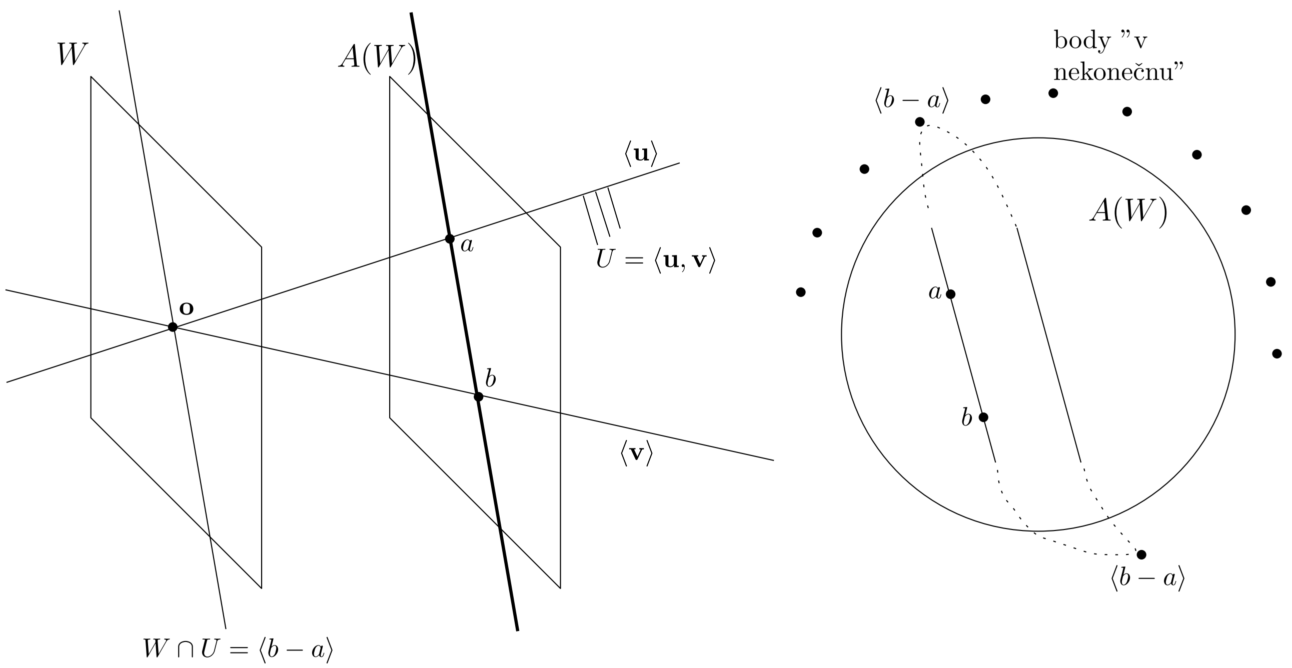
11. Projektivní prostor

Definice 11.1. *Nechť V je vektorový prostor dimenze n. **Projektivním prostorem** $P(V)$ **dimenze** $n-1$ rozumíme množinu směrů ve V, neboli*

$$P(V) = \{\langle \mathbf{v} \rangle |\ \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{o}\}, \quad \dim(P(V)) = \dim(V) - 1.$$

*Říkáme, že projektivní prostor $P(W)$ je **podprostorem** $P(V)$, pokud W je (vektorový) podprostor V. Prvky P (= směry ve V) neboli podprostory dimenze 0 nazýváme **geometrické body**, nebo též **projektivní body**. Je-li $\langle \mathbf{v} \rangle$ projektivní bod, pak libovolnému vektoru $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v} \rangle$ říkáme **aritmetický zástupce** projektivního bodu $\langle \mathbf{v} \rangle$.*
*Podprostorům dimenze 1 říkáme **projektivní přímky**, podprostorům dimenze 2 říkáme **projektivní roviny**. Podprostorům dimenze $n-1$ říkáme **projektivní nadroviny**.*
*Jsou-li $P(U), P(W)$ podprostory $P(V)$, jejich **spojením** resp. **průnikem** rozumíme pořadě podprostory $P(U \vee W)$, $P(U \cap W)$.*

Projektivní prostor dimenze n tedy vznikne z vektorového prostoru V dimenze $n-1$ tím, že vezmeme nenulové vektory ve V a ztotožníme vektor s jeho libovolným násobkem. Všimněme si, že projektivní prostor dimenze -1 je prázdná množina.



Obrázek 1: Představa projektivního prostoru.

V našem kurzu se nám budou projektivní prostory hodit ke studiu „kvadratických“ útvarů v afinních prostorech – zejména v $A(R^2)$ (elipsy, hyperoboly, paraboly) a v $A(R^3)$ (elipsoidy, paraboloidy, hyperboloidy).

