

Úlohy k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2012–2013

Verze ze dne 29. května 2013

Toto je seznam přímočarých příkladů k přednášce. Úlohy z tohoto seznamu je nezbytně nutné umět řešit. Podobné typy úloh se budou vyskytovat v testech na cvičeních.

1 Vlastní čísla a vektory

Cvičení 1.1. Určete vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru f na prostoru \mathbb{R}^3 .

$$f((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3)^T$$

Cvičení 1.2. Matice lineárního operátoru na \mathbb{Z}_5^3 vzhledem k bázi B je A . Určete vlastní čísla a příslušné vlastní vektory operátoru f .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 1.3. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice A nad \mathbb{Z}_3 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.4. Zjistěte, zda je reálná matice A diagonalizovatelná. Pokud ano, najděte regulární matici R a diagonální matici D tak, aby $D = R^{-1}AR$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.5. Zjistěte, zda je operátor f na prostoru \mathbb{Z}_7^3 diagonalizovatelný. Pokud ano, najděte bázi B takovou, že $[f]_B^B$ je diagonální, a určete $[f]_B^B$.

$$f((x_1, x_2, x_3)^T) = (5x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 6x_3, 2x_2 + 6x_3)^T$$

Cvičení 1.6. Matice lineárního operátoru f na prostoru \mathbb{Z}_3^3 vzhledem k bázi B je A . Zjistěte, zda f je diagonalizovatelný. Pokud ano, najděte bázi C takovou, že $[f]_C^C$ je diagonální, a určete $[f]_C^C$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 1.7. Určete koeficienty u λ^4 , λ^3 a konstantní koeficient charakteristického polynomu reálné matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.8. Najděte vlastní čísla a jejich geometrické a algebraické násobnosti pro matici A nad \mathbb{Z}_3 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.9. Operátor f na \mathbb{Z}_3^3 splňuje

$$f((1, 1, 2)^T) = (1, 2, 0)^T, \quad f((1, 2, 0)^T) = (1, 1, 1)^T, \quad f((0, 1, 2)^T) = (2, 1, 0)^T.$$

Určete jeho charakteristický polynom.

Cvičení 1.10. Najděte vzorec pro a_n v následující posloupnosti prvků \mathbb{Z}_7 .

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2} \quad \text{pro } n \geq 2.$$

Cvičení 1.11. Najděte n -tou mocninu reálné matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.12. Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic (neznámé jsou reálné funkce reálné proměnné).

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 + u_2 \\ u_2' &= -2u_1 + 4u_2 \end{aligned}$$

Cvičení 1.13. Zjistěte, zda $M = \langle B \rangle$ je invariantním podprostorem operátoru f_A na prostoru \mathbb{Z}_3^3 . Pokud ano, nalezněte matici restrikce f_A na M vzhledem k bázi B .

$$B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 1.14. Pro operátor f na \mathbb{R}^3 najděte nějakou bázi B prostoru $\text{Im } f$ a určete matici zúžení f na $\text{Im } f$ vzhledem k B .

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 3x - y + 2z \\ 2x + 2z \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.15. Lineární operátor f na \mathbb{R}^3 je dán předpisem níže. Najděte bázi B prostoru \mathbb{R}^3 a matici f vzhledem k B tak, že $[f]_B^B$ je v Jordanově kanonickém tvaru.

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x - 2y + 7z \\ x + 2y + 2z \\ -3x + y - z \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.16. Matice operátoru f na \mathbb{R}^2 vzhledem k bázi B je A . Najděte bázi C , aby $[f]_C^C$ byla v Jordanově kanonickém tvaru.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.17. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice A nad \mathbb{Z}_5 a matici R takovou, že $R^{-1}AR = J$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.18. Najděte bázi prostoru \mathbb{R}^3 složenou z Jordanových řetízků operátoru f_A a matici f_A vzhledem k této bázi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.19. Najděte Jordanův kanonický tvar matice A nad \mathbb{Z}_7 .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.20. Najděte Jordanův kanonický tvar operátoru f na prostoru \mathbb{C}^2 .

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ix + y \\ 2ix + 2y \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.21. Zjistěte, zda je matice A nad \mathbb{Z}_3 podobná matici v Jordanově kanonickém tvaru.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.22. Spočítejte n -tou mocninu matice A nad \mathbb{R} .

