# 7. Lineární formy

Verze ze dne: 3.1.2006

Lineární forma je pouze jiný název pro homomorfismus do aritmetického vektorového prostoru $T^1$.

**Definice 7.1.** *Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$.* ***Lineární forma*** *na $V$ je homomorfismus $f : V \to T$ (tedy homomorfismus z $V$ do aritmetického vektorového prostoru dimenze 1 nad $T$).*
*Nechť $M$ je báze vektorového prostoru $V$ dimenze $n$ a $f$ lineární forma na $V$.* ***Maticí $f$ vzhledem k $M$*** *rozumíme matici homomorfismu $f$ vzhledem k bázím $M$ a $\{1_T\}$, značíme $\{f\}_M$. Je to matice typu $1 \times n$, neboli vektor v $T^n$. Tedy*

$$\{f\}_M := \{f\}_M^{\{1_T\}}.$$

*Je-li $\{f\}_M = (a_1, \ldots, a_m)$, pak výrazu*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots \ a_nx_n$$

*říkáme* ***analytické vyjádření lineární formy $f$ vzhledem k $M$****.*

Mějme lineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$ a bázi $M = \{\mathbf{m}_1, \ldots \mathbf{m}_n\}$ prostoru $V$. Z předchozí kapitoly víme:

1. Matici libovolného homomorfismu $f : V \to W$ vzhledem k bázím $M = \{\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n\}$ a $N$ dostaneme tak, že do $i$-tého sloupce napíšeme vektor $\{f(\mathbf{m}_i)\}_N$. V případě, že $f$ je lineární forma, tedy $W = T$, dostaneme volbou $N = \{1_T\}$ vztah

$$\{f\}_M = (f(\mathbf{m}_1), f(\mathbf{m}_2), \ldots, f(\mathbf{m}_n)).$$

2. Mějme vyjádření formy $f$ vzhledem k bázi $M$: $\{f\}_M = (a_1, \ldots, a_n)$. Obraz vektoru $\mathbf{v} \in V$, jehož vyjádření v bázi $M$ je $\{\mathbf{v}\}_M = (x_1, \ldots, x_n)$ spočteme

$$f(\mathbf{v}) = \{f\}_M \cdot \{\mathbf{v}\}_M^T = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n.$$

   Zde vidíme smysl analytického vyjádření lineární formy.

3. Víme, že $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$. Tedy jsou dvě možnosti
   a) $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$. V tomto případě je forma **nulová** (používá se také termín **triviální**), tj. $f(\mathbf{v}) = 0$ pro všechna $\mathbf{v} \in V$ a $\mathrm{Ker}(f) = V$.
   b) $\mathrm{Im}(f) = T$. V tomto případě je $\mathrm{Ker}(f)$ podprostor $V$ dimenze $n-1$. Libovolnému podprostoru dimenze $n-1$ v prostoru $(V)$ dimenze $n$ říkáme **nadrovina** (ve $V$). V poslední části uvidíme, že každá nadrovina je jádrem nějaké lineární formy.

4. Nechť $M, N$ jsou báze $V$. Z předchozí kapitoly víme, že $\{f\}_N^{\{1_T\}} = \{f\}_M^{\{1_T\}}\{id\}_N^M$, neboli

$$\{f\}_N = \{f\}_M\{id\}_N^M.$$

## Duál, duální báze

Z přechozí kapitoly víme, že množina všech homomorfismů z $V$ do $W$ tvoří (spolu s přirozenými operacemi sčítání a skalárního násobení) vektorový prostor dimenze $\dim(V) \cdot \dim(W)$. Pro $W = T$ se tomuto prostoru říká duál:

