b} = (1, 9)^T$ tak, aby **b** bylo partikulární řešení soustavy $R\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$

rovnicový zápis podprostoru **B** je tedy například

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Afinní přímky a roviny v $\mathbb{R}^3$

- **afinní přímku** můžeme zadat
  - jako afinní obal dvojice různých bodů
  - nebo parametricky ve tvaru $b + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$
  - nebo jako množinu všech řešení soustavy dvou lineárně nezávislých rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \end{aligned}$$

- **afinní rovinu** můžeme zadat
  - jako afinní obal trojice bodů neležících na jedné afinní přímce
  - nebo paramatricky $b = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, kde $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je LN posloupnost vektorů v $\mathbb{R}^3$
  - nebo jako množinu všech řešení nenulové rovnice $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$

Afinní zobrazení - obsah

Definice afinních zobrazení

připomeňme, že lineární zobrazení mezi vektorovými prostory je zobrazení, které zachovává lineární kombinace

analogicky definujeme afinní zobrazení mezi afinními prostory jako zobrazení, které zachovává afinní kombinace

definice: jsou-li $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ afinní prostory nad stejným tělesem $\mathbf{T}$, pak zobrazení $F : A \to B$ nazýváme *afinní zobrazení* z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$, pokud zachovává afinní kombinace, tj. pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_k \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T$ taková, že $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ platí

$$F(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 F(a_1) + \dots + \lambda_k F(a_k)$$

označení: $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$

obraz afinní kombinace nějakých bodů je afinní kombinace obrazů těchto bodů **se stejnými koeficienty**

Obraz afinních kombinací dvou bodů

zvolíme pevně dva různé body a_1, a_2 prostoru $\mathbf{A}$

každý bod c přímky $\langle a_1, a_2 \rangle$ lze jednoznačně vyjádřit jako afinní kombinaci $c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$

označíme $b_1 = F(a_1)$ a $b_2 = F(a_2)$

pak musí platit $F(c) = \lambda_1 F(a_1) + \lambda_2 F(a_2) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$

Jak zadat afinní zobrazení

lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ je jednoznačně určené hodnotami na jakékoliv bázi prostoru $\mathbf{U}$

tvrzení: jsou-li $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, $\dim \mathbf{A} = n$, a $(a_1, \dots, a_{n+1})$ barycentrická soustava souřadnic prostoru $\mathbf{A}$, pak pro každé body $b_1, \dots, b_{n+1} \in B$ existuje právě jedno afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ splňující $f(a_i) = b_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$

důkaz: každý bod $c \in A$ vyjádříme jednoznačně jako afinní kombinaci

$$c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$$

pak musíme definovat

$$F(c) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_{n+1} b_{n+1}$$

odtud plyne jednoznačnost F, zbývá dokázat, že je skutečně afinní

Příklady afinních zobrazení

- konstantní zobrazení $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, které každému bodu v $\mathbf{A}$ přiřazuje pevně zvolený bod $b \in B$
- *posunutí* o vektor $\mathbf{v}$ (který leží v prostoru směrů prostoru $\mathbf{A}$) je afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$; posunutím o vektor $\mathbf{v}$ myslíme zobrazení definované $F(c) = c + \mathbf{v}$
- rotace o nějaký úhel kolem libovolného bodu, zrcadlení podle přímky, zkosení, projekce na přímku v nějakém směru, posunutí a každé složení těchto zobrazení je afinním zobrazením $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- zobrazení přiřazující bodu $\mathbf{A}$ jeho souřadnice vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic je afinní zobrazení $F : \mathbf{A} \to \mathbf{T}^n$

Afinní zobrazení určuje lineární zobrazení

tvrzení: je-li $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ afinní zobrazení mezi afinními prostory $\mathbf{A}$ (s prostorem vektorů $\mathbf{V}$) a $\mathbf{B}$ (s prostorem vektorů $\mathbf{W}$), oba nad stejným tělesem $\mathbf{T}$, a $a \in A$ libovolný bod, pak zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ definované

$$f(\mathbf{v}) = F(a + \mathbf{v}) - F(a)$$

je lineární a nezávisí na volbě bodu a

důkaz: napřed dokážeme nezávislost f na volbě bodu a

je-li $a' \in A$ jiný bod prostoru $\mathbf{A}$, platí pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$F(a' + \mathbf{v}) = F(a' + (a + \mathbf{v}) - a) = F(a') + F(a + \mathbf{v}) - F(a)$$

