Domácí úkoly na algebru 08/09 zima

Příklad 1. Najděte všechny ireducibilní polynomy stupně 4 nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ (a ukažte, že jsou ireducibilní a že jsou všechny). Vyberte si jeden z nich a v 16-tiprvkovkém tělese určeném tímto polynomem spočítejte pomocí Euiklidova algoritmu $(x^3 + x + 1)^{-1}$.

Příklad 2. Najděte všechny podalgebry a kongruence algebry $\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}(\circ)$, kde

$\circ$	a	b	c	d	e
a	a	e	c	a	a
b	e	d	e	b	b
c	a	e	c	a	c
d	c	b	a	e	e
e	a	e	a	d	b

(Nezapomeňte napsat postup, z kterého plyne správnost výsledku. Samotný výsledek je bezcenný.)

Příklad 3. Nechť $N = \{1, 2, \ldots, \}$ (tj. přirozená čísla bez nuly) a $\mathbb{N} = N(+)$, kde $+$ je běžná operace sčítání. Najděte všechny homomorfismy $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{1, -1\}(\cdot)$.

Příklad 4. Zjistěte, zda grupa $\mathbb{Z}_{19}^*$ je izomorfní grupě $\mathbb{Z}_{18}$. Grupa $\mathbb{Z}_{19}$ má prvky $\{1, 2, \ldots, 18\}$ a binární operací je násobení modulo 19. Grupa $\mathbb{Z}_{18}$ má prvky $\{0, 1, \ldots, 17\}$ a binární operací je sčítání modulo 18.

Příklad 5. Pro grupu D_6 (symetrie 6-tiúhelníka) najděte všechny podgrupy, všechny normální podgrupy a popište příslušné faktorgrupy.

Příklad 6. Najděte všechny kongruence algebry $\mathbb{P} = P(\cap, \cup)$, kde P je množina všech podmnožin množiny $\{0, 1, 2\}$ a $\cap, \cup$ jsou běžné (binární) operace průniku a sjednocení.

Příklad 7. Rozhodněte (zdůvodnění je opět nutné), zda svaz konvexních podmnožin roviny uspořádaných inkluzí je a) modulární b) distributivní.

Příklad 8. Spočtěte poslední dvě cifry v desítkovém zápisu čísla $87^{(85^{83})}$.