1. Najděte nejmenší přirozené číslo x, které (současně) splňuje

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod 2 \\ x &\equiv 1 \pmod 3 \\ x &\equiv 1 \pmod 5 \\ x &\equiv 5 \pmod 7 \end{aligned}$$

   Řešení. 166 (použije se libovolný algoritmus na ČVZ)

2. Spočtěte poslední cifru čísla $2^{3^{2^{3^{2^{3}}}}}$ v desítkovém zápisu.

   Řešení. $3^{2^{\cdots}} \equiv (-1)^{2^{\cdots}} = 1 \bmod 4$ a $\phi(5) = 4$, tedy $2^{3^{2^{\cdots}}} \equiv 2^{3^{2^{\cdots}} \bmod \phi(5)} = 2 \bmod 5$. Protože navíc $2^{3^{\cdots}} \equiv 0 \bmod 2$, je $2^{3^{\cdots}} \equiv 2 \bmod 10$, takže poslední cifra je 2

3. Spočítejte počet prvků řádu 3 v grupě $\mathbb{Z}_{12}$.

   Řešení. Jsou 2 - prvky 4 a 8.

4. Spočítejte počet prvků řádu 3 v grupě $\mathbb{Z}_7^*$.

   Řešení. Jsou 2 - prvky 2, 4.

5. Rozhodněte, zda svaz M_3 (diamant) je
   (a) modulární
   (b) distributivní

   Řešení. (a) ANO (b) NE

6. Rozhodněte, zda svaz N_5 (pentagon) je
   (a) modulární
   (b) distributivní

   Řešení. (a) NE (b) NE

7. Spočítejte počet podsvazů (tj. podalgeber) svazu M_3 (prázdná množina je podalgebrou).

   Řešení. Označem nejmeší prvek 0, největší 1 a zbylé a, b, c. Podsvazů je 20 - $\emptyset$, všech pět jednoprvkových podmnožin, srovnatelné dvojice prvků (hrany, dvojice $\{0, 1\}$), lineárně uspořádané trojice ($\{0, a, 1\}, \{0, b, 1\}, \{0, c, 1\}$), čtveřice obsahující 0 a 1 a celé M_3.

8. Spočítejte počet kongruencí svazu M_3 (včetně triviálních).

Řešení. Pouze dvě triviální. Pokud jsou dva prvky x, y v libovolném svazu ekvivalentní v nějaké kongruenci $\sim$, pak všechny prvky mezi $x \wedge y$ a $x \vee y$ leží v jedné $\sim$-třídě (viz domácí úkol). Dále, pokud např. $0 \sim a$, pak $0 \vee b = b \sim 1 = a \vee b$ a rovněž $c \sim 1$. Z těchto pozorování okamžitě plyne výsledek.