Podívejme se na projektivní prostor $P(R^3)$ (je to tedy projektivní prostor dimenze 2). V R^3 vezmeme libovolnou rovinu $A(W)$ neprocházející počátkem, říkejme jí projekční plátno. Projektivní prostor $P(R^3)$ je definován jako množina směrů v R^3, jinými slovy, množina přímek procházejících počátkem. Každému bodu a na plátně (v $A(W)$) odpovídá bod v $P(R^2)$ – ta přímka, která prochází bodem a. Na obrázku bodu a odpovídá směr $\langle \mathbf{u} \rangle$, bodu b odpovídá směr $\langle \mathbf{v} \rangle$. Naopak, „téměř“ každému bodu v $P(R^3)$ odpovídá bod na plátně – jeho průnik s plátnem. „Téměř“ zde znamená: kromě směrů ve W, tedy směrů rovnoběžných s plátnem. Bodům v $P(W)$ (= směrům ve W = přímkám procházejícím počátkem ležícím ve W) říkáme nevlastní body. To, které body jsou nevlastní samozřejmě závisí na tom, kam plátno postavíme.

Uvažujme teď projektivní přímku $P(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)$. Tato přímka na plátně vypadá (rozuměj průnik s plátnem je) jako přímka procházející body a, b. Navíc na ní leží projektivní bod $\langle b - a \rangle$.

Někdy je výhodné si projektivní prostor představovat jen na plátně, v našem případě, bez třetího rozměru: K afinní rovině $A(W)$ si přidáme nevlastní body. Jeden bod ke každému směru $\langle \mathbf{w} \rangle$ ve W. Představujeme si jej jako „bod ležící v nekonečnu“ ve směru $\langle \mathbf{w} \rangle$. Projektivní přímky jsou pak afinní přímky, ke kterým přidáme „bod v nekonečnu“ odpovídající směru této přímky. Máme ještě jednu projektivní přímku, ta je tvořená nevlastními body. Všimněte si, že i dvě rovnoběžné přímky se protínají – v nevlastním bodě odpovídajícím jejich společnému směru (koleje se sbíhají v nekonečnu).

U projektivního prostoru $P(R^4)$ již vizuální představa podobná jako $P(R^3)$ chybí – špatně se představuje vektorový prostor dimenze 4 a plátno neprocházející počátkem dimenze 3. Stále si však $P(R^3)$ můžeme představovat jako afinní prostor dimenze 3, ke kterému přidáme body v nekonečnu, ke každému směru jeden. Čtenář si jistě rozmyslí, jak vypadají projektivní body, přímky a roviny v tomto prostoru a představí si, jak vypadá průnik dvou rovnoběžných rovin.

Dohromady máme dvě představy projektivního prostoru dimenze n:

- množina směrů ve vektorovém prostoru dimenze $n + 1$ (to je definice),
- množina bodů afinního prostoru dimenze n + „body v nekonečnu“ – pro každý směr jeden.

Tvrzení 11.2. *Nechť $P(U), P(W)$ jsou podprostory projektivního prostoru $P(V)$ konečné dimenze. Pak*

$$\dim(P(U \vee W)) + \dim(P(U \cap W)) = \dim(P(U)) + \dim(P(W)).$$

Důkaz. To je pouze důsledkem věty o dimenzi spojení a průniku pro vektorové prostory (umažeme-li písmena P, výrazy na obou stranách se zvětší o 2). □

Během motivačnách úvah jsme si všimli, že dvě různé projektivní přímky v $P(R^3)$ se protínají v jednom projektivním bodě, a že průnikem dvou různých rovin v $P(R^4)$ je projektivní přímka. Obecně platí:

Pozorování 11.3. *Nechť $P(U), P(W)$ jsou dvě různé nadroviny projektivního prostoru $P(V)$ dimenze n. Pak $P(U \cap W)$ je podprostor dimenze $n - 2$.*

Důkaz. Plyne z přechozího tvrzení, protože pokud $U \neq W$ a U, W jsou nadroviny, pak $U \vee W = V$. □

Kolineární zobrazení, Kolineace

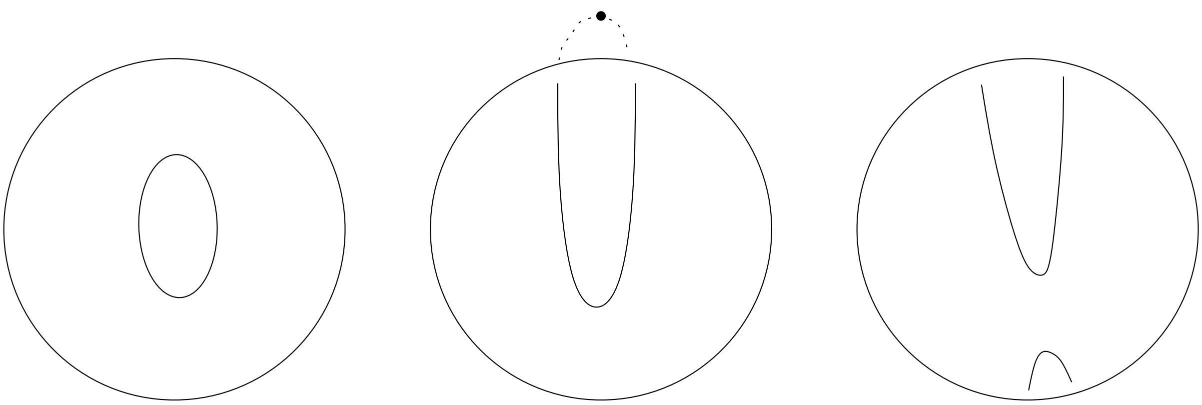
Definice 11.4. *Nechť V, W jsou vektorové prostory a $f : V \to W$ monomorfismus. Zobrazení $K : P(V) \to P(W)$ definované předpisem*

$$K(\langle \mathbf{v} \rangle) = \langle f(\mathbf{v}) \rangle, \quad \mathbf{v} \in V$$

