CSP seminář 14/15 letní semestr – sada 3

Připomenutí definic:

- (neindexovaná) algebra: $\mathbf{A} = (A; \text{množina operací na } A)$
- klon: množina operací arity ≥ 1 na A, která obsahuje všechny projekce a je uzavřená na skládání (budeme je také považovat za neindexované algebry)
- relační klon: množina neprázdných relací na A, která je uzavřená na pp-definice (budeme je také považovat za relační struktury)
- relace $R \subseteq A^k$ je kompatibilní s operací $f : A^n \to A$, pokud pro libovolné $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in R$ platí $f(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in R$ (počítáme po složkách). Ekvivalentně, $R \leq (A; f)$, tedy R je poduniverzum algebry $(A; f)$
- $\mathrm{Pol}(\mathbb{A})$: všechny polymorfismy $\mathbb{A}$, tj. operace, které jsou kompatibilní se všemi relacemi v $\mathbb{A}$
- $\mathrm{Inv}(\mathbf{A})$: všechny neprázdné relace, které jsou kompatiblní se všemi operacemi v $\mathbf{A}$. Tj. všechna poduniverza mocnin algebry $\mathbf{A}$

Problém 1. Připomeňte si důkazy následujících tvrzení.

- $\mathrm{Pol}(\mathbb{A})$ je klon, $\mathrm{Pol}(\mathrm{Inv}(\mathbf{A}))$ je klon generovaný $\mathbf{A}$
- $\mathrm{Inv}(\mathbf{A})$ je relační klon, $\mathrm{Inv}(\mathrm{Pol}(\mathbb{A}))$ je relační klon generovaný $\mathbb{A}$

Problém 2. Jsou-li $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ relační struktury na stejné, konečné množině, s konečně mnoha relacemi a platí $\mathrm{Pol}(\mathbb{A}) \subseteq \mathrm{Pol}(\mathbb{B})$, pak $\mathrm{CSP}(\mathbb{B}) \leq_P \mathrm{CSP}(\mathbb{A})$.

Problém 3. Označme $\mathbf{2}$ klon projekcí na množině $\{0, 1\}$. Dokažte, že je-li $\mathbb{A}$ relační struktura na množině $\{0, 1\}$ taková, že $\mathrm{Pol}(\mathbb{A}) = \mathbf{2}$, pak $\mathrm{CSP}(\mathbb{A})$ je NP-úplné (dokonce k NP-úplnosti stačí nějaká konečná množina relací z $\mathbb{A}$).

V příkladech 4–7 značí $\mathbb{A}$ relační strukturu na $A = \{0, 1\}$ a $\mathbf{A}$ její klon polymorfismů.

Problém 4. Dokažte, že pokud $\mathbf{A}$ obsahuje unární nebijektivní operaci, pak $\mathrm{CSP}(\mathbb{A})$ je řešitelné v polynomiálním čase.

Problém 5. Dokažte, že pokud $\mathbb{A}$ obsahuje relace $C_0 = \{0\}$ a $C_1 = \{1\}$, pak každá operace f v $\mathbf{A}$ je idempotentní, tj. $\forall a \in A\ f(a, a, \ldots, a) = a$.

Problém 6. Pokud $\mathbf{A}$ obsahuje majoritu (tj. ternární operaci m takovou, že $\forall a, b \in A\ m(a, a, b) = m(a, b, a) = m(b, a, a) = a$), pak $\mathrm{CSP}(\mathbb{A})$ je řešitelné v polynomiálním čase. Dokažte. (Nápověda: ukažte, že každá relace v $\mathbb{A}$ je určená projekcemi na dvojici souřadnic.)

Problém 7. Pokud $\mathbf{A}$ obsahuje minoritu (tj. ternární operaci m takovou, že $\forall a, b \in A\ p(a, a, b) = p(a, b, a) = p(b, a, a) = a$), pak $\mathrm{CSP}(\mathbb{A})$ je řešitelné v polynomiálním čase. Dokažte. (Nápověda: ukažte, že $\mathrm{Inv}(p)$ jsou všechny afinní podprostory $\mathbb{Z}_2^n$).

Problém 8. Pokud $\mathbf{A}$ obsahuje polosvazovou operaci (tedy $\wedge = min$ nebo $\vee = max$), pak $\mathrm{CSP}(\mathbb{A})$ je řešitelné v polynomiálním čase. Dokažte. (Nápověda: $\mathrm{Inv}(\wedge)$ je relační klon generovaný relacemi C_0, C_1, H z příkladu 3 v sadě 1.)

Operace $f : A^n \to A$ se nazývá esenciálně unární, pokud existuje i a unární operace $\alpha : A \to A$ taková, že $(\forall a_1, \dots, a_n)\ f(a_1, \dots, a_n) = \alpha(a_i)$.

Problém 8. Nechť $\mathbf{A} \neq \mathbf{2}$ je klon na $\{0, 1\}$ obsahující operaci, která není esenciálně unární. Pak $\mathbf{A}$ obsahuje majoritu nebo minoritu nebo $\vee$ nebo $\wedge$ nebo konstantní operaci. Strategie důkazu:

- Předpokládejte nejprve, že $\mathbf{A}$ je idempotentní.
- Předpokládejte, že dané operace v klonu nejsou.
- Ukažte, že jediné binární operace v $\mathbf{A}$ jsou projekce.
- Ukažte, že jediné ternární operace v $\mathbf{A}$ jsou projekce.
- Vezměte nejmenší n takové, že $\mathbf{A}$ obsahuje operaci, která není projekce. Odvoďte spor.
- Obecný případ (bez předpokladu idempotence) převeďte na idempotentní.

Problém 9. Dokažte, že pro libovolnou relační strukturu na $\{0, 1\}$ je CSP($\mathbb{A}$) buď NP-úplné nebo řešitelné v polynomiálním čase.