odkud plyne

$$F(a' + \mathbf{v}) - F(a') = F(a + \mathbf{v}) - F(a)$$

Důkaz linearity f

napřed dokážeme, že f zachovává sčítání vektorů

zvolíme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a označíme $b = a + \mathbf{u}$, tj. $\mathbf{u} = b - a$

potom platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= F(a + \mathbf{u} + \mathbf{v}) - F(a) = F(b + \mathbf{v}) - F(a) \\ &= (F(b + \mathbf{v}) - F(b)) + (F(b) - F(a)) \\ &= f(\mathbf{v}) + (F(a + \mathbf{u}) - F(a)) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

podobně dokážeme pro každý skalár $\lambda \in \mathbf{T}$

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{u}) =& F(a + \lambda\mathbf{u}) - F(a) = F(a + \lambda(b - a)) - F(a) \\ =& F((1 - \lambda)a + \lambda b) - F(a) = (1 - \lambda)F(a) + \lambda F(b) - F(a) \\ =& F(a) + \lambda(F(b) - F(a)) - F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) \\ =& \lambda(F(a + \mathbf{u}) - F(a)) = \lambda f(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Lineární zobrazení určuje afinní

tvrzení: jsou-li $\mathbf{A}$ afinní prostor s prostorem vektorů $\mathbf{V}$, $\mathbf{B}$ afinní prostor s prostorem vektorů $\mathbf{W}$, $a \in A$ a $b \in B$, pak pro každé lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je zobrazení $F : A \to B$ definované

$$F(c) = b + f(c - a)$$

afinní zobrazení, pro které platí $F(a) = b$

důkaz: vyjádříme-li bod $c \in A$ jako $c = a + \mathbf{v}$, pak je formulka definující F ekvivalentní

$$F(a + \mathbf{v}) = b + f(\mathbf{v})$$

odtud ihned pyne $F(a) = F(a + \mathbf{o}) = b$

zbývá dokázat, že takto definované F je afinní zobrazení

Důkaz

pro libovolnou afinní kombinaci $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$
(tj. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$) platí

$$\begin{aligned} F(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) &= b + f(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k - a) \\ &= b + f(\lambda_1(a_1 - a) + \cdots + \lambda_k(a_k - a) + (-1)(a - a)) \\ &= b + \lambda_1 f(a_1 - a) + \cdots + \lambda_k f(a_k - a) \\ &= \lambda_1(b + f(a_1 - a)) + \cdots + \lambda_k(b + f(a_k - a)) \\ &= \lambda_1 F(a_1) + \cdots + \lambda_k F(a_k) \end{aligned}$$

poznamenejme ještě, že takto definované afinní zobrazení F určuje zpětně lineární zobrazení f, neboť $F(a + \mathbf{v}) = F(a) + f(\mathbf{v})$

Jednoduché vlastnosti

pozorování: je-li $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je afinní zobrazení a $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ příslušné lineární zobrazení, pak platí

1. F je prosté právě tehdy, když f je prosté
2. F je zobrazení na $\mathbf{B}$ právě tehdy, když f je zobrazení na $\mathbf{W}$
3. obrazem podprostoru $b + \mathbf{U}$ prostoru $\mathbf{A}$ při zobrazení F je podprostor $F(b) + f(\mathbf{U})$ prostoru $\mathbf{B}$
4. je-li $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ afinní zobrazení a g příslušné lineární zobrazení, pak složené zobrazení $G \circ F$ je afinním zobrazením $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$ a jemu příslušné lineární zobrazení je $g \circ f$

pokud definujeme, že dva podprostory $a_1 + \mathbf{U}_1$ a $a_2 + \mathbf{U}_2$ afinního prostoru jsou rovnoběžné, pokud $\mathbf{U}_1 \leq \mathbf{U}_2$ nebo $\mathbf{U}_2 \leq \mathbf{U}_1$

pak bod 3. říká, že „každé afinní zobrazení zobrazuje rovnoběžné prostory na rovnoběžné prostory“

Afinní zobrazení pomocí matice

příklad: vyjádříme afinní, které zobrazí trojici bodů $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

na trojici bodů $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$ (v daném pořadí)

$$b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

protože $D = (a_2 - a_1, a_3 - a_1) = ((-2,0)^T, (1,-2)^T)$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$, tvoří trojice (a_1, a_2, a_3) barycentrickou soustavu souřadnic v afinním prostoru $\mathbb{R}^2$

afinní zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je těmito podmínkami určené jednoznačně