*nazýváme **kolineární zobrazení vytvořené homomorfismem** f, značíme $K = \langle f \rangle$. Kolineární zobrazení $K : P(V) \to P(V)$ nazýváma **kolineace**.*
*Bod $\langle \mathbf{v} \rangle \in P(V)$, pro který $K(\langle \mathbf{v} \rangle) = \langle \mathbf{v} \rangle$ nazýváme **samodružný bod** kolineace K.*

Protože f je homomorfismus, $\langle f(\mathbf{u}) \rangle = \langle f(\mathbf{v}) \rangle$, pokud $\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle$. Protože f je monomorfismus, je $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{o}$ pro $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. Definice je tedy korektní. Všimněme si, že dvě kolineární zobrazení $< f >, < g >$: $P(V) \to P(W)$ se rovnají právě tehdy, když f je nenulový násobek g.

Geometrická motivace. Uvažujme projektivní prostor $P(R^3)$ a v něm plátno $A(W)$. Připomeňme, že monomorfismy (= izomorfismy) $f : R^3 \to R^3$ si lze představit jako „lineární deformace“. Uvažujme (nekonečný) kužel v R^3 s vrcholem v počátku. Podle otočení (což je monomorfismus R^3) se tento kužel jeví na plátně jako elipsa, parabola nebo hyperbola. Tedy kolineací můžeme na sebe vzájemně převádět elipsy, paraboly a hyperboly – objekty, které na plátně vypadají úplně jinak (nedají se na sebe převést afinním zobrazením). Tuto kolineaci vytvořenou otočením si lze v $A(W)$ představit tak, že postupně zvětšujeme elipsu „směrem k nekonečnu“. Když elipsu zvětšíme dostatečně, dotkne se v jednom bodě nevlastní přímky, a máme parabolu. Když ještě budeme pokračovat, „vyleze elipsa z druhé strany afinního prostoru“, a máme hyperbolu.



Obrázek 2: Obraz elipsy při různých kolineacích.

Bod $\langle \mathbf{v} \rangle \in P(V)$ je podle definice samodružný právě tehdy, když $f(\mathbf{v}) = t \cdot \mathbf{v}$ pro nějaký prvek $t \in T$, tj. právě když $\mathbf{v}$ je vlastní vektor f.

Příklad. Určete samodružné body kolineace K projektivního prostoru $P(R^3)$ vytvořené automorfismem f:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 2x_3).$$

Řešení. Matice f vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme charakteristický polynom matice A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-4+\lambda^2+3) = -(1-\lambda)^2(\lambda+1).$$

Vlastní čísla jsou $\lambda = -1$ a $\lambda = 1$. Vypočteme vlastní vektory. Pro $\lambda = -1$ máme

$$A - E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Projektivní bod $\langle(1,2,3)\rangle$ je samodružný bod K. Pro $\lambda = 1$ je

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy všechny body projektivní přímky $P(\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle)$ jsou samodružné body K.

Tvrzení 11.5. *Nechť V je vektorový prostor nad T, $P(V)$ je projektivní prostor dimenze n, $K : P(V) \to P(V)$ je kolineace. Pokud $T = C$, nebo $T = R$ a n je sudé, pak K má samodružný bod.*

Důkaz. Řekněme, že K je vytvořena homomorfismem $f : V \to V$. Protože víme, že samodružné body kolineace odpovídají vlastním vektorům f, stačí dokázat, že f má vlastní číslo. Vezmeme matici A homomorfismu f vzhledem k libovolné bázi prostoru V. Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu matice A. Nad tělesem komplexních čísel má každý polynom alespoň jeden kořen, tedy jsme hotovi. V případě $T = R$ si stačí uvědomit, že A má typ $n + 1$, tedy charakteristický polynom má stupeň $n + 1$. Každý polynom lichého stupně nad R má kořen (polynom je spojitá funkce, limity do $-\infty$ a ∞ mají opačná znaménka). $\square$

Aritmetická báze, geometrická báze

Mějme projektivní prostor $P(V)$. Libovolné bázi M prostoru V říkáme **aritmetická báze** $P(V)$. Souřadnicím vektoru $\mathbf{v}$ v bázi M říkáme **homogenní souřadnice** projektivního bodu $\langle\mathbf{v}\rangle$. Je zřejmé, že homogenní souřadnice geometrického bodu jsou určeny jednoznačně až na násobek. Například $(2,4,6), (1,2,3), (-3,-6,-9)$ jsou homogenní souřadnice projektivního bodu $\langle(1,2,3)\rangle$.

Homomorfismus $f : V \to W$ vektorových prostorů je jednoznačně určen obrazy prvků báze. Navíc víme, že obrazy prvků báze si můžeme libovolně předepsat a zobrazení rozšířit na homomorfismus. U projektivních prostorů podobnou roli hraje geometrická báze. Následující příklady ukazují, že aritmetická báze tuto funkci neplní.