**Definice 7.2.** *Nechť $V$ je vektorový prostor (dimenze $n$). Vektorovému prostoru všech lineárních forem na $V$ říkáme* ***duální prostor*** *(též* ***duál****) k $V$ a značíme $\widetilde{V}$:*

$$\widetilde{V} := \mathrm{Hom}(V, T).$$

*Platí* $\dim(V) = \dim(\widetilde{V})$.
*Je-li $M = \{\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n\}$ báze $V$, pak* ***duální bází*** *k $M$ rozumíme bázi $\widetilde{M} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ prostoru $\widetilde{V}$, kde $\{f_i\}_M = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) = e_i$.*
*Prvek $f_i$ duální báze je tedy forma s analytickým vyjádřením*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

*vzhledem k bázi $M$. Ještě trochu jinak: forma, pro níž*

$$f_i(\mathbf{m}_j) = \delta_{ij}.$$

Uvažujme vektorový prostor $V$ a jeho bázi $M$. Lineární forma $f$ na $V$ má matici $\{f\}_M$ vzhledem k $M$. Formu $f$ můžeme také chápat jako prvek (vektor) duálu. Tedy máme vyjádření $\{f\}_{\widetilde{M}}$ v bázi $\widetilde{M}$. Vyjde totéž:

**Tvrzení 7.3.** *Nechť $f$ je lineární forma na $V$, $M$ je báze $V$. Pak $\{f\}_M = \{f\}_{\widetilde{M}}$.*

*Důkaz.* Označme $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n$ vektory báze $M$ a $f_1, \ldots, f_n$ vektory duální báze $\widetilde{M}$, tedy $f_i(\mathbf{m}_j) = \delta_{ij}$. Vyjádříme $f$ v bázi $\widetilde{M}$:

$$\{f\}_{\widetilde{M}} = (a_1, \ldots, a_n), \quad a_i \in T,$$

čili

$$f = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n.$$

Matice $f$ vzhledem k $M$ je

$$\{f\}_M = (f(\mathbf{m}_1), \ldots, f(\mathbf{m}_n)).$$

Z definice duální báze máme

$$f(\mathbf{m}_i) = a_1 f_1(\mathbf{m}_i) + \ldots a_n f_n(\mathbf{m}_i) = a_i$$

a jsme hotovi. $\square$

Následující tvrzení říká v jakém vztahu je matice přechodu mezi dvěma bázemi ve $V$ s maticí přechodu mezi duálními bázemi v duálním prostoru $\widetilde{V}$.

**Tvrzení 7.4.** *Nechť $M, N$ jsou báze vektorového prostoru $V$ a $A$ je matice přechodu od $M$ k $N$. Pak $(A^T)^{-1}$ $(= (A^{-1})^T)$ je matice přechodu od $\widetilde{M}$ k $\widetilde{N}$. V symbolech*

$$\{id\}^{\widetilde{M}}_{\widetilde{N}} = ((\{id\}^{M}_{N})^T)^{-1}.$$

*(První identita je na $V$, druhá na $\widetilde{V}$.)*

*Duálně:*

$$\{id\}^{M}_{N} = ((\{id\}^{\widetilde{M}}_{\widetilde{N}})^T)^{-1}.$$

*Důkaz.* Toto tvrzení je speciálním případem tvrzení o matici duálního homomorfismu (viz níže). Přesto uvedeme důkaz. Stačí dokázat, že matice přechodu od $\widetilde{N}$ k $\widetilde{M}$ je $A^T$. Označme $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektory báze $N$ a $f_1, \ldots, f_n$ vektory báze $\widetilde{M}$ (neboli $\{f_j\}_M = e_j$). Matice $A = (a_{ij})^n_{i,j=1}$ je matice přechodu od $M$ k $N$, tedy ve sloupcích matice $A$ máme vyjádření vektorů z $N$ v bázi $M$:

$$\{\mathbf{v}_i\}_M = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}).$$

V $j$-tém sloupci matice přechodu od $\widetilde{N}$ k $\widetilde{M}$ je vyjádření vektoru $f_j$ v bázi $\widetilde{N}$. Máme

$$\{f_j\}_{\widetilde{N}} = \{f_j\}_N = (f_j(\mathbf{v}_1), \ldots, f_j(\mathbf{v}_n))$$

podle předchozího tvrzení a 1. poznámky za definicí lineární formy. Chceme tedy dokázat, že $f_j(\mathbf{v}_i) = a_{ji}$:

$$f_j(\mathbf{v}_i) = \{f_j\}_M \cdot \{\mathbf{v}_i\}^T_M = e_j \cdot (a_{1i}, \ldots, a_{ni})^T = a_{ji}.$$