Příslušné lineární zobrazení f

najdeme jeho hodnoty na prvcích báze $D = ((-2,0)^T, (1,-2)^T)$

$$f(a_2 - a_1) = F(a_2) - F(a_1) = b_2 - b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(a_3 - a_1) = F(a_3) - F(a_1) = b_3 - b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

dostáváme tak matici f vzhledem k bázím D v $\mathbb{R}^2$ a K_3 v $\mathbb{R}^3$

$$[f]^D_{K_3} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Vyjádření afinního zobrazení F

matice f vzhledem ke kanonickým bázím je tedy

$$[f]^{K_2}_{K_3} = [f]^{D}_{K_3}[id]^{K_2}_{D} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

víme, že $F(c+\mathbf{v}) = F(c) + f(\mathbf{v})$ pro každý bod c a každý vektor $\mathbf{v}$

zvolíme $c = (0,0)^T$ a $\mathbf{v} = (x_1, x_2)^T$

afinní zobrazení F posílá bod $(x_1, x_2)^T$ do bodu

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vyjádření F pomocí matice a souřadnic

dosadíme a_1 za bod $(x_1, x_2)^T$ a spočteme

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

našli jsme tak vyjádření

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 2 - x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

můžeme udělat zkoušku, že skutečně $F(a_i) = b_i$ pro $i = 1, 2, 3$

Obecný popis afinních zobrazení pomocí souřadnic

postup z příkladu můžeme zobecnit

je-li $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ afinní zobrazení, $S = (a, C)$ soustava souřadnic v $\mathbf{A}$ a $T = (b, D)$ soustava souřadnic v $\mathbf{B}$, pak pro každý bod $x \in \mathbf{A}$ platí

$$\begin{aligned} [F(x)]_T &= [F(a)]_T + [f(x-a)]_T = [F(a)]_T + [f]^C_D\,[x-a]_S \\ &= [F(a)]_T + [f]^C_D\,[x]_S \end{aligned}$$

Definice a ekvivalentní podmínka

definice: jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ afinní eukleidovské prostory, pak zobrazení $F : A \to B$ nazýváme *izometrie*, pokud zachovává vzdálenosti, tzn. pro libovolné $a, c \in A$ platí

$$\|a - c\| = \|F(a) - F(c)\|$$

věta: jsou-li $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ afinní eukleidovské prostory konečné dimenze a $F : A \to B$ je zobrazení, pak jsou následující tvrzení ekvivalentní

1. F je izometrie
2. F je afinní zobrazení $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ a příslušné lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ mezi prostory vektorů je ortogonální

důkaz 2. $\Rightarrow$ 1. je jednoduchý, pro každé body $a, c \in A$ platí

$$\|F(a) - F(c)\| = \|f(a-c)\| = \|a - c\|$$

Opačná implikace je složitější

důkaz 1. $\Rightarrow$ 2. pouze naznačíme jednotlivé kroky

- vztah „bod b je afinní kombinací dvojice bodů a_1, a_2 s koeficienty λ_1, λ_2“ můžeme charakterizovat pomocí jejich vzájemných vzdáleností

  odtud odvodíme, že $F(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \lambda_1 F(a_1) + \lambda_2 F(a_2)$ pro každé dva body $a_1, a_2 \in A$ a koeficienty splňující $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$
- z faktu, že F zachovává afinní kombinace dvou bodů lze odvodit, že zachovává libovolné afinní kombinace
- označíme f příslušné lineární zobrazení a dokážeme, že f zachovává normu každého vektoru prostoru $\mathbf{A}$

  je-li $a \in A$ a $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, pak

  $\|f(\mathbf{v})\| = \|f((a+\mathbf{v})-a)\| = \|F(a+\mathbf{v})-F(a)\| = \|a+\mathbf{v}-a\| = \|\mathbf{v}\|$
- jedna z ekvivalentních definic ortogonálního zobrazení říká, že f je ortogonální právě když zachovává normu každého vektoru

Izometrie v afinních euklidovských prostorech $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

v části o unitárních operátorech v deváté kapitole jsme popsali, jak vypadají všechny ortogonální operátory v prostorech $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem

předchozí věta říká, že každá izometrie v afinním euklidovském prostoru je nějaký ortogonální operátor složený s posunutím

v rovině $\mathbb{R}^2$ je každá izometrie buď rotace složená s posunutím nebo ortogonální reflexe složená s posunutím

v prostoru $\mathbb{R}^3$ je každá izometrie

- buď rotace kolem nějaké osy složená s posunutím
- nebo ortogonální reflexe vzhledem k rovině složená s posunutím
- nebo rotace kolem osy složená s ortogonální reflexí vzhledem k rovině a složená ještě s posunutím