Příklad. Neexistuje kolinace $K : P(R^2) \to P(R^2)$, pro kterou $K(\langle 0,1\rangle) = K(\langle 1,0\rangle) = \langle 1,2\rangle$. Kdyby ano, musel by existovat homomorfismus $f : R^2 \to R^2$, který jej vytváří. Tedy platilo by $f(1,0) = t_1(1,2)$, $f(0,1) = t_2(1,2)$ pro nějaká nenulová čísla $t_1, t_2 \in R^2$. Pak ale zřejmě f není monomorfismus (např. vektor $(t_2, -t_1)$ se zobrazí na nulový vektor, vlastně $\mathrm{Ker}(f) = \langle t_2, -t_1\rangle$).

Příklad. Existuje nekonečně mnoho různých kolineací $K : P(R^2) \to P(R^2)$, pro které $K(\langle 0,1\rangle) = \langle 0,1\rangle$, $K(\langle 1,0\rangle) = \langle 1,0\rangle$: Na kanonické bázi definujeme monomorfismus f_a např. takto $f_a(0,1) = (0,1)$, $f_a(1,0) = (a,0)$. Je jasné, že pro každé nenulové číslo $a \in R$ má $\langle f_a\rangle$ požadovanou vlastnost, přičemž pro různá a jsou $\langle f_a\rangle$ různé.

Nechť $P(V)$ je projektivní prostor dimenze n. Množinu $M = \{\langle \mathbf{m}_1\rangle, \ldots, \langle \mathbf{m}_{n+2}\rangle\}$ nazveme **geometrickou bází** prostoru $P(V)$, pokud žádná $n+1$-tice bodů z M neleží v jedné nadrovině (ekvivalentně, pokud libovolní aritmetičtí zástupci bodů této $n+1$-tice tvoří bázi V).

Například představujeme-li si $P(R^3)$ jako afinní rovinu + „body v nekonečnu“, pak geometrickou bázi tvoří čtyři body, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce.

Příklad. Nechť $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ je aritmetická báze $P(V)$ (neboli B je báze V). Pak $M = \{\langle \mathbf{v}_1\rangle, \ldots, \langle \mathbf{v}_{n+1}\rangle, \langle \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n\rangle\}$ je geometrická báze $P(V)$.

Na druhou stranu platí:

Tvrzení 11.6. *Je-li $\{\langle \mathbf{m}_1\rangle, \ldots, \langle \mathbf{m}_{n+2}\rangle\}$ geometrická báze $P(V)$, pak existují aritmetičtí zástupci $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{m}_i\rangle$ takoví, že $\mathbf{v}_{n+2} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_{n+1}$.*

Důkaz. Protože $\{\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_{n+1}\}$ je báze, můžeme vektor $\mathbf{m}_{n+2}$ vyjádřit jako

$$\mathbf{m}_{n+2} = t_1\mathbf{m}_1 + \ldots, t_n\mathbf{m}_{n+1}, \quad t_i \in T.$$

Stačí dokázat, že $t_i \neq 0$ pro libovolné $i = 1, 2, \ldots, n+1$ – položíme $\mathbf{v}_i = t_i\mathbf{m}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ a $\mathbf{v}_{n+2} = \mathbf{m}_n + 2$. Ale pokud $t_i = 0$ pro nějaké i, pak $\{\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_{i-1}, \mathbf{m}_{i+1}, \ldots, \mathbf{m}_{n+2}\}$ není báze. $\square$

Další příklad je motivací k následujícího tvrzení.

Příklad. Určete kolineaci $K : P(R^3) \to P(R^3)$, pro kterou

$$K(\langle 0,0,1\rangle) = \langle 2,3,-1\rangle, \quad K(\langle 0,1,1\rangle) = \langle -1,0,2\rangle, \quad K(\langle 1,1,1\rangle) = \langle 3,-1,0\rangle, \quad K(\langle 1,2,3\rangle) = \langle 7,2,-5\rangle$$

(pokud existuje).

Řešení. Zkusíme najít homomorfismus $f : R^3 \to R^3$. Aby byly splněny podmínky na kolineaci, je nutné a stačí, aby

$$f(0,0,1) = a(2,3,-1), \quad f(0,1,1) = b(-1,0,2), \quad f(1,1,1) = c(3,-1,0), \quad f(1,2,3) = d(7,2,-5).$$

Množina $M = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ je zřejmě báze R^3. Vyjádříme $(1,2,3)$ v této bázi: $(1,2,3) = (0,0,1) + (0,1,1) + (1,1,1)$. Musí tedy platit

$$d(7,2,-5) = f(1,2,3) = f(0,0,1) + f(0,1,1) + f(1,1,1) = a(2,3,-1) + b(-1,0,2) + c(3,-1,0).$$

Protože libovolný nenulový násobek f vytváří stejnou kolineaci, můžeme jednu z proměnných libovolně (nenulově) zvolit. Zvolíme $d = 1$ a vyřešíme příslušnou soustavu rovnic. Vyjde $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$. Vidíme, že kolineace je jednoznačně určena – homomorfismus, který ji vytváří je násobkem homomorfismu f určeného vztahy

$$f(0,0,1) = (2,3,-1), \quad f(0,1,1) = (-1,0,2), \quad f(1,1,1) = (3,-1,0),$$

Protože snadno ověříme, že vektory na pravé straně tvoří lineárně nezávislou množinu v R^3 (tj. bázi), je f monomorfismus. Tedy kolineace, která vyhovuje daným vztahům existuje a je určena jednozačně – je to kolineace vytvořená homomorfismem f. Připoňme, že matice f vzhledem k M a kanonické bázi je

$$\{f\}_M^{k.b.} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jako cvičení si můžete určit matici f vzhledem ke kanonickým bázím.