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.23. Řešte diferencní rovnici $\mathbf{v}_k = A\mathbf{v}_0$ s počáteční podmínkou $\mathbf{v}_0 = (1, 1, 1)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.24. Najděte vzorec pro n -tý člen posloupnosti a_n .

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n$$

Cvičení 1.25. O matici A řádu 13 víme, že má charakteristický polynom $p(x) = (2-x)^9(3-x)^4$, $\dim(\text{Ker}(A - 3I_{13})) = 1$, $\dim(\text{Ker}(A - 2I_{13})) = 4$, $\dim(\text{Ker}((A - 2I_{13})^2)) = 7$, $\dim(\text{Ker}((A - 2I_{13})^3)) = 9$. Určete Jordanův kanonický tvar matice A .

Cvičení 1.26. Najděte Schurův rozklad reálné matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -7 & -11 & -17 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.27. Unitárně diagonalizujte matici A a rozložte na součet matic ortogonálních projekcí na přímky v \mathbb{R}^3 .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 1.28. Najděte ortonormální bázi B prostoru \mathbb{R}^3 , vzhledem ke které je matice operátoru f diagonální a najděte $[f]_B^B$.

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x + 2y + 2z \\ 2x + 13y + 4z \\ 2x + 4y + 13z \end{pmatrix}$$

2 Bilineární formy

Cvičení 2.1. Najděte matici bilineární formy f na \mathbb{Z}_5^2 vzhledem k bázi B znáte-li její matici vzhledem k bázi C .

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad [f]_C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 2.2. Rozložte danou bilineární formu na prostoru \mathbb{Z}_7^3 na součet symetrické a antisymetrické.

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 4x_1y_3 + 6x_2y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_1 + 5x_3y_2$$

Cvičení 2.3. je dáno analytické vyjádření kvadratické formy f_2 na prostoru \mathbb{R}^2 vzhledem k bázi B . Určete matici příslušné symetrické bilineární formy vzhledem k bázi C .

$$B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

Cvičení 2.4. Matice bilineární formy f na prostoru \mathbb{Z}_5 vzhledem k bázi B je A . Určete f -ortogonální doplněk prostoru $\langle (1, 2, 3)^T, (2, 2, 1)^T \rangle$.

$$B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 2.5. Určete radikál, nulitu a hodnotu kvadratické formy f_2 na \mathbb{R}^3 .

$$f_2((x_1, x_2, x_3)^T) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

Cvičení 2.6. Metodou ortogonálních doplňků najděte f -ortogonální bázi prostoru \mathbb{Z}_3^4 a určete matici f vzhledem k této bázi, kde

$$f_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

Cvičení 2.7. Metodou symetrických úprav najděte f -ortogonální bázi \mathbb{Z}_3^3 a určete matici f vzhledem k této bázi, kde

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 2.8. Užitím algebraických doplňků určete f -ortogonální bázi prostoru \mathbb{R}^3 .

$$[f]_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 2.9. Určete signaturu bilineární formy f :

$$[f]_{K_4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 2.10. Určete signaturu kvadratické formy f_2 :

$$f_2((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T) = -x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_1x_4 + 5x_2^2 + 2x_2x_3$$

Cvičení 2.11. Najděte bázi \mathbb{R}^2 , která je f -ortogonální a zároveň ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

$$f_2((x_1, x_2)^T) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

Cvičení 2.12. Najděte bázi \mathbb{R}^2 , která je f -ortogonální a zároveň ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 2.13. Najděte bázi \mathbb{R}^2 , která je f -ortogonální a zároveň g -ortonormální, kde

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) &= 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2, \\ g((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 \end{aligned}$$

Cvičení 2.14. Najděte bázi \mathbb{R}^2 , která je f -ortogonální a zároveň g -ortonormální, kde

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad [g]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

3 Afinní prostory

Cvičení 3.1. Zjistěte zda S je soustava souřadnic v afinním prostoru \mathbb{Z}_5^3 .

$$S = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 3.2. Zjistěte, zda S je soustava souřadnic v afinním prostoru \mathbf{A} s prostorem vektorů \mathbf{V} nad tělesem \mathbb{R} .

