Řešení domácích úkolů na lineární algebru 08/09 zima

Příklad 1. Určete všechna řešení následující soustavy rovnic nad $\mathbb{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Použijte postup vysvětlený na cvičení.

Řešení.

Gaussovou eliminací převedeme matici do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 4 \end{array}\right).$$

V první úpravě jsme přičetli první řádek k druhému a trojnásobek prvního řadku k třetímu. V druhé úpravě jsme pětinásobek druhého řadku přičetli ke třetímu.

Označme proměnné pořadě $x_1, \dots, x_5$. Parametry jsou x_3, x_5.

Spočteme libovolné řešení soustavy (partikulární řešení): Zvolíme například $x_3 = x_5 = 0$. Z poslední rovnice máme $4x_4 = 4$, takže $x_4 = 1$. Z druhé rovnice $4x_2 + 5x_4 = 3$, neboli $4x_2 + 5 = 3$, t.j. $x_2 = 3$. Z první rovnice vypočteme $x_1 = 3$. Nalezli jsme řešení $(3, 3, 0, 1, 0)$.

Nyní zvolíme za parametry $x_3 = 1$ a $x_5 = 0$ a dopočteme řešení **příslušné homogenní soustavy**. Vyjde $(6, 1, 1, 0, 0)$. Volbou parametrů $x_3 = 0$ a $x_5 = 1$ dostáváme řešení $(0, 0, 0, 2, 1)$.

Množina všech řešení dané soustavy je

$$\{(3,3,0,1,0) + s(6,1,1,0,0) + t(0,0,0,2,1) : s,t \in \mathbb{Z}_7\} =$$

$$= (3,3,0,1,0) + \langle (6,1,1,0,0), (0,0,0,2,1) \rangle.$$

Vidíme, že soustava má právě 49 řešení.

Příklad 2. Zjistěte pro která $a \in \mathbb{R}$ je množina vektorů

$$\{(a,-4,-1), (4,-6,-3), (1,1,-a)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

lineárně nezávislá.

1. Řešení. Dané vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když rovnice

$$x(a,-4,-1)+y(4,-6,-3)+z(1,1,-a)=(0,0,0)$$

má pouze řešení $x=y=z=0$. Rozepsání do složek získáme homogenní soustavu rovnic, kterou upravíme na odstupňovaný tvar.

$$\begin{pmatrix} a & 4 & 1 \\ -4 & -6 & 1 \\ -1 & -3 & -a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & -a \\ -4 & -6 & 1 \\ a & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & -a \\ 0 & 6 & 1+4a \\ 0 & 4-3a & 1-a^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & -a \\ 0 & 6 & 1+4a \\ 0 & 24-18a & 6-6a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & -a \\ 0 & 6 & 1+4a \\ 0 & 0 & (-4+3a)(1+4a)+6-6a^2 \end{pmatrix}.$$

(Nejprve jsme prohodili řádky; potom jsme (-4)-násobek 1. řádku přičetli k 2. a a-násobek 1. řádku přičetli ke 3.; pak jsme 3. řádek vynásobili šesti; nakonec jsme $(-4+3a)$-násobek 2. řádku přičetli ke třetímu.)

Tato matice je v odstupňovaném tvaru, nezávisle na a. Vektory budou lineárně nezávislé právě tehdy, když soustava má pouze triviální řešení, tj. právě tehdy, když $(-4+3a)(1+4a)+6-6a^2 \neq 0$. Vyřešením této kvadratické rovnice zjistíme, že dané vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $a \neq 2$ a $a \neq \frac{1}{6}$.

2. Řešení. Využijeme toho, že elementární řádkové úpravy matice nemění lineární závislost/nezávislost řádků. Napíšeme si tedy vektory do řádků a převedeme na odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} a & -4 & -1 \\ 4 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 4 & -6 & -3 \\ a & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -10 & -3+4a \\ 0 & -4-a & -1+a^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -10 & -3+4a \\ 0 & 40+10a & 10-10a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -10 & -3+4a \\ 0 & 0 & (4+a)(-3+4a)+10-10a^2 \end{pmatrix}$$

(Nejprve jsme prohodili řádky; potom jsme (-4)-násobek 1. řádku přičetli k druhému a $(-a)$-násobek 1. řádku přičetli ke 3.; pak jsme vynásobili 3. řádek číslem 10; nakonec jsme $(4+a)$-násobek 2. řádku přičtli ke 3.)