□

Důsledkem předchozího tvrzení je

**Věta 7.5.** *Nechť $V$ je vektorový prostor dimenze $n$ a $N$ báze duálního prostoru $\widetilde{V}$. Pak existuje právě jedna báze $M$ prostoru $V$ taková, že $\widetilde{M} = N$. Zobrazení $M \to \widetilde{M}$ je tedy bijekce mezi množinou všech bází $V$ a množinou všech bází $\widetilde{V}$.*

*Důkaz.* Vezmeme libovolnou bázi $P$ prostoru $V$. Označme $A$ matici přechodu od $\widetilde{P}$ k $N$, tedy

$$A := \{id\}^{\widetilde{P}}_{N}.$$

Připomeňme, že ve sloupcích $M$ máme vyjádření vektorů báze $N$ v bázi $\widetilde{P}$.

Definujme pro $i = 1 \ldots n$ vektory $\mathbf{m}_i \in V$ tak, že $\{\mathbf{m}_i\}_P$ je $i$-tý sloupec matice $(A^{-1})^T$. Protože $(A^{-1})^T$ je regulární, množina $M := \{\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n\}$ je báze $V$. Dle definice

$$\{id\}^{P}_{M} = (A^{-1})^T$$

Podle předchozího tvrzení je

$$\{id\}^{\widetilde{P}}_{\widetilde{M}} = (((A^{-1})^T)^{-1})^T = A.$$

Tedy vyjádření vektorů bází $\widetilde{M}$ a $N$ vzhledem k bázi $\widetilde{P}$ jsou stejná, takže $\widetilde{M} = N$.

Jednoznačnost plyne z pozorování, že pokud pro dvě regulární matice $A, B$ platí $(A^{-1})^T = (B^{-1})^T$, pak $A = B$. □

Předchozí důkaz dává zároveň metodu, jak bázi $M$, aby $\widetilde{M} = N$, najít.

**Příklad.** Ve vektorovém prostoru $\widetilde{R^3}$ máme dány formy $f_1, f_2, f_3$:

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x+y+z \\ f_2(x,y,z) &= y+z \\ f_3(x,y,z) &= z \end{aligned}$$

Ověřte, že $N := \{f_1, f_2, f_3\}$ je báze $\widetilde{R^3}$ a najděte bázi $M = \{b_1, b_2, b_3\}$ prostoru $R^3$ takovou, že $\widetilde{M} = N$.

**Řešení.** Označme $K$ kanonickou bázi $R^3$. Máme zadáno

$$\{f_1\}_K = \{f_1\}_{\widetilde{K}} = (1,1,1), \quad \{f_2\}_K = \{f_1\}_{\widetilde{K}} = (0,1,1), \quad \{f_3\}_K = \{f_1\}_{\widetilde{K}} = (0,0,1).$$

Protože vyjádření vektorů $f_1, f_2, f_3$ vzhledem k bázi $\widetilde{K}$ jsou tři lineárně nezávislé vektory, je $N$ báze. Matice přechodu od $\widetilde{K}$ k $N$ je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podle důkazu předchozí věty je $(A^{-1})^T$ matice přechodu od $K$ k $M$. Spočítáme