$$S = \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right), \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + V, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Cvičení 3.3. Najděte vyjádření bodu b a vektoru \mathbf{v} vzhledem k soustavě souřadnic S afinního prostoru \mathbb{Z}_5^3 .

$$S = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 3.4. Zjistěte, zda bod b leží v afinním prostoru \mathbf{A} (s prostorem vektorů \mathbf{V} nad tělesem \mathbb{R}). Pokud ano, najděte jeho souřadnice vzhledem k soustavě souřadnic $S = (a, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

$$A = a + V = a + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Cvičení 3.5. Souřadnice bodu b vzhledem k soustavě souřadnic S afinního prostoru \mathbb{Z}_5^3 jsou $(1, 3, 4)^T$. Najděte souřadnice b vzhledem k soustavě souřadnic R .

$$S = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$R = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 3.6. Souřadnice bodu $(2, 3, -2)^T \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k soustavě souřadnic $S = (a, (1, 1, -5)^T, (3, 2, -1)^T, (1, 1, -1)^T)$ jsou $(4, 4, 4)^T$. Najděte počátek soustavy souřadnic S .

Cvičení 3.7. Zjistěte, zda body $a_1 = (1, 2, 3)^T, a_2 = (3, 1, 0)^T, a_3 = (4, 1, 2)^T, a_4 = (1, 1, 1)^T$ v afinním prostoru \mathbb{Z}_5^3 tvoří barycentrickou soustavu souřadnic. Pokud ano, najděte barycentrické souřadnice bodu $b = (2, 2, 3)^T$ v této barycentrické soustavě.

Cvičení 3.8. Najděte parametrické vyjádření podprostoru $B = \langle (1, 2, 3)^T, (3, 6, 1)^T, (2, 3, 1)^T \rangle$ afinního prostoru \mathbb{Z}_7^3 a zjistěte dimenzi tohoto podprostoru.

Cvičení 3.9. Najděte rovnicové vyjádření podprostoru $B = \langle (1, 2, 3)^T, (3, 6, 1)^T, (2, 3, 1)^T \rangle$ afinního prostoru \mathbb{Z}_7^3 vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic a zjistěte dimenzi tohoto podprostoru.

Cvičení 3.10. Najděte parametrické vyjádření podprostoru B afinního prostoru \mathbb{Z}_7^5 daného rovnicemi vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic a zjistěte dimenzi tohoto podprostoru.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Cvičení 3.11. Najděte vyjádření podprostoru B afinního prostoru \mathbb{Z}_7^5 jako afinní kombinaci bodů. Podprostor B je dán rovnicemi vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic. Zjistěte také dimenzi tohoto podprostoru.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Cvičení 3.12. Najděte vyjádření podprostoru B afinního prostoru \mathbb{R}^5 jako afinní kombinaci bodů a zjistěte dimenzi B . Podprostor B je dán parametricky.

$$B = (1, 2, 3, -1, 2)^T + \langle (1, 3, -1, 2, 3)^T, (2, 1, 4, 2, 0)^T, (-1, 2, -5, 0, 3)^T \rangle$$

Cvičení 3.13. Najděte rovnicové vyjádření podprostoru B afinního prostoru \mathbb{R}^5 vzhledem ke kanonické soustavě souřadnic a jeho dimenzi. Podprostor B je dán parametricky.

$$B = (1, 2, 3, -1, 2)^T + \langle (1, 3, -1, 2, 3)^T, (2, 1, 4, 2, 0)^T, (-1, 2, -5, 0, 3)^T \rangle$$

Cvičení 3.14. Najděte všechny normálové vektory podprostoru B afinního eukleidovského prostoru \mathbb{R}^5 se standardním skalárním součinem.

$$B = (1, 2, 3, -1, 2)^T + \langle (1, 3, -1, 2, 3)^T, (2, 1, 4, 2, 0)^T, (-1, 2, -5, 0, 3)^T \rangle$$

Cvičení 3.15. Najděte rovnicové vyjádření podprostoru B afinního prostoru \mathbb{Z}_3^3 vzhledem k soustavě souřadnic S .

