Pozorně si přečtěte zadání, zejména nad kterým tělesem se počítá. Zadání pokračuje na druhé straně! Test odevzdávejte i se zadáním. Můžete používat jakékoliv zdroje, kromě pomoci ostatních studentů. U příkladů 1-3 pište postup, samotný výsledek je bezcenný.

Maximum je 25 bodů. K výsledku se přičte polovina z bodů za domácí úkoly (1-5, tj. max. 10 bodů). Celkově je třeba alespoň 20 bodů.

Příklad 1. (5 bodů) Určete všechna řešení následující soustavy rovnic nad $\mathbb{Z}_2$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Příklad 2. (5 bodů) V závislosti na $a, b \in \mathbb{Z}_3$ určete dimenzi průniku podprostorů U, V vektorového prostoru $\mathbb{Z}_3^3$, kde

$$U = \langle\{(1,1,2),(a,1,2)\}\rangle, \quad V = \langle\{(1,b,2),(1,1,b)\}\rangle,$$

Příklad 3. Uvažujme následující matici nad $\mathbb{Z}_5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (4 body) Spočítejte A^{-1} (pokud existuje)

(b) (1 bod) Pomocí výsledku v (a) najděte všechna řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Příklad 4. Uvažujme následující dvě permutace $\pi, \rho \in S_{10}$

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & 10 & 9 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\rho : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 10 & 4 & 9 & 6 & 8 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (1 body) Napište permutace $\pi, \rho, \pi\rho$ a $\pi^{-1}\rho^{-1}$ v zápisu pomocí nezávislých cyklů.

(b) (1 bod) Určete znaménka permutací $\pi, \rho, \pi\rho$ a $\pi^{50}\rho^{121}\pi^{13}\rho^4$.

(c) (2 body) Spočítejte π^{100}.

V následujících příkladech jen zakroužkujte správnou možnost (žádné vysvětlení není třeba). K získání bodu je třeba správně odpovědět na všechny tři otázky.

Příklad 5. (1 bod)
- **ANO NE** Množina $\{(1,6,10),(3,1,5),(2,2,2),(1,3,4)\}$ je lineárně nezávislá v $\mathbb{R}^3$.
- **ANO NE** Množina $\{(2,1,2,1,1),(1,1,0,1,2),(2,1,0,1,2),(0,0,1,1,1)\}$ generuje $\mathbb{Z}_3^5$.
- **ANO NE** Nechť $U = \langle(1,2,3),(1,1,1)\rangle \leq \mathbb{R}^3$. Prostor U má dimenzi 2.

Příklad 6. (1 bod)
- **ANO NE** Existuje soustava rovnic nad $\mathbb{R}$, která má právě osm řešení.
- **ANO NE** Pro libovolné podprostory U a V prostoru $\mathbb{R}^7$, množina $U \cup V$ je podprostorem $\mathbb{R}^7$.
- **ANO NE** Nechť U a V jsou podprostory prostoru $\mathbb{R}^7$ a $\dim U = \dim V = 5$. Pak $U = V$.

Příklad 7. (1 bod)
- **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad $\mathbb{R}$, pro které $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad $\mathbb{R}$, pro které $A \neq 0$, $B \neq 0$ a $A \cdot B = 0$.
- **ANO NE** Existují matice A, B typu 2×2 nad $\mathbb{R}$, pro které $A \cdot (B \cdot A) \neq (A \cdot B) \cdot A$

Příklad 8. (1 bod)
- **ANO NE** Jednotková matice typu 4×4 nad $\mathbb{Z}_{11}$ je regulární
- **ANO NE** Matice typu 4×4 nad $\mathbb{R}$ je regulární právě tehdy, když každá dvojice jejích řádků je lineárně nezávislá.
- **ANO NE** Matice typu 2×2 nad $\mathbb{R}$ je regulární právě tehdy, když řádky jsou lineárně nezávislé.

Příklad 9. (1 bod)
- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^2 = id$, pak π je transpozice.
- **ANO NE** Pro libovolné permutace $\pi, \rho \in S_{10}$ existuje právě jedno $\nu \in S_{10}$, pro které $\pi \circ \nu = \rho$.
- **ANO NE** Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_{10}$ platí: Pokud $\pi^3 = id$, pak π je sudá.

Příklad 10. (1 bod)
- **ANO NE** Podepsal jste se.
- **ANO NE** Test odevzdáte i se zadáním.
- **ANO NE** Opisoval jste od kolegy.