

Pozorně si přečtete zadání, zejména nad kterým tělesem se počítá. Zadání pokračuje na druhé straně! Test odevzdávejte i se zadáním. Můžete používat jakékoliv zdroje, kromě pomoci ostatních studentů. U příkladů 1-3 pište postup, samotný výsledek je bezcenný.

Maximum je 25 bodů. K výsledku se přičte polovina z bodů za domácí úkoly (1-5, tj. max. 10 bodů). Celkově je třeba alespoň 20 bodů.

Příklad 1. (5 bodů) Určete všechna řešení následující soustavy rovnic nad \mathbb{Z}_2 :

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Příklad 2. (5 bodů) V závislosti na $a, b \in \mathbb{Z}_3$ určete dimenzi podprostoru U vektorového prostoru \mathbb{Z}_3^3 , kde

$$U = \langle \{(a, 1, 2), (1, b, 2), (1 + a^2, 2, 1)\} \rangle$$

Příklad 3. Uvažujme následující matici nad \mathbb{Z}_5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) (4 body) Spočítejte A^{-1} (pokud existuje)
- (b) (1 bod) Pomocí výsledku v (a) najděte všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Příklad 4. Uvažujme následující dvě permutace $\pi, \rho \in S_{10}$

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & 10 & 9 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\rho : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 10 & 4 & 9 & 6 & 8 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (1 body) Napište permutace $\pi, \rho, \pi\rho$ a $\pi^{-1}\rho^{-1}$ v zápisu pomocí nezávislých cyklů.
- (b) (1 bod) Určete znaménka permutací $\pi, \rho, \pi\rho$ a $\pi^{50}\rho^{121}\pi^{13}\rho^4$.
- (c) (2 body) Spočítejte π^{100} .

V následujících příkladech jen zakroužkujte správnou možnost (žádné vysvětlení není třeba). K získání bodu je třeba správně odpovědět na všechny tři otázky.

Příklad 5. (1 bod)

- **ANO NE** Množina $\{(1, 6, 10), (3, 1, 5), (2, 2, 2), (1, 3, 4)\}$ je lineárně nezávislá v \mathbb{R}^3 .
- **ANO NE** Množina $\{(2, 1, 2, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 2), (2, 1, 0, 1, 2), (0, 0, 1, 1, 1)\}$ generuje \mathbb{Z}_3^5 .
- **ANO NE** Nechť $U = \langle (1, 2, 3), (1, 1, 1) \rangle \leq \mathbb{R}^3$. Prostor U má dimenzi 2.

Příklad 6. (1 bod)

- **ANO NE** Existuje soustava rovnic nad \mathbb{R} , která má právě osm řešení.
- **ANO NE** Pro libovolné podprostory U a V prostoru \mathbb{R}^7 , množina $U \cup V$ je podprostorem \mathbb{R}^7 .
- **ANO NE** Nechť U a V jsou podprostory prostoru \mathbb{R}^7 a $\dim U = \dim V = 5$. Pak $U = V$.

Příklad 7. (1 bod)

- **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad \mathbb{R} , pro které $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad \mathbb{R} , pro které $A \neq 0, B \neq 0$ a $A \cdot B = 0$.
- **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad \mathbb{R} , pro které $A \cdot (B \cdot A) \neq (A \cdot B) \cdot A$.

Příklad 8. (1 bod)

- **ANO NE** Jednotková matice typu 4×4 nad \mathbb{Z}_{11} je regulární
- **ANO NE** Matice typu 4×4 nad \mathbb{R} je regulární právě tehdy, když každá dvojice jejích řádků je lineárně nezávislá.
- **ANO NE** Matice typu 2×2 nad \mathbb{R} je regulární právě tehdy, když řádky jsou lineárně nezávislé.

Příklad 9. (1 bod)

- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^2 = id$, pak π je transpozice.
- **ANO NE** Pro libovolné permutace $\pi, \rho \in S_{10}$ existuje právě jedno $\nu \in S_{10}$, pro které $\pi \circ \nu = \rho$.
- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^3 = id$, pak π je sudá.

Příklad 10. (1 bod)

- **ANO NE** Podepsal jste se.
- **ANO NE** Test odevzdáte i se zadáním.
- **ANO NE** Opisoval jste od kolegy.