$$B = (1, 0, 2)^T + \langle (2, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T \rangle$$

$$S = ((1, 2, 1)^T, (1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T)$$

Cvičení 3.16. Určete vzájemnou polohu podprostorů B a C prostoru \mathbb{Z}_3^4 (tj. zda jsou rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné).

$$B = (1, 0, 2, 1)^T + \langle (1, 1, 2, 2)^T, (2, 2, 0, 2)^T \rangle, C = (1, 1, 0, 0)^T + \langle (2, 0, 1, 2)^T, (0, 1, 2, 2)^T \rangle$$

Cvičení 3.17. Určete vzájemnou polohu podprostorů B a C prostoru \mathbb{Z}_2^5 (tj. zda jsou rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné). Podprostory jsou dány rovnicově vzhledem k nějaké soustavě souřadnic S .

$$B : \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), C : \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Cvičení 3.18. Najděte průnik podprostorů B a C prostoru \mathbb{Z}_3^4

$$B = (1, 0, 2, 1)^T + \langle (1, 1, 2, 2)^T, (2, 2, 0, 2)^T \rangle, C = (2, 1, 1, 0)^T + \langle (2, 0, 1, 2)^T, (0, 1, 2, 2)^T \rangle$$

Cvičení 3.19. Určete parametrické vyjádření součtu podprostorů B a C prostoru \mathbb{Z}_2^5 .

$$B = (1, 0, 1, 1, 0)^T + \langle (1, 1, 0, 1, 1)^T \rangle, C = (0, 1, 1, 0, 1)^T + \langle (1, 0, 0, 0, 1)^T, (0, 1, 0, 1, 0)^T \rangle$$

Cvičení 3.20. Určete parametrické vyjádření součtu podprostorů B a C prostoru \mathbb{Z}_2^5 . Podprostory jsou dány rovnicově vzhledem k nějaké soustavě souřadnic S .

$$B : \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), C : \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Cvičení 3.21. Určete vzdálenost podprostorů B a C afinního eukleidovského prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem.

$$B = (1, 0, 2)^T + \langle (1, -1, 1), (1, 0, -2) \rangle, C = (3, -1, 1)^T + \langle (2, -1, -1) \rangle$$

Cvičení 3.22. Určete vzdálenost podprostorů B a C afinního eukleidovského prostoru \mathbb{R}^3 se skalárním součinem $\langle | \rangle$.

$$B = (1, 0, 2)^T + \langle (2, -1, 1) \rangle, C = (3, 1, 2)^T + \langle (1, 2, 2) \rangle$$

$$\langle (x_1, x_2, x_3)^T | (y_1, y_2, y_3)^T \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$$

Cvičení 3.23. Určete úhel podprostorů B a C afinního eukleidovského prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem.

$$B = (1, 0, 2)^T + \langle (1, -1, 1), (1, 0, -2) \rangle, C = (2, -2, 1)^T + \langle (3, 1, -1), (1, 1, 1) \rangle$$

Cvičení 3.24. Určete úhel podprostorů B a C afinního eukleidovského prostoru \mathbb{R}^3 se skalárním součinem $\langle | \rangle$, jehož matice vzhledem ke kanonické bázi je A .

$$B = (1, 0, 2)^T + \langle (2, -1, 1) \rangle, C = (2, -2, 1)^T + \langle (3, 1, -1) \rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 3.25. Zjistěte, zda jsou báze B a C prostoru \mathbb{R}^3 souhlasně orientované.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 3.26. V \mathbb{R}^3 se skalárním součinem $\langle | \rangle$ spočítejte orientovaný objem rovnoběžnostěny určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

$$\langle (x_1, x_2, x_3)^T | (y_1, y_2, y_3)^T \rangle = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 3.27. V \mathbb{R}^2 se standardním skalárním součinem spočítejte obsah rovnoběžníku určeného vektory $(1, 1, 2)^T, (3, 1, -1)^T$.

Cvičení 3.28. Určete obraz bodu $(1, 2, 3)^T \in \mathbb{R}^3$ při afinním zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňujícím

$$F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a obraz vektoru $(1, 2, 3)^T$ při příslušném lineárním zobrazení f .

Cvičení 3.29. Určete obraz bodu $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ při afinním zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňujícím

$$F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Cvičení 3.30. Lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vytvořené afinním zobrazením F má vzhledem k bázi B matici A . Navíc $F((1, 2)^T) = (1, -1)^T$. Určete $F((3, 4)^T)$.

