5. Determinant matice

Na některých místech textu je látka motivována využitím pojmu homomorfismu (= lineárního zobrazení) z následující kapitoly. Doporučuji poznámky vynechat a vrátit se k nim po seznámení se s tímto pojmem.

Definice 5.1. *Nechť $A = (a_{ik})_{i,j=1}^n$ je čtvercová matice stupně n nad tělesem T.* ***Determinant*** *matice A definujeme*

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

kde sčítáme přes všechny permutace σ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a $\operatorname{sgn}(\sigma)$ značí znaménko permutace (tj. 1 (resp. -1), pokud je permutace sudá (resp. lichá)).

Příklady:

- **Determinant matice typu** 2×2. Na množině $\{1, 2\}$ existují právě dvě permutace - identická permutace (je sudá) a transpozice (12) (ta je lichá). Tedy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- **Geometrický význam determinantu matice** 2×2 **nad** R. Absolutní hodnota determinantu matice 2×2 nad R udává obsah rovnoběžníku určeného řádkovými (sloupcovými) vektory této matice (ověřte!). Obecněji, máme-li endomorfismus $f : R^2 \to R^2$ s maticí A (vzhledem k libovolné bázi) a množinu $M \subset R^2$, která má konečný obsah, pak

$$\text{Plocha}(f(M)) = |A| \cdot \text{Plocha}(M).$$

Tedy absolutní hodnota determinantu udává, jak endomorfismus mění obsah. Znaménko determinantu určuje, velmi zhruba řečeno, zda endomorfismus překlápí (znaménko minus) nebo nepřeklápí (znaménko plus) rovinu.

- **Příklad.**

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

To není překvapující: A je matice rotace o úhel α a ta obsah nemění a „rovinu nepřeklápí“.

- **Determinant matice typu** 3×3 **- Sarrusovo pravidlo.** Na množině $\{1, 2, 3\}$ máme šest permutací. Sudé jsou identita, (123), (132) (zápis pomocí cyklů). Liché jsou transpozice (12), (13), (23). Tedy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Prakticky lze výpočet provést tak, že si k dané matici doprava připíšeme ještě jednou první a druhý sloupec. Potom sečteme součiny „hlavních diagonál“ a odečteme součiny „vedlejších diagonál“:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & - & - & - \\
 & & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 & & \searrow & \searrow & \searrow \\
 & & + & + & +
\end{array}$$

Pro matice vyšších řádů podobné pravidlo nefunguje!

- **Geometrický význam determinantu matice 3×3 nad R.** Geometrický význam je podobný jako v dimenzi 2. Absolutní hodnota determinantu matice 3×3 nad R udává objem rovnoběžnostěnu určeného řádkovými (sloupcovými) vektory této matice. Obecněji, máme-li endomorfismus $f : R^3 \to R^3$ s maticí A a množinu $M \subset R^3$, která má konečný objem, pak

  $$\text{Objem}(f(M)) = \big| |A| \big| \cdot \text{Objem}(M).$$

  Tedy absolutní hodnota determinantu udává, jak endomorfismus mění objem. Význam determinantu pro jiné dimenze obdobný, místo obsahu, resp. objemu máme „n-rozměrný objem“.

  Mnoho tvrzení o determinantech lze nahlédnout geometricky. Tato intuice je užitečná pro porozumění a zapamatování, nemůžeme ji ale používat v důkazech:

  - Zatím nevíme, co je obsah, resp. objem.
  - Tvrzení platí nad libovolným tělesem, nejen reálnými čísly.
- **Determinant jednotkové matice (jakéhokoliv stupně) je 1.** V definici determinantu máme jediný nenulový sčítanec a ten je roven 1. Geometricky (intuitivně): Jednotková matice je matice identického endomorfismu. Ten „nedělá nic“, tedy ani nemění n-rozměrný objem ani prostor nepřeklápí. Obecněji platí:
- **Determinant dolní (resp. horní) trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále.** Mějme např. horní trojúhelníkovou matici $A = (a_{ij})$, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i > j$. Jediná permutace σ taková, že výraz $i \leq \sigma(i)$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je identická. čili v definici determinantu je jediný možný nenulový člen $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ se znaménkem $\text{sgn}(id) = 1$.
- **Determinant dolní (horní) blokově trojúhelníkové matice je součinem determinantů bloků na diagonále.** Toto tvrzení nebudeme dokazovat. Speciální případ je ve cvičeních.
- Platí $\left|A^T\right| = |A|$ (zde A^T značí transponovanou matici. Důkaz zkuste sami, nevíte-li si rady, nahlédněte do cvičení.