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ve sloupcích této matice máme vyjádřené vektory báze $M$ v kanonické bázi. Tedy

$$M = \{m_1, m_2, m_3\} = \{(1,0,0), (-1,1,0), (0,-1,1)\}.$$

## Duální homomorfismus

**Definice 7.6.** *Nechť $\phi$ je homomorfismus $\phi : V \to W$.* ***Duálním homomorfismem*** *k $\phi$ rozumíme homomorfismus $\widetilde{\phi} : \widetilde{W} \to \widetilde{V}$ definovaný vztahem*

$$\widetilde{\phi}(f) := f \circ \phi,$$

*kde $f \in \widetilde{W}$. Neboli, pro $f \in \widetilde{W}$, $\mathbf{v} \in V$ platí*

$$(\widetilde{\phi}(f))(\mathbf{v}) := f(\phi(\mathbf{v})).$$

Zde je třeba si pečlivě rozmyslet, „co kam vede“. Máme homomorfismus $\phi : V \to W$. Definujeme homomorfismus $\widetilde{\phi} : \widetilde{W} \to \widetilde{V}$. Toto zobrazení tedy musí lineární formě $f : W \to T$ přiřadit lineární formu $\phi(f) : V \to T$. Toto $\phi(f)$ definujeme jako složení homomorfismů $\phi$ a $f$.

Je snadné ověřit, že $\widetilde{\phi}$ je skutečně homomorfismus (viz cvičení).

**Tvrzení 7.7.** *Nechť $V, W$ jsou vektorové prostory (konečné dimenze), $M$ báze $V$, $N$ báze $W$, $\phi : V \to W$ homomorfismus, jehož matice vzhledem k $M$ a $N$ je $A$. Pak matice $\widetilde{\phi}$ vzhledem k $\widetilde{N}$ a $\widetilde{M}$ je $A^T$. V symbolech:*

$$\{\widetilde{\phi}\}^{\widetilde{M}}_{\widetilde{N}} = (\{\phi\}^N_M)^T.$$

*Důkaz.* Označme $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_k$ vektory báze $M$ a $g_1, \ldots, g_l$ vektory báze $\widetilde{N}$, tedy $\{g_i\}_N = e_i$. Matice $\phi$ vzhledem k bázi $M$ a $N$ je $A = (a_{ij})$, neboli

$$\{\phi(\mathbf{m}_i)\}_N = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ki}).$$

Matice $\widetilde{\phi}$ vzhledem k $\widetilde{N}$ a $\widetilde{M}$ má v $j$-tém sloupci vyjádření vektoru $\widetilde{\phi}(g_j)$ v bázi $\widetilde{M}$, tedy vektor

$$\{\widetilde{\phi}(g_j)\}_{\widetilde{M}} = \{\widetilde{\phi}(g_j)\}_M = ((\widetilde{\phi}(g_j))(\mathbf{m}_1), \ldots, (\widetilde{\phi}(g_j))(\mathbf{m}_l)) = (g_j(\phi(\mathbf{m}_1)), \ldots, g_j(\phi(\mathbf{m}_k))).$$

Protože

$$g_j(\phi(\mathbf{m}_i)) = \{g_j\}_N \cdot \{\phi(\mathbf{m}_i)\}_N^T = e_j \cdot (a_{1i}, \ldots, a_{ki})^T = a_{ji},$$

jsme hotovi. □

Z předchozího tvrzení vidíme, že $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim(\mathrm{Im}(\widetilde{\phi}))$ – obojí je rovno hodnosti matice $A$ (protože transponováním se hodnost nemění). Speciálně, duál k automorfismu $V$ je automorfismus $\widetilde{V}$.

Přímo z definice snadno nahlédneme, že duál k identickému automorfismu na $V$ je identický automorfismus na $\widetilde{V}$. Použijeme-li tedy předchozí tvrzení na identický automorfismus, dostaneme tvrzení o matici přechodu mezi duálními bázemi.

