

## Domácí úkol č. 7 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2012–2013

Datum odevzdání 11.4.2013

Nechť  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{C}$ . Zobrazení  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  nazýváme *seskvilineární forma*, pokud pro libovolné  $u, v, w \in V$  platí

- $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$ ,  $f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w)$ ,
- $f(u, tv) = tf(u, v)$ ,  $f(tu, v) = \bar{t}f(u, v)$ .

Seskvilineární forma se nazývá hermitovská, pokud  $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$  pro libovolné  $u, v \in V$ .

**(7.1)** Dokažte, že seskvilineární forma na komplexním vektorovém prostoru je hermitovská právě tehdy, když je pro každý vektor  $u \in V$  číslo  $f(u, u)$  reálné.

**Nápověda:** Jako rozcvičku si můžete rozmyslet jednodušší cvičení pro reálné prostory: bilineární forma je antisymetrická právě tehdy, když  $f(u, u) = 0$  pro každé  $u \in V$ . K důkazu těžší implikace v 7.1. si rozložte formu na reálnou a imaginární část a všimněte si, co musí tyto části splňovat, aby byla forma hermitovská.

**(7.2)** Mějme bilineární formu  $f$  na vektorovém prostoru  $\mathbb{T}^n$ . Utvoříme matici  $X$  typu  $n \times 2n$  tak, že vedle matice  $f$  vzhledem ke kanonické bázi napíšeme jednotkovou matici, tj.  $X = ([f]_{K_n} | I_n)$ . Nyní provedeme několik tzv. symetrických úprav. Symetrickou úpravou rozumíme provedení elementární řádkové úpravy a následné provedení „stejně“ úpravy na sloupce. Například přičtení čtyřnásobku pátého řádku k třetímu řádku a následné přičtení čtyřnásobku pátého sloupce ke třetímu sloupci je symetrická úprava. (Matice je typu  $n \times 2n$ , řádkové úpravy provádíme s celými řádky, příslušné sloupcové úpravy se pak týkají jednom levé poloviny.)

Provedením několika symetrických úprav vznikla matice  $Y = (C|D)$ . Ukažte, že  $C$  je matice  $f$  vzhledem k bázi  $E$ , kde báze  $E$  tvoří řádky matice  $D$ .

**Nápověda:** Vzpomeňte si, jak jsme ukázali, že algoritmus  $(A|I_n) \sim \dots \sim (I_n|A^{-1})$  na hledání inverzní matice funguje. Podobný postup proveďte u tohoto příkladu.