Determinant a elementární úpravy, hodnost

V této části se dozvíme, jak se mění determinant při elementárních úpravách matice. Protože již víme, jak se spočítá determinant horní trojúhelníkové matice, budeme mít metodu na výpočet determinantu. Počítat determinant přímo z definice je totiž pro „větší“ matice velmi zdlouhavé.

Řádkové vektory matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ budeme značit $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, neboli $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Naopak, máme-li vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in T^n$, pak $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$ značí matici s řádkovými vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Nejprve pomocné tvrzení:

Tvrzení 5.2. *Mějme vektory* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \in T^n$. *Pak*

$$|[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i + \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n]| =$$

$$|[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n]| + |[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n]| .$$

Důkaz. Pro jednoduchost zápisu předpokládejme, že $i = 1$.

$$|[\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 \dots, \mathbf{a}_n]| =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(a_{1\sigma(1)} + b_{\sigma(1)}) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$|[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n]| + |[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n]| .$$

□

A teď to hlavní:

Tvrzení 5.3. *Nechť* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in T^n$, $t \in T$, $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$. *Pak*

(i) $|[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, t\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots \mathbf{a}_n]| = t \cdot |[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]|$

(ii) $|[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i + t\mathbf{a}_\mathbf{j}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots \mathbf{a}_n]| = |[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]|$

Důkaz. (i) Tvrzení je snadným důsledkem definice:

$$|[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, t\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots \mathbf{a}_n]| =$$

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots t a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$t \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$t \cdot |[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]|$$

(ii) Podle předchozího tvrzení 5.2 a bodu (i) máme

$$|[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i + t\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \dots \mathbf{a}_n]| =$$

$$|[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]| + |[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, t\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n]| =$$

$$|[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]| + t \cdot |[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n]| .$$

Matice ve druhém sčítanci má stejný i-tý a j-tý řádek. K dokončení důkazu tedy stačí ukázat, že taková matice má nulový determinant. Důkaz tohoto tvrzení je cvičení.

□

Předchozí dvě tvrzení lze podobně zformulovat pro slupce. Důkaz můžeme buď provést zcela analogicky, nebo využijeme $\left|A^T\right| = |A|$.

Přehozením dvou řádků (sloupců) determinant změní znaménko. Elementární úpravy, které k tomu potřebujeme totiž obsahují násobení některého řádku (sloupce) -1.

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

Determinant jsme také mohli spočítat Sarrusovým pravidlem (= přímo z definice), ale zvolený způsob je rychlejší.

Důležitým důsledkem předchozího tvrzení je:

Tvrzení 5.4. *Čtvercová matice A je regulární právě tehdy, když $|A| \neq 0$.*

Důkaz. Matici A lze elementárními úpravami převést na horní trojúhelníkový tvar H. Víme, že A je regulární, právě když je H regulární. H je zřejmě regulární, právě když všechny prvky na diagonále jsou nenulové, tj. právě když $|H| \neq 0$ (viz poznámka o determinantu horní trojúhelníkové matice). Toto nastane právě tehdy, když $|A| \neq 0$, protože elementární úpravy nemění „nulovost" determinantu (podle předchozího tvrzení). □

Obecněji lze pomocí determinantů určit hodnost matice:

Věta 5.5. *Hodnost matice A je rovna rozměru největšího nenulového subdeterminantu.*

Subdeterminantem řádu k rozumíme determinant podmatice vzniklé z A výběrem prvků ve zvolených k řádcích a k sloupcích.