Pro libovolné dva homomorfismy $\phi, \rho : V \to W$ a prvek $t \in T$ platí

$$\widetilde{t \cdot \phi} = t \cdot \widetilde{\phi}, \quad \widetilde{\phi + \rho} = \widetilde{\phi} + \widetilde{\rho}.$$

Pro libovolné dva homomorfismy $\phi : U \to V$, $\rho : V \to W$ platí

$$\widetilde{\rho \circ \phi} = \widetilde{\phi} \circ \widetilde{\rho}.$$

Tyto vztahy lze ověřit buď rozepsáním definice (viz cvičení), nebo z předchozího tvrzení. Například třetí vztah ověříme tak, že zvolíme libovolné báze $M, N, O$ prostorů $U, V, W$. Jsou-li $A, B$ pořadě matice $\rho$, $\phi$ vzhledem k $M$ a $N$, $N$ a $O$, pak matice homomorfismu na levé straně (vzhledem k $M$ a $O$) je $(AB)^T$ a matice homomorfismu na pravé straně je $B^T A^T$.

Shrnuto:

**Věta 7.8.** *Nechť $V, W$ jsou vektorové prostory konečné dimenze. Zobrazení $\phi \to \widetilde{\phi}$ je izomorfismem vektorových prostorů* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *a* $\mathrm{Hom}(\widetilde{W}, \widetilde{V})$. *Platí $\widetilde{id_V} = id_{\widetilde{V}}$ a pro libovolné dva homomorfismy $\phi : U \to V$, $\rho : V \to W$ platí $\widetilde{\rho \circ \phi} = \widetilde{\phi} \circ \widetilde{\rho}$.*

*Důkaz.* Zbývá pouze ověřit, že $\phi \to \widetilde{\phi}$ je bijekce. To je snadný důsledek předchozího tvzení. Zvolme libovolné báze $M$, $N$ prostorů $V, W$.

Zobrazení je prosté: Jsou-li $\phi \neq \rho : V \to W$ dva homomorfismy, pak $\{\phi\}_M^N \neq \{\rho\}_M^N$, tedy $\{\widetilde{\phi}\}_{\widetilde{N}}^{\widetilde{M}} = (\{\phi\}_M^N)^T \neq (\{\rho\}_M^N)^T = \{\widetilde{\rho}\}_{\widetilde{N}}^{\widetilde{M}}$, takže $\widetilde{\phi} \neq \widetilde{\rho}$.

Zobrazení je na: Pro libovolný homomorfismus $\theta : \widetilde{W} \to \widetilde{V}$ vezmeme homomorfismus $\phi : V \to W$ takový, že $\{\phi\}_M^N = (\{\theta\}_{\widetilde{N}}^{\widetilde{M}})^T$. Pak $\{\widetilde{\phi}\}_{\widetilde{N}}^{\widetilde{M}} = ((\{\theta\}_{\widetilde{N}}^{\widetilde{M}})^T)^T = \{\theta\}_{\widetilde{N}}^{\widetilde{M}}$, tedy $\widetilde{\phi} = \theta$. □

## Dualita mezi podprostory $V$ a $\widetilde{V}$.

Shrňme si nyní, pro které objekty máme definovaný duál:

1. K vektorovém prostoru $V$ umíme vytvořit duální vektorový prostor $\widetilde{V}$ nad stejným tělesem.
2. K bázi $M$ vektorového prostoru $V$ umíme vytvořit duální bázi $\widetilde{M}$ prostoru $\widetilde{V}$.
3. K homomorfismu $\phi : V \to W$ umíme vytvořit duální homomorfismus $\widetilde{\phi} : \widetilde{W} \to \widetilde{V}$.

V této části definujeme duály podprostorů:

4. K podprostoru $M$ vektorového prostoru $V$ definujeme duální podprostor $\Phi(M)$ prostoru $\widetilde{V}$.

4'. K podprostoru $N$ vektorového prostoru $\widetilde{V}$ definujeme duální podprostor $\Psi(N)$ prostoru $V$.

Zobrazení $\Phi$ budeme definovat nejen pro podprostory, ale i pro libovolné podmnožiny..