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right) \right), A = \left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{array} \right)$$

Cvičení 3.31. Proveďte metrickou klasifikaci kvadriky U v \mathbb{R}^2 (se standardním skalárním součinem).

$$U = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 14x_1 - 2x_2 - 27 = 0\}$$

Cvičení 3.32. Proveďte metrickou klasifikaci kvadriky U v \mathbb{R}^3 (se standardním skalárním součinem).

$$U = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 - 2x_2x_3 - 10 = 0\}$$

4 Projektivní prostory

Cvičení 4.1. Najděte vyjádření kvadriky $U \subseteq \mathbb{R}^2$ vzhledem k soustavě souřadnic $S = (a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

$$U = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 - 10x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 4x_2 + 3 = 0 \right\}$$

$$S = \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

Cvičení 4.2. Najděte tečny ke kvadrice $U \subseteq \mathbb{R}^2$ v bodě $(3, 1)^T$.

$$U = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 - 10x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 4x_2 - 1 = 0 \right\}$$

Seznam příkladů ze zimního semestru. Tyto příklady je stále třeba umět řešit.

5 Teorie čísel

Cvičení 5.1. Spočítejte zbytek po dělení čísla $33^{159951} \cdot 19 - 16$ číslem 17.

Cvičení 5.2. Najděte poslední cifru čísla 3^{991} .

Cvičení 5.3. Dokažte, že číslo $16^{15} + 29^{14} + 42^{13}$ je dělitelné 13

Cvičení 5.4. Najděte největší společný dělitel čísel a Bezoutovy koeficienty pro čísla 650 a 702.

Cvičení 5.5. Najděte číslo $x \in \{0, 1, \dots, 59\}$, pro které $23x \equiv 1 \pmod{59}$.

6 Soustavy lineárních rovnic

Cvičení 6.1. Určete, zda matice je v odstupňovaném tvaru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 6.2. Najděte všechna řešení soustavy rovnic nad \mathbb{R} .

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

Cvičení 6.3. Najděte všechna řešení soustavy rovnic nad \mathbb{C} .

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2+i & 2-3i & 2 & 3 \\ i & 3 & 2 & 4 & 5+i \\ 3 & i & 0 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

Cvičení 6.4. Najděte všechna řešení homogenní soustavy rovnic (nad \mathbb{C}) s maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 2+i & 2-3i & 2 \\ i & 3 & 2 & 4 \\ 3 & i & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Cvičení 6.5. Najděte polynom třetího stupně, jehož graf obsahuje body

$$(0, 1), (1, -1), (2, 5), (3, 37) .$$

7 Tělesa a soustavy lineárních rovnic nad tělesy

Cvičení 7.1. Najděte inverzní prvek k 123 v tělese \mathbb{Z}_{137} .

Cvičení 7.2. V tělese \mathbb{Z}_7 spočítejte

$$\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{5}.$$

Cvičení 7.3. Najděte všechna řešení soustavy rovnic nad \mathbb{Z}_{11} .

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 3 & 3 & 4 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

8 Matice

Cvičení 8.1. Spočítejte součin matic nad \mathbb{Z}_{13} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 7 \\ 2 & 5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Cvičení 8.2. Zjednodušte výraz

$$((A + 2(B^T C + A))^T + 2AB^T + A(3B - 4C)^T)^T,$$

a určete jaké musí mít matice A, B, C typy, aby byl výraz definován.

Cvičení 8.3. Spočítejte mocniny reálných matic

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^9, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^5$$

Cvičení 8.4. Vyřešte maticovou rovnici nad \mathbb{Z}_3 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 8.5. Najděte všechny reálné čtvercové matice X , pro které platí $XA = AX$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 8.6. Rozhodněte, zda jsou dané komplexní matice regulární.