Důkaz. Předpokládejme, že hodnost matice A je rovna k. Všechny subdeterminanty řádu $k+1$ jsou nulové, jinak by podle předchozího tvrzení měla podmatice příslušná nenulovému subdeterminantu $k+1$ lineárně nezávislých řádků, tedy by i matice A měla $k+1$ lineárně nezávislých řádků.

Musíme ještě ukázat, že A má nějakou podmatici řádu k s nenulovým determinantem. Řádky matice A můžeme přeuspořádat tak, aby prvních k řádků tvořilo bázi řádkového prostoru matice A. Nyní uvažujme matici B prvních k řádků matice A. Tato matice má hodnost k. Sloupce tedy můžeme přeuspořádat tak, aby prvních k sloupců tvořilo bázi sloupcového prostoru matice B. Nyní máme v levém horním rohu čtvercovou regulární matici, která má (opět podle předchozího tvrzení) nenulový subdeterminant. Tato matice je jistě podmatice A, takže jsme hotovi. □

Rozvoj podle řádku (sloupce), adjungovaná matice

Definice 5.6. *Mějme čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ typu n.* ***Algebraickým doplňkem*** *prvku a_{ij} v matici A rozumíme*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|\,,$$

kde matice M_{ij} je čtvercová matice typu $n-1$, která vznikne z A vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Následujícímu tvrzení se říká **věta o rozvoji determinantu podle řádku (sloupce).**

Věta 5.7. *Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ je čtvercová matice a $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pak*

(i) $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}$ *(rozvoj podle řádku)*

(ii) $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$ *(rozvoj podle sloupce)*

Důkaz. Provedeme pro řádky. Pro sloupce lze postupovat analogicky.

1. Pomocné tvrzení: Determinant matice B typu n jejíž první řádkový vektor je $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots)$ je rovný determinantu matice C, která vznikne z B vynecháním prvního řádku a sloupce.

   Důkaz. Jde o speciální případ tvrzení o determinantu dolní blokově trojúhelníkové matice. Pro libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$, $\sigma(1) = 1$ definujme $\sigma^* \in S_{n-1}$ vztahem $\sigma^*(i) = \sigma(i+1) - 1$. Permutace σ a σ^* mají stejná znaménka, protože např. mají stejný počet inverzí.

   $$\begin{aligned} |B| &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \ldots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1)=1} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{2\sigma(2)} \ldots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1)=1} \operatorname{sgn}(\sigma) c_{1\sigma^*(1)} \ldots c_{n-1,\sigma^*(n-1)} \\ &= \sum_{\sigma^* \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma^*) c_{1\sigma^*(1)} \ldots c_{n-1,\sigma^*(n-1)} \\ &= |C| \end{aligned}$$

   První rovnost je definice $|B|$, druhá plyne z tvaru prvního řádku (ostatní členy jsou nulové), třetí je přepsání pomocí prvků matice C, třetí plyne z $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^*)$, čtvrtá je zřejmá, pátá je definice $|C|$. $\square$

2. Pomocné tvrzení: $|M_{ki}| = (-1)^{k+i} \cdot |D_{ki}|$, kde matice D_{ki} vznikne z A nahrazením k-tého řádku vektorem $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ (jednička je na i-tém místě).

   Důkaz. V matici D_{ki} vyměníme $(k-1)$-ní a k-tý řádek, $(k-2)$-ý a $(k-3)$-tí řádek, ..., 1. a 2. řádek. Poté vyměníme $(i-1)$-ní a i-tý sloupec, $(i-2)$-ý a $(i-3)$-tí sloupec, ..., 2. a 1. sloupec. Dohromady jsme provedli $k+i-2$ výměn – znaménko determinantu se změní $k+i-2$ krát. Dostaneme matici, jejíž první řádek je $\mathbf{e}_1$ a vynecháním prvního řádku a prvního sloupce vznikne matice M_{ki}, takže můžeme použít předchozí tvrzení. $\square$