Tvrzení 11.7. *Nechť $M = \{\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_{n+2}\}$ a $Q = \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{n+2}\}$ jsou dvě geometrické báze prostoru $P(V)$. Pak existuje právě jedna kolineace $K : P(V) \to P(V)$, pro níž $K(\langle \mathbf{m}_i \rangle) = \langle \mathbf{q}_i \rangle$ ($i = 1, 2, \ldots, n+2$).*

Důkaz. Existence: Zvolíme aritmetické zástupce $\mathbf{u}_i \in \langle \mathbf{m}_i \rangle$, $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{q}_i \rangle$, aby $\mathbf{u}_{n+2} = \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1}$, $\mathbf{v}_{n+2} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1}$. Definujeme homomorfismus $f : V \to V$ určením obrazů báze: $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n+1$. Potom zřejmě f je izomorfismus a $f(\mathbf{u}_{n+2}) = \mathbf{v}_{n+2}$. Tedy kolineace K vytvořená f splňuje $K(\langle \mathbf{m}_i \rangle) = \langle \mathbf{q}_i \rangle$ ($i = 1, 2, \ldots, n+2$).

Jednoznačnost: Zvolíme aritmetické zástupce jako v předchozím odstavci a homomorfismus $f : V \to V$, který vytváří K. Protože $K(\langle \mathbf{m}_i \rangle) = \langle \mathbf{q}_i \rangle$ musí být $f(\mathbf{v}_i) = r_i \mathbf{u}_i$, $i = 1, \ldots, n+2$. Bez újmy na obecnosti, předpokládejme, že $r_{n+2} = 1$. Protože f je homomorfismus, máme

$$\mathbf{u}_{n+2} = f(\mathbf{v}_{n+2}) = f(\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_{n+1}) = f(\mathbf{v}_1) + \ldots + f(\mathbf{v}_{n+1}) = r_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + r_{n+1} \mathbf{u}_{n+1}.$$

Označme $M = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}\}$. Protože Q je geometrická báze, je M báze. Přejdeme-li v předchozím vztahu k vyjádřením vzhledem k M dostaneme

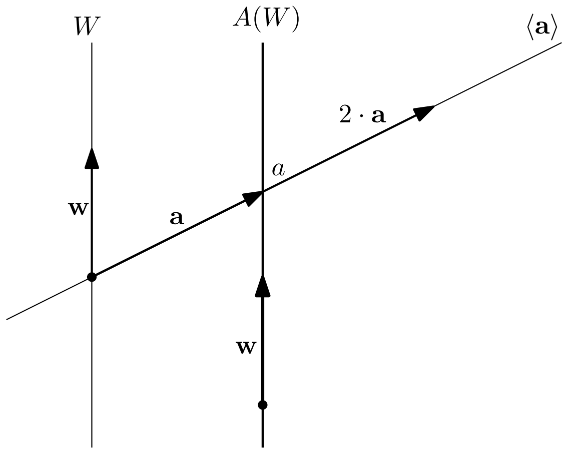
$$\{\mathbf{u}_{n+2}\}_M = (1, 1, \ldots, 1) = r_1 \{\mathbf{u}_1\}_M + \ldots + r_{n+1} \{\mathbf{u}_{n+1}\}_M = r_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + r_n \mathbf{e}_n = (r_1, \ldots, r_n).$$

Tedy $r_1 = \ldots = r_{n+1} = 1$. $\square$

Projektivní rozšíření afinního prostoru

Projektivní prostor $P(V)$ jsme si v předchozích částech představovali na „projekčním plátně" – afinním prostoru $A(W)$ dimenze n doplněném o „body v nekonečnu". Naopak k afinnímu prostoru $A(W)$ můžeme vytvořit projektivní prostor $P(V)$ téže dimenze podle obrázku 1 vlevo: Podíváme se na $A(W)$ z bodu mimo tento afinní prostor (bod „z jiné dimenze"). Tento bod (říkejme mu počátek) bude nulový vektor ve V, vektor spojující počátek s bodem $a \in A$ označíme $\mathbf{a}$ a jeho násobky označíme $t \cdot \mathbf{a}$ ($t \in T$). Do V ještě musíme přidat vektory vycházející z počátku rovnoběžné s W, to jsou vlastně přesně vektory z W. Formálně, položíme

