

Domácí úkol č. 3 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 14.3.2013

(3.1) Nechtě f, g jsou diagonalizovatelné operátory na konečně generovaném prostoru V . Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- (i) Operátory f a g komutují, tj. $fg = gf$.
- (ii) Existuje báze B prostoru V taková, že každý vektor z B je zároveň vlastním vektorem operátoru f i vlastním vektorem operátoru g .

Nápověda: Složitější je implikace (i) $\Rightarrow$ (ii). Důkaz lze provést následujícím způsobem: Nejprve pomocí podmínky z bodu (i) ukažte, že pro každé vlastní číslo λ operátoru f je prostor M_λ (ten tvoří vlastní vektory f příslušné λ) invariantním prostorem operátoru g . Pak nahlédněte, že restrikce g na M_λ je diagonalizovatelná.

(3.2) Matice lineárního operátoru f na prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vzhledem ke kanonické bázi je A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Naděte bázi B prostoru $\mathbb{Z}_5^3$, aby matice f vzhledem k B byla tvaru

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

pro nějaké $c \in \mathbb{Z}_5$.

Poznámka: U tohoto příkladu nestačí napsat hledanou bázi a ověřit, že matice vzhledem k B odpovídá. Popište jakým způsobem bázi hledáte.