

Limity funkcí

9. Limity funkcí

9.1. Spočtěte následující limity:

$$(9.1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}, \quad a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$(9.2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin(2x)}.$$

9.2. Spočtěte následující limity:

$$(9.3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}, \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{\log x - 1}{x - e}.$$

9.3. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

9.4. Spočtěte následující limity:

$$(9.4) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - \cos x}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right);$$

$$(9.5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}.$$

9.5. Spočtěte následující limity:

$$(9.6) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x3^x}{1 + x5^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{4}{x} \right) \log(3^x - 1).$$

9.6. Spočtěte následující limity:

$$(9.7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin(\frac{\pi}{6} + x)}{\operatorname{tg} x}.$$

9.7. Spočtěte limity následujících posloupností:

$$(9.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3 - \sqrt{n^4 + 1}}} \right)^n;$$

$$(9.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi\sqrt{n^2 + 1}).$$

9.8. Spočtěte:

$$(9.10) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\log(1 + \sqrt{x})}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin(\pi x))^{\cot(\pi x)};$$

$$(9.11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$