$$V := \{t \cdot \mathbf{a} |\ t \in T,\ a \in A\} \cup W.$$



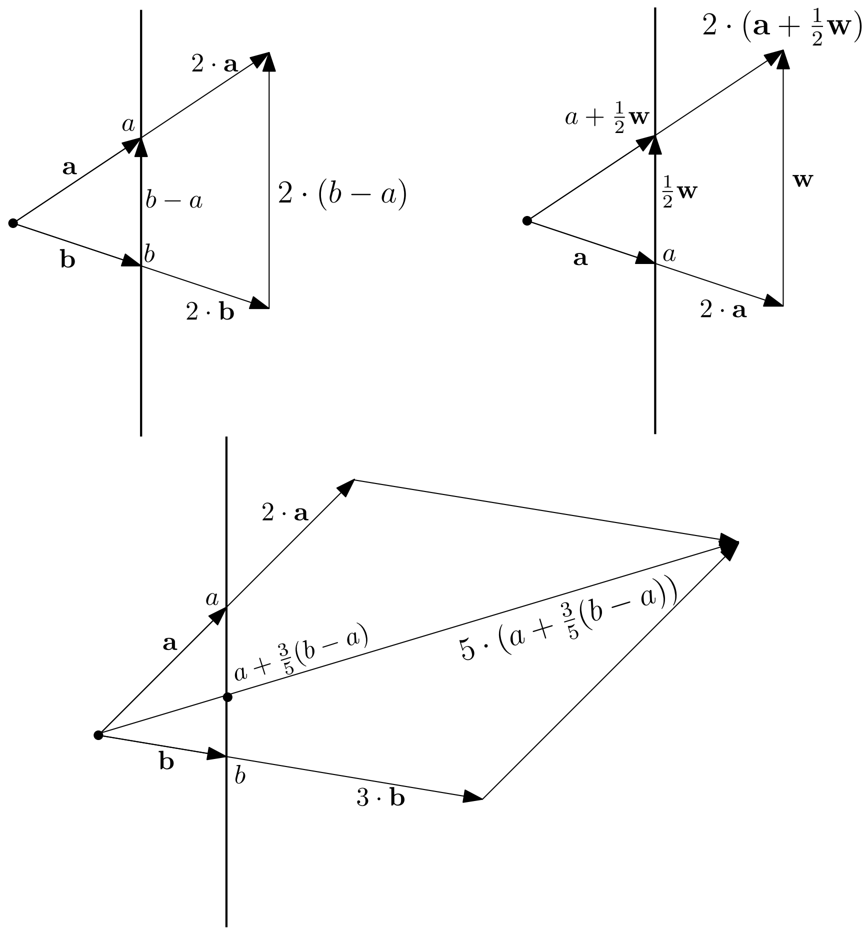
Obrázek 3: Projektivní rozšíření $A(W)$, $\dim(W) = 1$.

Operace na V definujeme tak, aby to opět odpovídalo představě na obrázku 1 vlevo. K definici operací můžeme použít pouze operace v afinním prostoru $A(W)$. Skalární násobení prvkem $r \in T$ bude pro $\mathbf{w} \in W$ definováno stejně jako ve W a pro $t \cdot \mathbf{a}$ položíme $r \cdot (t \cdot \mathbf{a}) = (rt) \cdot \mathbf{a}$. Sčítání dvou vektorů z W definujeme stejně jako ve W. V ostatních případech položíme (viz obrázek)

$$\begin{aligned} t \cdot \mathbf{a} - t \cdot \mathbf{b} &:= t \cdot (a - b) \\ t \cdot \mathbf{a} + s \cdot \mathbf{b} &:= (t+s) \cdot (a + \frac{s}{t+s}(b-a)),\ \text{pokud } t \neq -s \\ t \cdot \mathbf{a} + \mathbf{w} &:= t \cdot (a + \frac{1}{t} \cdot \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Afinní bod $a \in A$ ztotožníme s projektivním bodem $\langle \mathbf{a} \rangle \in P(V)$. Nyní $P(V) = A \cup P(W)$. Stejně jako v úvodu, nadrovině $P(W)$ říkáme **nevlastní nadrovina** a projektivním bodům ležícím v této nadrovině říkáme **nevlastní body**, nevlastní body jsou směry ve W. Ostatním bodů (tj. bodům v A) říkáme **vlastní**.

Intuitivně je zřejmé, že V je skutečně vektorový prostor. Formální ověření axiomů je ve cvičeních.



Obrázek 4: Sčítání v projektivní rozšíření prostoru $A(W)$, $\dim(W) = 1$.

Definice a tvrzení 11.8. *Mějme afinní prostor $A(W)$ dimenze n, jeho projektivní rozšíření $P(V)$ a soustavu souřadnic*

$$S = \{a, \mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n\}$$

v prostoru $A(W)$. Aritmetickou bázi

$$\bar{S} = \{\mathbf{a}, \mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n\}$$

nazýváme aritmetickou bází ***indukovanou*** *S.*
Máme-li bod $b \in A$ a vektor $\mathbf{w} \in W$, jejichž vyjádření v soustavě S jsou

$$\{b\}_S = (x_1, \ldots, x_n), \quad \{w\}_S = (y_1, \ldots, y_n),$$

pak vyjádření vektorů $\mathbf{b}, \mathbf{w} \in V$ v indukované bázi jsou

$$\{b\}_{\bar{S}} = (1, x_1, \ldots, x_n), \quad \{w\}_S = (0, y_1, \ldots, y_n).$$

Bod $b \in P(V)$ má tedy homogenní souřadnice $(t, tx_1, \ldots, tx_n)$. Bod $\langle \mathbf{w} \rangle \in P(V)$ má homogenní souřadnice $(0, ty_1, \ldots, ty_n)$

Tvrzení obsažená v definici jsou zřejmá.