3. Nyní je již důkaz snadný. Z 5.2, 5.3 máme

$$\begin{aligned}
|A| &= |\,[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]\,| \\
&= \left|\left[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{k-1},\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\mathbf{e}_i,\mathbf{a}_{k+1},\dots,\mathbf{a}_n\right]\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\cdot|\,[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{e}_i,\mathbf{a}_{k+1},\dots,\mathbf{a}_n]\,| \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\cdot|D_{ki}| \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\cdot a_{ki}\cdot|M_{ki}| \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}
\end{aligned}$$

□

Větu o rozvoji determinantu podle řádku (sloupce) je výhodné použít, pokud je v tomto řádku (sloupci) malý počet nenulových prvků (nejlépe jen jeden). Při výpočtu je tedy vhodné nejprve elementárními úpravami „téměř vynulovat“ některý řádek (sloupec) a poté použít větu o rozvoji. Tím se výpočet převede na determinant(y) nižšího řádu.

Příklad. Determinant počítáme užitím elementárních úprav a rozvoje.

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & -3 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -10 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -4 & -1 \\ 5 & 1 & 10 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & -4 & -1 \\ 5 & 1 & 10 & -4 & 5 \\ -10 & 0 & -26 & 8 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -1 \\ -10 & -26 & 8 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 11 \\ 6 & -26 & 8 & -36 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & 11 \\ 6 & -26 & -36 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 0 & 20 & 15 \\ 0 & -47 & -42 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 20 & 15 \\ -47 & -42 \end{vmatrix} =$$

$$10\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 47 & 42 \end{vmatrix} = 10(168-141) = 270.$$

Nejprve jsme téměř vynulovali 2. sloupec eliminací, užitím 4. řádku. Potom jsme determinant rozvinuli podle 2. sloupce, máme jediný nenulový člen se znaménkem $(-1)^{2+4} = 1$. Dále jsme vyeliminovali 2. řádek (pomocí 3. sloupce). Následoval rozvoj podle 2. řádku, nenulový člen má znaménko $(-1)^{3+2} = -1$, atd.

Pokud děláme rozvoj matice podle k-tého řádku, ale při výpočtu algebraických doplňků škrtáme sice správný sloupec, ale „omylem“ l-tý řádek ($k \neq l$), vyjde 0. Toto je **věta o falešném rozvoji podle řádku (sloupce).**

Věta 5.8. *Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je čtvercová matice a $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq l$. Pak*

(i) $0 = \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{li}$
(ii) $0 = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{il}$

Důkaz. Opět pouze pro řádky. Všimneme si, že výraz na pravé straně nezávisí na prvcích v l-tém řádku. Nahradíme l-tý řádek řádkem k-tým. Vzniklá matice má nulový determinant a výraz napravo je (nefalešný) rozvoj podle l-tého řádku, protože nyní $a_{ki} = a_{li}$. □

Definice 5.9. *Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice typu n. **Adjungovanou maticí** k A rozumíme matici $A^{ad} = (a_{ij}^{ad})$:*

$$a_{ij}^{ad} = A_{ji}.$$

Tedy adjungovaná matice má na místě ij algebraický doplněk prvku a_{ji} v matici A (pozor na změnu pořadí!).

Následující věta je vlastně pouze společnou formulací věty o rozvoji a věty o falešném rozvoji.

Věta 5.10. *Nechť A je čtvercová matice stupně n. Pak*

$$A \cdot A^{ad} = A^{ad} \cdot A = |A| \cdot E_n,$$

kde E_n je jednotková matice stupně n.

Speciálně, je-li A regulární, pak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{ad}.$$

Důkaz. Prvek na místě ij v součinu $A \cdot A^{ad}$ je

$$(A \cdot A^{ad})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}.$$

Pro $i = j$ je to $|A|$ (rozvoj podle i-tého řádku), pro $i \neq j$ je to 0 (falešný rozvoj podle i-tého řádku). Obdobně vypočteme $A^{ad} \cdot A$, použijeme věty o rozvoji (falešném) rozvoji podle sloupce. □

Předchozí věta udává explicitní vzoreček pro výpočet inverzní matice. Pro praktický výpočet se hodí v případě, že potřebujeme znát jen několik prvků inverzní matice.