**Definice 7.9.** *Nechť $M$ je podmnožina vektorového prostoru $V$. Definujeme podmnožinu $\Phi(M)$ duálu $\widetilde{V}$ takto*

$$\Phi(M) := \{f|\ M \subseteq \mathrm{Ker}(f)\} = \{f|\ (\forall \mathbf{m} \in M)\ f(\mathbf{m}) = 0\}.$$

*Pokud $M$ je podprostor, říkáme, že $\Phi(M)$ je **podprostor duální** k $M$ (je zřejmé, že $\Phi(M)$ je opravdu podprostor).*
*Nechť $N$ je podmnožina duálního prostoru $\widetilde{V}$. Definujeme podmnožinu $\Psi(M)$ prostoru $V$ takto*

$$\Psi(N) := \bigcap_{f \in N} \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{v}|\ (\forall f \in N)\ f(v) = 0\}.$$

*Pokud $N$ je podprostor, říkáme, že $\Psi(N)$ je **podprostor duální** k $N$.*

Přímo z definice snadno vidíme, že $\Phi(M) = \Phi(\langle M \rangle)$, $\Psi(N) = \Psi(\langle N \rangle)$ pro libovolné množiny $M \subseteq V$ a $N \subseteq \widetilde{V}$.

**Věta 7.10.** *Nechť $V$ je vektorový prostor dimenze $n$. Pak zobrazení $U \to \Phi(U)$ je bijekce mezi podprostory $V$ a podprostory $\widetilde{V}$ a zobrazení $W \to \Psi(W)$ je k němu inverzní. Pro libovolné dva podprostory $U, W \subseteq V$ platí*

*(i)* $\Phi(U \cap W) = \Phi(U) \vee \Phi(W)$, $\Phi(U \vee W) = \Phi(U) \cap \Phi(W)$;

*(ii)* $\dim(\Phi(U)) = n - \dim(U)$.

*Duálně pro libovolné podprostory $U, W \subseteq \widetilde{V}$ platí*

*(i')* $\Psi(U \cap W) = \Psi(U) \vee \Psi(W)$, $\Psi(U \vee W) = \Psi(U) \cap \Phi(W)$;

*(ii')* $\dim(\Psi(U)) = n - \dim(U)$.

*Důkaz.* Mějme nějakou bázi $M$ prostoru $V$ a libovolný podprostor $U \subseteq \widetilde{V}$ dimenze $k$. Zvolíme libovolnou bázi $\{f_1, \ldots, f_k\}$ prostoru $U$. Tedy $U = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$. V prostoru $\Psi(U)$ jsou, podle definice a poznámky pod ní, právě ty vektory $\mathbf{v} \in V$, pro něž $f_i(\mathbf{v}) = 0$ pro každé $i$, neboli právě ty vektory, pro které $\{f_i\}_M \{\mathbf{v}\}_M^T = 0$. Takže $\mathbf{v} \in \Psi(U)$ právě tehdy, když $\{\mathbf{v}\}_M$ řeší homogenní soustavu rovnic s maticí $A$ (v symbolech $\{\mathbf{v}\}_M \in \mathrm{Ker}(A)$):

$$A = \begin{pmatrix} \{f_1\}_M \\ \{f_2\}_M \\ \vdots \\ \{f_k\}_M \end{pmatrix}.$$

Dimenze množiny řešení této soustavy je $n - h(A) = n - k$ a dokázali jsme (ii').

Duálně, pro libovolný podprostor $U \subseteq V$ dimenze $k$ zvolíme jeho bázi $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. V prostoru $\Phi(U)$ jsou právě ty formy $f \in \widetilde{V}$, pro něž $f(\mathbf{u}_i)$ pro každé $i$, neboli právě ty formy, pro které $\{f\}_M\{\mathbf{u}_i\}_M^T = 0$. Ale $\{f\}_M\{\mathbf{u}_i\}_M^T = \{\mathbf{u}_i\}_M\{f\}_M^T$, takže $f \in \Phi(U)$ právě tehdy, když $\{f\}_M$ řeší homogenní soustavu rovnic s maticí $A$ (v symbolech $\{f\}_M \in \mathrm{Ker}(A)$):

$$A = \begin{pmatrix} \{\mathbf{u}_1\}_M \\ \{\mathbf{u}_2\}_M \\ \vdots \\ \{\mathbf{u}_k\}_M \end{pmatrix}.$$

Dimenze množiny řešení této soustavy je $n - k$ a máme (ii).