Mějme afinní prostor $A(W)$ a jeho pevně zvolenou soustavu souřadnic S. Abychom zpřehlednili vyjadřování, zavedeme následující úmluvu. Mluvíme-li o bodu $(x_1, \ldots, x_n)$, myslíme tím bod $a \in A$, jehož souřadnice vzhledek S jsou $(x_1, \ldots, x_n)$. Mluvíme-li o přímce $(x_1, \ldots, x_n) + \langle (y_1, \ldots, y_n) \rangle$ míníme přímku $a + \langle \mathbf{w} \rangle$, kde a má souřadnice $(x_1, \ldots, x_n)$ a $\mathbf{w}$ má souřadnice $(y_1, \ldots, y_n)$ vyhledem k S. Podobně pro jakékoliv podmnožiny A.

Nechť $P(V)$ je projektivní rozšíření $A(W)$. Mluvíme-li o bodu $\langle (x_1, \ldots, x_{n+1}) \rangle$, myslíme bod $\langle \mathbf{a} \rangle$, jehož homogenní souřadnice jsou $(x_1, \ldots, x_n)$. Podobně pro přímky, atd.

Příklad. Mějme afinní prostor $A(R^3)$ a jeho soustavu souřadnic S.

Projektivním rozšířením přímky p procházející body $(2, 3, 4), (5, 6, 8)$ je projektivní přímka $P(\langle (1, 2, 3, 4), (1, 5, 6, 8) \rangle)$. Na této přímce leží právě jeden nevlastní bod $\langle (0, 1, 1, 2) \rangle$, který odpovídá směru $\langle (1, 1, 2) \rangle$ v R^3.

Projektivním rozšířením přímky $p = (1, 2, 3) + \langle (4, 5, 6) \rangle$ je projektivní přímka $P(\langle (1, 1, 2, 3), (0, 4, 5, 6) \rangle$.

Projektivním rozšířením roviny $\rho = (1, 2, 3) + \langle (4, 5, 6), (7, 8, 9) \rangle$ je projektivní rovina $P(\langle (1, 1, 2, 3), (0, 4, 5, 6), (0, 7, 8, 9) \rangle)$. Množina nevlastních bodů této projektivní přímky je $P(\langle (0, 4, 5, 6), (0, 7, 8, 9) \rangle)$.

Tvrzení 11.9. *Nechť $A(W)$ je afinní prostor, $P(V)$ jeho projektivní rozšíření.*

Nechť $F : A(W) \to A(W)$ afinní izomorfismus vytvořený izomorfismem $f : W \to W$. Pak existuje právě jedna kolineace $K : P(V) \to P(V)$, která rozšiřuje F, tj. taková, že $K|A = F$. Nevlastní nadrovina je při této kolineaci samodružná (v symbolech $K(W) = W$).

Naopak, nechť $K : P(V) \to P(V)$ je kolineace vytvořená izomorfismem $g : V \to V$ taková, že $K(W) = W$. Pak $K|A$ je afinní zobrazení (vytvořené izomorfismem $g|W$).

Důkaz. První část tvrzení: Předpokládejme, že izomorfismus $g : V \to V$ vytváří K a K rozšiřuje F. Protože $K(A) = A$, $P(V) = A \cup P(W)$ a K je bijekce, máme $K(W) = W$, neboli $g(W) = W$. Protože K rozšiřuje F musí pro libovolný bod $a \in A$ platit $K(a) = F(a)$, neboli $g(\mathbf{a}) = t_a \cdot F(a)$. Protože g je homomorfismus, musí pro libovolné dva body $a, b \in A$ platit $g(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = t_a \cdot F(a) - t_b \cdot F(b)$. Vlevo je vektor v nevlastní nadrovině (protože $\mathbf{b} - \mathbf{a} \in W$ a $g(W) = W$), tedy i vpravo musí být vektor z nevlastní nadroviny. To nastane právě tehdy když $t_a = t_b$. Takže máme $t \in T$ takové, že $g(\mathbf{a}) = t \cdot F(a)$ pro libovolný bod $a \in A$ a $g(\mathbf{w}) = g((a + \mathbf{w}) - \mathbf{w}) = t \cdot F(a + \mathbf{w}) - t \cdot F(a) = t \cdot f(\mathbf{w})$ pro libovolný vektor $\mathbf{w} \in W$. Shrnuto – zobrazení g je určeno jednoznačně až na násobek vztahy

$$g(a) = t \cdot F(a), \quad g(\mathbf{w}) = t \cdot f(\mathbf{w}).$$

Na druhou stranu je snadné ověřit, že takto definovaná bijekce je skutečně homomorfismem.

V druhé části stačí ověřit, že $F(a) = K(\mathbf{a})$ pro $a \in A$ je afinní zobrazení vytvořené homomorfismem $g|W$. To je snadné. □

Zobrazení K z předchozího tvrzení říkáme **projektivní rozšíření** afinního zobrazení F.

Dvojpoměr, geometrická charakterizace kolineárních zobrazení

Víme, že afinní zobrazení zachovávají dělicí poměr (trojpoměr). Dokázali jsme, že tato vlastnost dokonce afinní zobrazení charakterizuje (pro tělesa charakteristiky různé od 2). Podobnou úlohu v projektivních prostorech hraje dvojpoměr.