$$\begin{pmatrix} 1+3i & -40 & 2+3i & 7-i \\ 2i+5 & 1+i & 1-i & 1-i \\ 4i+6 & 66i & -37i+12 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 1+i & 1-i \\ 1+i & 2 & -i \\ -i & -2i & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 8.7. *K matici A nad tělesem \mathbb{Z}_5 najděte inverzní, pokud existuje.*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 8.8. *Řešte maticovou rovnici $AXB = C$, kde A, B, C jsou reálné.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Cvičení 8.9. *Spočítejte $((A^{-1}B)^{-1}C)^{-1}C$, kde A, B, C jsou reálné matice.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Cvičení 8.10. *Vyjádřete matici A nad \mathbb{Z}_7 jako součin elementárních matic, pokud to jde.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

9 Vektorové prostory

Cvičení 9.1. *Zjistěte, zda množina vektorů*

- (a) $\{(x + y, 1 + x, 2 + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
- (b) $\{(x + 2y, 3x, 2x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
- (c) $\{(x + 1, y + 1, z + 1) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$
- (d) $\{(x^3, x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$

je podprostorem \mathbb{R}^3 .

Cvičení 9.2. *Zjistěte, zda vektor $(1, 3, 2, i)^T$ leží v lineárním obalu vektorů $(1, 1, 0, 3)^T, (i, 1, 1, 0)^T, (i, i, 2, 3)^T \in \mathbb{C}^4$*

Cvičení 9.3. *Vyjádřete vektor $(1, 2, 3)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(1, 1, 0)^T, (0, 1, 1)^T, (2, 3, 4)^T \in \mathbb{Z}_5^3$.*

Cvičení 9.4. *Zjistěte, zda množina $\{(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T, (1, 2, 0)^T\}$ generuje \mathbb{R}^3 .*

Cvičení 9.5. *Najděte $\text{Ker } A$ pro následující matici nad \mathbb{Z}_5 .*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.6. Zjistěte, zda $(1, 2, 3)^T \in \mathbb{Z}_5^3$ leží v $\text{Im } A^T$ a zda $(3, 4)^T \in \mathbb{Z}_5^2$ leží v $\text{Im } A$ pro matici A nad \mathbb{Z}_5 .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.7. Zjistěte, zda jsou posloupnosti vektorů ze \mathbb{Z}_3^4 lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci ostatních.

(a) $((2, 1, 0, 2)^T, (1, 1, 2, 2)^T, (1, 0, 1, 2)^T, (2, 2, 1, 2)^T)$

(b) $((1, 2, 0, 1)^T, (2, 2, 1, 1)^T, (2, 0, 2, 1)^T, (1, 1, 2, 1)^T)$

Cvičení 9.8. Najděte nějakou bázi podprostoru V prostoru \mathbb{C}^3 .

$$V = \langle (1+i, 1-i, 1+i)^T, (1-i, 1+3i, i-1)^T, (1, 1+i, i)^T \rangle$$

Cvičení 9.9. Najděte (nějaké) báze prostorů $\text{Ker } A$, $\text{Ker } A^T$, $\text{Im } A$ a $\text{Im } A^T$ pro matici A nad \mathbb{Z}_5 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.10. Určete dimenze $\text{Ker } A$, $\text{Ker } A^T$, $\text{Im } A$ a $\text{Im } A^T$ pro matici A nad \mathbb{Z}_5 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.11. Z vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ vyberte nějakou bázi jejich lineárního obalu.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -16 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.12. Zjistěte zda $B = ((2, 1, 3)^T, (-3, 1, -2)^T, (5, -2, 4)^T)$ je bázi \mathbb{R}^3 a pokud ano, najděte souřadnice vektoru $(-10, 7, -4)^T$ vzhledem k B .

Cvičení 9.13. Ověřte, že vektor \mathbf{u} leží v podprostoru $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ prostoru \mathbb{Z}_5^4 , ověřte, že $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je bázi V a najděte $[\mathbf{u}]_B$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.14. Určete bázové sloupce matice A nad \mathbb{Z}_7 a vyjádřete ostatní sloupce jako lineární kombinaci bázových.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.15. Určete hodnotu komplexní matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i & 2i & 1 \\ 1-i & 1+3i & i-1 & 0 \\ 1+i & 1-i & 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 9.16. Určete dimenzi průniku a součtu podprostorů $U, V \leq \mathbb{R}^3$.

