CSP seminář 14/15 letní semestr – sada 2

Budeme říkat, že CSP($\mathbb{A}$) je *polynomiálně redukovatelný* na CSP($\mathbb{B}$), pokud existuje polynomiální algoritmus, který z každého vstupu I problému CSP($\mathbb{A}$) vytvoří vstup $r(I)$ problému CSP($\mathbb{B}$) tak, že I je splnitelný právě tehdy, když $r(I)$ je splnitelný. Značíme CSP($\mathbb{A}$) $\leq_P$ CSP($\mathbb{B}$). Pokud CSP($\mathbb{A}$) $\leq_P$ CSP($\mathbb{B}$) $\leq_P$ CSP($\mathbb{A}$), píšeme CSP($\mathbb{A}$) $\sim_P$ CSP($\mathbb{B}$) a říkáme, že problémy jsou *polynomiálně ekvivalentní.*

Všimněte si, že pokud CSP($\mathbb{A}$) $\leq_P$ CSP($\mathbb{B}$) a CSP($\mathbb{B}$) je v P (tj. řešitelný v polynomiálním čase), pak $\mathbb{A}$ je v P. Podobně, pokud CSP($\mathbb{A}$) $\leq_P$ CSP($\mathbb{B}$) a CSP($\mathbb{A}$) je NP-úplný, pak CSP($\mathbb{B}$) je NP-úplný.

Problém 1. Nechť $\mathbb{A} = (\{0,1,2\}; C_0, C_1, Q)$, kde

$$C_0 = \{0\}, C_1 = \{1\}, Q = \{000, 110, 120, 210, 101, 102, 201, 202, 011, 012, 021\}$$

(Q je ternární relace, v zápisu jsou vynechány závorky a čárky, tj. např. 110 značí (1,1,0).)

Dále nechť $\mathbb{B}$ značí relační strukturu $\mathbb{B} = (\{0,1\}; C_0, C_1, G_1)$ (kde značení relací je z 1. sady). Dokažte, že CSP($\mathbb{A}$) $\sim_P$ CSP($\mathbb{B}$). (Nápověda: využijte homomorfismy $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ a $\mathbb{B} \to \mathbb{A}$).

Problém 2. Dokažte, že pro každou relační strukturu $\mathbb{A}$ existuje relační struktura $\mathbb{B}$ taková, že

- CSP($\mathbb{A}$) $\sim_P$ CSP($\mathbb{B}$) a
- CSP($\mathbb{B}$) je *core*, tj. každý endomorfismus struktury $\mathbb{B}$ je bijektivní.

Problém 3. Nechť $\mathbb{A} = (A; R_1, R_2, R_4)$ je relační struktura, kde R_i je i-ární relace. Nechť E je relace rovnosti (tj. $E = \{(a,a) : a \in A\}$, nechť S je 3-ární relace na A definovaná

$$S(x,y,z) \quad \text{iff} \quad R_1(x) \wedge R_2(x,z) \wedge R_4(y,z,y,x)$$

a nechť T je binární relace definovaná

$$T(x,y) \quad \text{iff} \quad (\exists z \in A)\ S(x,y,z)$$

Dokažte, že

- CSP($A; R_1, R_2, R_4, E$) $\leq_P$ CSP($\mathbb{A}$)
- CSP($A; R_1, R_2, R_4, E, S$) $\leq_P$ CSP($\mathbb{A}$)
- CSP($A; R_1, R_2, R_4, E, S, T$) $\leq_P$ CSP($\mathbb{A}$)

Zformulujte obecné tvrzení.

Problém 4. Na základě předchozích příkladů (hlavně 3.) dokažte, že problémy CSP($\mathbb{A}$), CSP($\mathbb{B}$) a CSP($\mathbb{C}$) jsou polynomiálně ekvivalentní, kde

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A} = (\{0,1,2\}, C_0, C_1, C_2, N), \quad N = \{0,1,2\}^2 \setminus \{(0,0),(1,1),(2,2)\}\\
&\mathbb{B} = (\{0,1\}, S_{000}, S_{001}, S_{011}, S_{111}), \quad S_{ijk} = \{0,1\}^3 \setminus \{(i,j,k)\}\\
&\mathbb{C} = (\{0,1\}, C_0, C_1, R), \quad R = \{0,1\}^3 \setminus \{(0,0,0),(1,1,1)\}
\end{aligned}$$

Problém 5. Dokažte, že CSP($\mathbb{A}$) $\sim_P$ CSP($\{0,1,2\}, N$), kde $\mathbb{A}, N$ jsou z předchozího příkladu.

Problém 6. Pro každou relační strukturu $\mathbb{A}$ najděte vstup problému CSP($\mathbb{A}$), jehož řešení přesně odpovídají endomorfismům $\mathbb{A}$.

Problém 7. Nechť $\mathbb{A}$ je *core* a $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ přidáním všech unárních relací tvaru $C_a = \{a\}$, $a \in A$. Dokažte, že CSP($\mathbb{A}$) $\sim_P$ CSP($\mathbb{B}$).