Tato matice je v odstupňovaném tvaru, nezávisle na a. Vektory budou lineárně nezávislé právě tehdy, když matice neobsahuje nulový řádek, tj. právě tehdy, když $(4+a)(-3+4a)+10-10a^2 \neq 0$. Vyřešením této kvadratické rovnice zjistíme, že dané vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $a \neq 2$ a $a \neq \frac{1}{6}$.

Poznámky.

- Pokud již víme, že $h(A)=h(A^T)$, můžeme v druhém řešení při převodu na odstupňovaný tvar provádět jak sloupcové tak řádkové úpravy. V této úloze to postup asi příliš neusnadní.

- Obvyklou chybou bylo, že jste nějaký řádek vynásobili například výrazem $3 - 4a$. To je elementární úprava jen když $3 - 4a \neq 0$. Pokud $3 - 4a = 0$ tak násobíte řádek číslem 0! Je buď potřeba se takovým úpravám vyhnout (to je většinou lepší), nebo tyto případy rozebrat zvlášť.

  Na druhou stranu si uvědomte, že např. přičtení $(3-4a)$-násobku prvního řádku k druhému je elementární úprava (nezávisle na a).

- Další chybou bylo, že jste využívali "tvrzení": Pokud je každá dvojice z vektorů v_1, v_2, v_3 lineárně nezávislá, pak je lineárně nezávislá i množina $\{v_1, v_2, v_3\}$. **To je nesmysl!!!** (Viz libovolné tři vektory v rovině, z nichž žádné dva neleží na jedné přímce.)

Příklad 3. Určete průnik (tj. najděte nějakou bázi průniku) podprostorů $U, V \leq \mathbb{Z}_3^4$, kde

$$U = \langle (1,2,1,2), (2,2,0,1), (0,1,1,2) \rangle, \quad V = \langle (2,0,1,1), (2,1,1,2), (0,1,0,2) \rangle.$$

Řešení.

Hledáme vektory $\vec{v}$, které leží v U, neboli existují $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ tak, že

$$\vec{v} = a(1,2,1,2) + b(2,2,0,1) + c(0,1,1,2),$$

a zároveň leží ve V, neboli existují $d, e, f \in \mathbb{Z}_3$ takové, že

$$\vec{v} = d(2,0,1,1) + e(2,1,1,2) + f(0,1,0,2).$$

Najdeme tedy množinu M všech 6-tic $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{Z}_3^6$, pro které

$$a(1,2,1,2) + b(2,2,0,1) + c(0,1,1,2) = d(2,0,1,1) + e(2,1,1,2) + f(0,1,0,2), \tag{1}$$

Hledaný průnik pak bude

$$U \cap V = \{\vec{v} = a(1,2,1,2) + b(2,2,0,1) + c(0,1,1,2) : (a,b,c,d,e,f) \in M\}.$$

(nebo, chcete-li

$$U \cap V = \{\vec{v} = d(2,0,1,1) + e(2,1,1,2) + f(0,1,0,2) : (a,b,c,d,e,f) \in M\}.$$

)

Rozepsáním (1) do složek dostáváme homogenní soustavu rovnic, kterou vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Máme dva parametry d, f. Volba $d = 0, f = 1$ dává řešení $(0, 2, 2, 0, 2, 1)$, volba $d = 1, f = 0$ dává řešení $(1, 2, 0, 1, 0, 0)$. Takže

$$\begin{aligned} M &= \langle (0,2,2,0,2,1), (1,2,0,1,0,0) \rangle \\ &= \{ r(0,2,2,0,2,1) + s(1,2,0,1,0,0) : r, s \in \mathbb{Z}_3 \}. \end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned} U \cap V &= \{ a(1,2,1,2) + b(2,2,0,1) + c(0,1,1,2) : (a,b,c) = r(0,2,2) + s(1,2,0), r, s \in \mathbb{Z}_3 \}. \\ &= \{ (0r + 1s)(1,2,1,2) + (2r + 2s)(2,2,0,1) + (2r + 0s)(0,1,1,2) : r, s \in \mathbb{Z}_3 \} \\ &= \{ r(0(1,2,1,2) + 2(2,2,0,1) + 2(0,1,1,2)) \\ &\quad + s(1(1,2,1,2) + 2(2,2,0,1) + 0(0,1,1,2)) : r, s \in \mathbb{Z}_3 \} \\ &= \{ r(1,0,2,0) + s(2,0,1,1) : r, s \in \mathbb{Z}_3 \} \\ &= \langle (1,0,2,0), (2,0,1,1) \rangle \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že množina $\{(1,0,2,0), (2,0,1,1)\}$ generuje $U \cap V$. Protože je navíc, jak se snadno ověří, lineárně nezávislá, tvoří bázi $U \cap V$.