Determinant a maticové operace

Již víme, že transponováním se determinant nezmění. Nyní se podíváme na součin – následuje **věta o determinantu součinu.**

Věta 5.11. *Nechť A, B jsou čtvercové matice stejného stupně a R je regulární matice. Pak*

(i) $|A \cdot B| = |A|\,|B|$.
(ii) $|R^{-1}| = |R|^{-1}$.

Důkaz. Geometrická motivace: Mějme endomorfismy $f, g : R^3 \to R^3$ s maticemi A, B (vzhledem ke kanonické bázi). Matice složeného endomorfismu fg je $A \cdot B$. Pro libovolnou množinu $M \subset R^3$ s konečným objemem můžeme objem $fg(M)$ spočítat dvěma způsoby:

$$\text{Objem}(fg(M)) = |A| \cdot \text{Objem}(g(M)) = |A| \cdot |B| \cdot \text{Objem}(M)$$

$$\text{Objem}(fg(M)) = |AB| \cdot \text{Objem}(M).$$

Skutečný důkaz:

(i) Provedení elementární řádkové úpravy na matici A lze vyjádřit násobením maticí U elementární úpravy zleva. Pro násobení libovolného řádku číslem λ je $|U| = \lambda$. Pro přičtení nekolikanásobku jistého řádku k jinému je $|U| = 1$. Tedy, pro libovolnou matici A a matici nějaké elementárních úpravy U platí $|UA| = |U| \cdot |A|$ (viz determinant a elementární úpravy). Odtud snadno indukcí dostaneme, že pro libovolné matice $U_1, U_2, \dots, U_n$ elementárních úprav platí $|U_1 U_2 \dots U_n| = |U_1| \cdot |U_2| \cdot \ldots \cdot |U_n|$.

Pokud je A nebo B signulární, pak je zřejmě $A \cdot B$ singulární a vzorec $|AB| = |A| \cdot |B|$ platí. Jsou-li A, B regulární, pak je lze zapsat jako součin matic elementárních úprav $A = U_1 \dots U_n$, $B = V_1 \dots V_m$ a máme

$$|AB| = |U_1 \dots U_n V_1 \dots V_m| = |U_1| \cdot \ldots \cdot |U_n| \cdot |V_1| \cdot \ldots \cdot |V_m| =$$

$$|U_1 \dots U_n| \cdot |V_1 \dots V_m| = |A| \cdot |B|.$$

(ii) Z předchozího bodu máme $|R| \cdot |R^{-1}| = |R \cdot R^{-1}| = |E| = 1$.

□

Upozornění. Pro determinant součtu dvou matic žádný jednoduchý vzoreček neexistuje!!!

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo je aplikací determinantu na soustavy lineárních rovnic s regulární maticí. Umožňuje například určit jednu složku řešení, aniž bychom museli počítat řešení celé.

Věta 5.12. *Nechť $A = (a_{ij})$ je regulární čtvercová matice stupně n nad tělesem T, $\mathbf{b} \in T^n$. Pro řešení $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ soustavy rovnic $A\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ platí:*

$$x_k = \frac{|A(k, \mathbf{b})|}{|A|}, \quad k = 1, \dots, n,$$

kde $A(k, \mathbf{b})$ je matice, která vznikne z A nahrazením k-tého sloupce vektorem pravých stran $\mathbf{b}$.

Důkaz. Pro pohodlí zápisu budeme dokazovat pro $k = 1$. Ze vztahu $A\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ máme $b_j = \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i$. Tedy

$$|A(1,b)| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Podle 5.2 můžeme tento determinant rozepsat:

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} a_{1i}x_i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2i}x_i & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{ni}x_i & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Všechny členy s výjimkou prvního jsou nulové, protože matice jsou singulární. Takže

$$|A(1,\mathbf{b})| = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} a_{1i}x_i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2i}x_i & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{ni}x_i & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 \cdot \det A$$

a jsme hotovi. □