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Cvičení 9.17. Zjistěte, zda $\mathbb{R}^3 = U + V$, kde

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Cvičení 9.18. Zjistěte, zda $\mathbb{Z}_2^4 = U \oplus V$, kde

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

10 Determinant

Cvičení 10.1. Najděte redukovaný cyklický zápis permutace $\alpha^{-1}\beta\gamma^{-1}$, kde permutace $\alpha, \beta, \gamma \in S_8$ jsou dány tabulkami.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Cvičení 10.2. Najděte redukovaný cyklický zápis permutace $\alpha^{-1}\beta\gamma^{-1}$, kde permutace $\alpha, \beta, \gamma \in S_8$ jsou dány redukovaným cyklickým zápisem.

$$\alpha = (1\ 7\ 3\ 4)(2\ 5\ 6), \quad \beta = (2\ 8\ 7\ 5\ 3)(4\ 6), \quad \gamma = (3\ 4)(1\ 8)(2\ 6)$$

Cvičení 10.3. Najděte všechny permutace $\pi \in S_8$, pro které $\alpha^{-1}\pi\beta = \gamma^{-1}$, kde

$$\alpha = (1\ 7\ 3\ 4)(2\ 5\ 6), \quad \beta = (2\ 8\ 7\ 5\ 3)(4\ 6), \quad \gamma = (3\ 4)(1\ 8)(2\ 6)$$

Cvičení 10.4. Vyjádřete permutaci $\rho \in S_8$ danou tabulkou jako složení transpozic.

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

Cvičení 10.5. Určete znaménko permutací α, β, γ a $\gamma\beta^{-1}\alpha$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in S_8$ jsou dány tabulkami.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Cvičení 10.6. Vypište všechny sudé a všechny liché permutace v S_4 (v redukovaném cyklickém zápisu).

Cvičení 10.7. Spočítejte determinanty následujících matic nad \mathbb{Z}_7 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 10.8. S jakým znaménkem vystupují v determinantu matice $A = (a_{ij})_{7 \times 7}$ sčítanci

$$a_{31}a_{72}a_{43}a_{14}a_{25}a_{56}a_{67}, \quad a_{24}a_{71}a_{56}a_{35}a_{47}a_{12}a_{63} \quad ?$$

Cvičení 10.9. Spočítejte determinant matice A nad \mathbb{Z}_7 .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Cvičení 10.10. V závislosti na parametrech $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n \in \mathbb{R}$ spočítejte determinant matice A .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 & f \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ h & i & j & k & l \\ m & n & l & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cvičení 10.11. *Užitím Cramerova pravidla spočítejte druhou složku řešení soustavy rovnic (nad \mathbb{R})*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) .$$

Cvičení 10.12. *Určete $\text{adj}(A)$ a A^{-1} pro reálnou matici A .*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

11 Lineární zobrazení

Cvičení 11.1. *Určete matici přechodu od báze B prostoru \mathbb{Z}_7^3 k bázi C .*

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ 6 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ 4 \end{array} \right) \right), \quad C = \left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 3 \end{array} \right) \right)$$

Cvičení 11.2. *Souřadnice vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_7^3$ vzhledem k bázi B jsou $(x_1, x_2, x_3)^T$. Určete $[\mathbf{u}]_C$, je-li*

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ 6 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ 4 \end{array} \right) \right), \quad C = \left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 3 \end{array} \right) \right) .$$

Cvičení 11.3. *Matice přechodu od báze B prostoru \mathbb{Z}_7^3 k bázi C je A . Určete bázi C , víte-li, že*

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ 6 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ 4 \end{array} \right) \right), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} .$$

Cvičení 11.4. *Lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ je dáno předpisem*

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} .$$

Určete matici f vzhledem k bázím B a C .

$$B = \left(\left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) \right), \quad C = \left(\left(\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right) \right)$$

Cvičení 11.5. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázím B a C je A . Určete $f((x_1, x_2, x_3)^T)$.

$$B = \left(\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right), C = \left(\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right), A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 11.6. Lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ splňuje

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Určete jeho matici vzhledem ke kanonickým bázím.