Poznámky. Protože $(1,0,2,0) + (2,0,1,1) = (0,0,0,1)$, bází průniku je též "hezčí" množina $\{(1,0,2,0), (0,0,0,1)\}$.

Příklad 4. Spočítejte (t.j. najděte explicitní vyjádření)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n .$$

(Matice je nad reálnými čísly.)

Řešení. Označíme A matici, jejíž n-tou mocninu počítáme. Výpočet prvních několika mocnin vede k domněnce

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Hypotézu dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a vypočítejme A^{n+1}.

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & n+1 & \binom{n}{2}+n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \binom{n+1}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V druhé rovnosti jsme použili indukční předpoklad a v poslední vztah $\binom{n}{2}+n = \binom{n+1}{2}$.

Poznámky. Vyslovení domněnky nestačí, je to třeba dokázat!

Příklad 5. Permutace $\pi \in S_{10}$ je zadána tabulkou:

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 5 & 2 & 6 & 8 & 9 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte π^{2008}.

Řešení. Zápis permutace π jako složení nezávislých cyklů je

$$\pi = (1\ 3\ 5\ 6\ 8)(2\ 10\ 4)(7\ 9)$$

Pokud α, β jsou nezávislé cykly, pak zřejmě $(\alpha\beta)^n = \alpha^n\beta^n$ pro libovolné celé číslo n. Pokud α je cyklus délky k, pak $\alpha^k = id (= \alpha^0)$ z čehož snadno plyne, že $\alpha^n = \alpha^{n \bmod k}$. Takže

$$\pi^{2008} = [(1\ 3\ 5\ 6\ 8)(2\ 10\ 4)(7\ 9)]^{2008} = (1\ 3\ 5\ 6\ 8)^{2008}(2\ 10\ 4)^{2008}(7\ 9)^{2008} =$$

$$= (1\ 3\ 5\ 6\ 8)^{2008 \bmod 5}(2\ 10\ 4)^{2008 \bmod 3}(7\ 9)^{2008 \bmod 2} =$$

$$= (1\ 3\ 5\ 6\ 8)^3(2\ 10\ 4)^1(7\ 9)^0 = (1\ 6\ 3\ 8\ 5)^3(2\ 10\ 4).$$

Příklad 6. V závislosti na $a, b \in \mathbb{Z}_7$ spočtěte determinant následující matice A nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & b & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & b & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & b+6 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a+3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & b+6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+2 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & b+5 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-6)\begin{vmatrix} a+2 & 6 \\ 0 & b+5 \end{vmatrix} = 2(a+2)(b+5)(= 2ab+3a+4b+6)$$

Úpravy:

1. 6-násobek ($= (-1)$-násobek) 4. ř. jsme přičetli k 1. ř. a 3. ř.; 4-násobek 4. ř. jsme přičetli k 2. ř.
2. rozvoj podle druhého sloupce
3. 5-násobek 2. ř. jsme přičetli k 1.; 4-násobek 2. ř. jsme přičetli k 3. ř.
4. rozvoj podle třetího sloupce

Příklad 7. Určete matici homomorfismu $f : U \to V$ vzhledem k bázím B a C, kde

$$U = \langle (1,2,3),(0,2,1)\rangle \leq \mathbb{Z}_5^3, \quad B = \{(2,4,1),(1,4,1)\}$$
$$V = \mathbb{Z}_5^2, \quad C = \{(1,2),(3,3)\}$$
$$f(x,y,z) = (2x+y+4z, 2y+3z)$$

(To, že B je skutečně bází U ověřovat nemusíte.)

Řešení. Potřebujeme spočítat vyjádření vektorů $f(2,4,1) = (2,1)$, $f(1,4,1) = (0,1)$ v bázi C. To vede na řešení dvou soustav rovnic, u kterých se liší jenom pravé strany. Budeme je řešit současně.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Dopočtením řešení získáme $\{(2,1)\}_C = (4,1)$, $\{(0,1)\}_C = (1,3)$. Matice f vzhledem k B a C je tedy (vektory napíšeme do sloupců)

$$[f]_{B,C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$