Pro libolný podprostor $U \subseteq V$ máme

$$\Psi(\Phi(U)) = \Psi(\{f|\ U \subseteq \mathrm{Ker}(f)\}) = \bigcap_{f;U\subseteq \mathrm{Ker}(f)} \mathrm{Ker}(f) \supseteq U.$$

Protože $U \subseteq \Psi(\Phi(U))$ a prostory na obou stranách mají podle předchozích dvou odstavců stejnou dimenzi, platí $U = \Psi(\Phi(U))$.

Duálně, pro libovolný podprostor $U \subseteq \widetilde{V}$ máme

$$\Phi(\Psi(U)) = \Phi(\bigcap_{f\in U} \mathrm{Ker}(f)) = \{g|\ \bigcap_{f\in U} \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)\} \supseteq U.$$

Porovnáním dimenzí opět zjistíme, že $U = \Phi(\Psi(U))$.

Zjistili jsme, že $\Phi$, $\Psi$ jsou navzájem inverzní zobrazení, zbývá ukázat (i) a (i'), to ale lze nahlédnout přímo z definice, viz cvičení. □

Z důkazu věty rovněž vidíme, jak $\Phi(M)$ a $\Psi(N)$ pro nějaké podmnožiny $M \subseteq V$ a $N \subseteq \widetilde{V}$ spočítat.

**Příklad.** Máme dán vektorový prostor $V$ nad tělesem $Z_3$ dimenze 5, bázi $M$ a vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\{\mathbf{v}_1\}_M = (2,2,1,2,1), \quad \{\mathbf{v}_2\}_M = (2,1,0,1,0), \quad \{\mathbf{v}_3\}_M = (1,1,2,0,0).$$

Určete $N = \Phi(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$.

**Řešení.** Podle důkazu věty je $f \in N$ právě tehdy když $\{f\}_M \in \mathrm{Ker}(A)$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Převodem na Gaussův tvar spočítáme $\mathrm{Ker}(A)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \langle (2,1,0,1,1), (2,2,1,0,0) \rangle$$

Je tedy $N = \langle f_1, f_2 \rangle$, kde $\{f_1\}_M = (2,1,0,1,1)$ a $\{f_2\}_M = (2,2,1,0,0)$.

**Duální příklad.** Máme dán vektorový prostor $V$ nad tělesem $Z_3$ dimenze 5, bázi $M$ a formy $f_1, f_2, f_3$

$$\{f_1\}_M = (2,2,1,2,1), \quad \{f_2\}_M = (2,1,0,1,0), \quad \{f_3\}_M = (1,1,2,0,0).$$

Určete $N = \Psi(\{f_1, f_2, f_3\})$.

**Řešení.** Podle důkazu věty je $\mathbf{v} \in N$ právě tehdy když $\{\mathbf{v}\}_M \in \mathrm{Ker}(A)$, kde $A$ je jako v předchozí úloze. Je tedy $N = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, kde $\{\mathbf{v}_1\}_M = (2,1,0,1,1)$ a $\{\mathbf{v}_2\}_M = (2,2,1,0,0)$.