Definice a tvrzení 11.10. *Nechť $\langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_3 \rangle, \langle \mathbf{v}_4 \rangle$ jsou čtyři různé body ležící na projektivní přímce v projektivním prostoru $P(V)$. Jejich* ***dvojpoměrem*** *rozumíme číslo*

$$(\langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_3 \rangle, \langle \mathbf{v}_4 \rangle) := \frac{s_3 r_4}{r_3 s_4},$$

kde $r_3, s_3, r_4, s_4 \in T$ jsou takové, že

$$\mathbf{v}_3 = r_3 \mathbf{v}_1 + s_3 \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_4 = r_4 \mathbf{v}_1 + s_4 \mathbf{v}_2.$$

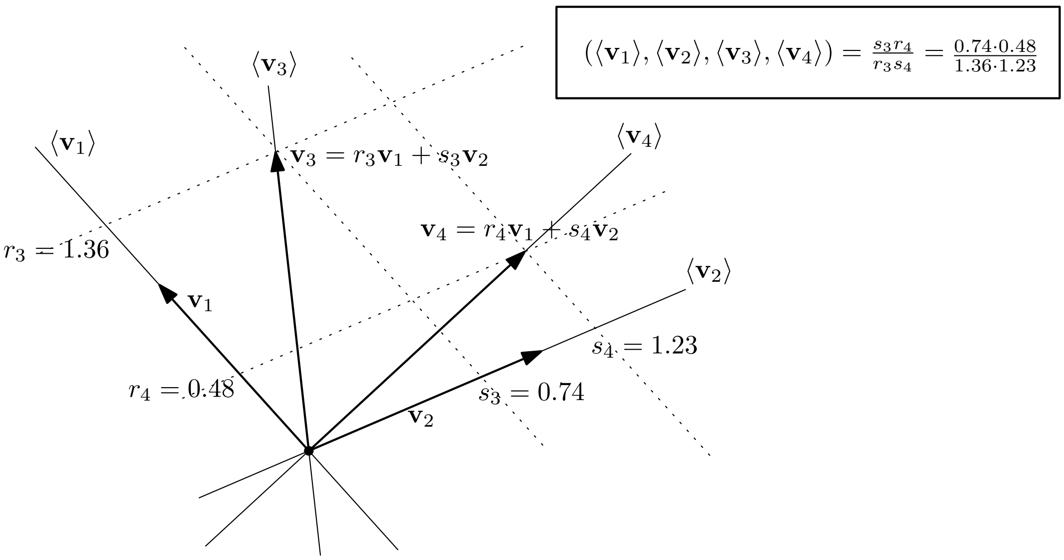
Toto číslo nezávisí na volbě aritmetických zástupců, takže definice je korektní. Čtveřice $\langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_3 \rangle, \langle \mathbf{v}_4 \rangle$ se nazývá ***harmonická****, pokud $(\langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_3 \rangle, \langle \mathbf{v}_4 \rangle) = -1$.*
Máme-li čtyři různé body a, b, c, d afinního prostoru $A(V)$ ležící na afinní přímce, pak v projektivním rozšíření prostoru $A(V)$ platí

$$(\langle \mathbf{a} \rangle, \langle \mathbf{b} \rangle, \langle \mathbf{c} \rangle, \langle \mathbf{d} \rangle) = \frac{(c; a, b)}{(d; a, b)}.$$

Máme-li tři různé body a, b, c afinního prostoru $A(V)$ ležící na afinní přímce o směru $\mathbf{u}$, pak v projektivním rozčíření prostoru $A(V)$ platí

$$(\langle \mathbf{a} \rangle, \langle \mathbf{b} \rangle, \langle \mathbf{c} \rangle, \langle \mathbf{u} \rangle) = (c; a, b).$$

Bod c je středem úsečky a, b právě tehdy, když $\langle \mathbf{a} \rangle, \langle \mathbf{b} \rangle, \langle \mathbf{c} \rangle, \langle \mathbf{u} \rangle$ je harmonická čtveřice.



Obrázek 5: Dvojpoměr.

Nejprve si všimneme, že dvojpoměr nezávisí na volbě aritmetických zástupců. Vezmeme-li místo vektoru $\mathbf{v}_1$ jeho t-násobek ($t \in T$), pak se prvky s_3, s_4 nezmění a prvky r_3, r_4 se vydělí prvkem t. Výraz z definice dvojpoměru se tedy nezmění. Vezmeme-li místo vektoru $\mathbf{v}_2$ jeho t-násobek, pak se nezmění s_4, r_4 a prvky $s_3, r, 3$ je vynásobí t, tedy výraz z definice dvojpoměru se opět nezmění. Podobně pro další dva vektory.

Věta 11.11. *Nechť V, W jsou vektorové prostory konečené dimenze nad tělesem charakteristiky různé od 2, $K : P(V) \to P(W)$ je zobrazení. Pak je ekvivalentní:*

(i) K je kolineární zobrazení.
(ii) K zachovává dvojpoměr, tj. pro libovolnou čtveřici po dvou různých bodů $\langle \mathbf{v}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{v}_4 \rangle$ ležících na jedné projektivní přímce, jejich obrazy jsou po dvou různé, leží na jedné projektivní přímce a

$$(K(\langle \mathbf{v}_1 \rangle), K(\langle \mathbf{v}_2 \rangle), K(\langle \mathbf{v}_3 \rangle), K(\langle \mathbf{v}_4 \rangle)) = (\langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_3 \rangle, \langle \mathbf{v}_4 \rangle).$$