Cvičení 11.7. Matice $f : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázím B a C je A . Určete matici f vzhledem k D a E .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), C = \left(\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. D = \left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), E = \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Cvičení 11.8. Matice $f : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázím B a C je A . Určete souřadnice $f(\mathbf{u})$ vzhledem bázi E , víte-li, že souřadnice \mathbf{u} vzhledem k bázi D jsou $(x_1, x_2)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), C = \left(\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. D = \left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), E = \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Cvičení 11.9. Matice $f : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázím B a C je A . Určete, zda f je automorfismus a najděte matici f^{-1} vzhledem k D a E .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left(\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. D = \left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E = \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Cvičení 11.10. Matice $f : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázím B a C je A , matice $g : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázím D a E je X . Určete matici fg vzhledem ke kanonickým bázím.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. C = \left(\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad D = \left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E = \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Cvičení 11.11. Matice $f : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázím B a C je A , matice $g : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ vzhledem k bázím D a E je X . Určete matici $f + 2g$ vzhledem ke kanonickým bázím.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad D = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Cvičení 11.12. Matice $f : \mathbb{Z}_2^4 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ vzhledem k bázím B a C je A . Určete jádro a obraz f .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

12 Skalární součin

Cvičení 12.1. Při standardním skalárním součinu v \mathbb{R}^4 spočítejte normu vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} a úhel mezi nimi.

$$\mathbf{u} = (1, 3, -2, 4), \quad \mathbf{v} = (2, 0, 1, 5)$$

Cvičení 12.2. Skalární součin na \mathbb{R}^2 je dán předpisem

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

Spočítejte úhel mezi vektory $(2, 3)^T$ a $(1, 4)^T$.

Cvičení 12.3. Spočítejte normu polynomu $2ix + (3i - 4)$ vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 \bar{f}g$.

Cvičení 12.4. Skalární součin na \mathbb{C}^2 je dán předpisem

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

Najděte všechny vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (1, i)^T$. Najděte nějakou ortogonální bázi \mathbf{u}, \mathbf{v} a znormováním najděte ortonormální bázi.

Cvičení 12.5. Najděte souřadnice vektoru $(\pi, 1, 37)$ vzhledem k bázi

$$\left(\frac{1}{3}(1, 2, 2), \frac{1}{3}(-2, -1, 2), \frac{1}{3}(2, -2, 1)\right)$$

prostoru \mathbb{R}^3 .

Cvičení 12.6. V prostoru \mathbb{R}^2 se skalárním součinem $\langle | \rangle$ je $B = ((1, 1)^T, (2, -1)^T)$ ortonormální báze. Určete $\langle (1, -1)^T | (2, 0)^T \rangle$

Cvičení 12.7. V prostoru \mathbb{C}^3 se standardním skalárním součinem určete ortogonální doplněk roviny $\langle (1, 2, i)^T, (1 + i, -1, 3)^T \rangle$.

Cvičení 12.8. V prostoru \mathbb{R}^2 se skalárním součinem $\langle | \rangle$ je $B = ((1, 1)^T, (2, -1)^T)$ ortonormální báze. Určete ortogonální doplněk přímky $\langle (1, 3)^T \rangle$.

Cvičení 12.9. V prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem určete matici ortogonální projekce na přímku $\langle (4, 5, 6)^T \rangle$ vzhledem ke kanonickým bázím a ortogonální projekci vektoru $(1, 2, 3)^T$ na tuto přímku.

Cvičení 12.10. V prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem určete nejlepší aproximaci vektoru $(2, -1, 3)^T$ v rovině $\langle (1, 1, 0)^T, (0, 1, 2)^T \rangle$ a chybu této aproximace.

Cvičení 12.11. Metodou nejmenších čtverců najděte nejlepší „řešení“ soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right) .$$

Cvičení 12.12. V prostoru \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem ortogonalizujte bázi $((2, 1, -2)^T, (0, 1, -1)^T, (3, 5, -2)^T)$. K nalezené ortogonální bázi určete příslušnou ortonormální.

Cvičení 12.13. Najděte QR-rozklad $A = QR$ reálné matice

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \end{array} \right) .$$

Určete Q^{-1} .

Cvičení 12.14. V prostoru \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem najděte ortonormální bázi podprostoru $W = \langle (1, 1, 1, 1)^T, (-1, -3, -1, -3)^T, (4, 1, 2, -1)^T \rangle$ a určete ortogonální projekci a kolmici vektoru $(1, 2, 3, 4)^T$ na W .