Uvažujme homogenní soustavu $A\mathbf{x}^T = 0$ $m$ rovnic o $n$ neznámých nad tělesem $T$. Pokud řádky matice chápeme jako matice lineárních forem $f_1, \ldots, f_m \in \widetilde{T^n}$ vzhledem ke kanonické bázi, pak množina $\mathrm{Ker}(A)$ všech řešení této soustavy je právě $\Psi(\{f_1, \ldots, f_m\})$ (tuto úvahu jsme provedli v důkazu věty). Máme-li naopak dán podprostor $U$ prostoru $T^n$ a chceme najít homogenní soustavu rovnic $A\mathbf{x}^T = 0$, jejíž řešením je právě podprostor $U$, stačí vzít libovolnou množinu $\{f_1, \ldots, f_l\}$ generátorů prostoru $\Phi(U)$ a do řádků matice $A$ napsat vyjádření forem $\{f_i\}$ v kanonické bázi. Pak totiž $\mathrm{Ker}(A) = \Psi(\Phi(\{f_1, \ldots, f_l\})) = \Psi(\Phi(U)) = U$. Tato úvaha se nám bude hodit i v kapitole o afinních prostorech, při přechodu od parametrického k rovnicovému vyjádření podprostoru.

**Příklad.** Určete matici $A$ nad tělesem reálných čísel, pro niž

$$\mathrm{Ker}(A) = U = \langle (0,2,3,4), (3,0,2,1), (2,1,2,1) \rangle, \quad \mathrm{Im}(A) = \langle (-1,2,1,3) \rangle.$$

**Řešení.** Spočteme $\Phi(U)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(U) = \langle f \rangle, \text{ kde } \{f\}_{k.b.} = (1,1,-2,1).$$

Aby byla splněna podmínka pro $\mathrm{Im}(A)$ položíme např.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Další důsledky věty.**

1. Dokážeme tvrzení zmíněné na začátku: Je-li $U$ nadrovina ve vektorovém prostoru $V$ dimenze $n$, pak existuje forma $f$ taková, že $\mathrm{Ker}(f) = U$.

   *Důkaz.* Vezmeme libovolnou nenulovou $f \in \Phi(U)$. Protože $\dim(\Phi(U)) = n - (n-1) = 1$ máme $\Phi(U) = \langle f \rangle$. Tedy
$$\mathrm{Ker}(f) = \Psi(\{f\}) = \Psi(\langle f \rangle) = \Psi(\Phi(U)) = U.$$
   □

2. Lineární forma $f$ z předchozího bodu je určena jednoznačně až na násobek: Mějme formy $f, g$ na vektorovém prostoru $V$ dimenze $n$. Pak $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ právě tehdy, když existuje nenulový prvek $t \in T$ takový, že $f = tg$.

   *Důkaz.*
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g) \Leftrightarrow \Psi(\{f\}) = \Psi(\{g\}) \Leftrightarrow \Psi(\langle f \rangle) = \Psi(\langle g \rangle) \Leftrightarrow \langle f \rangle = \langle g \rangle \Leftrightarrow (\exists 0 \neq t \in T)\ f = tg.$$
   □

3. Mějme lineární formy $f_1, \ldots, f_k, f$ na vektorovém prostoru $V$ dimenze $n$. Forma $f$ je lineární kombinací vektorů $f_1, \ldots, f_k \in \widetilde{V}$ právě tehdy, když $\cap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(f_i) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

   *Důkaz.*
$$f \in \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \Leftrightarrow \langle f_1, \ldots, f_k \rangle = \langle f_1, \ldots, f_k, f \rangle \Leftrightarrow \Psi(\langle f_1, \ldots, f_k \rangle) = \Psi(\langle f_1, \ldots, f_k, f \rangle) \Leftrightarrow$$
$$\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(f_i) = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(f_i) \cap \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \supseteq \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(f_i).$$
   □

4. Mějme lineární formy $f_1, \ldots, f_k$ na vektorovém prostoru $V$ dimenze $n$. Formy $f_1, \ldots, f_k \in \widetilde{V}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $\dim(\cap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(f_i)) = n - k$.

   *Důkaz.*
$$\{f_1, \ldots, f_k\} \text{ jsou lineárně nezávislé } \Leftrightarrow \dim(\langle f_1, \ldots, f_k \rangle) = k \Leftrightarrow$$
$$\dim(\Psi(\langle f_1, \ldots, f_k \rangle)) = \dim(\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker}(f_i)) = n - k.$$
   □