

Vážení a milí,

blížíme se k polovině semestru. Začínáme šestý týden, ve kterém dokončíme 8. paragraf. Přitom **vynecháváme** v důkazu 8.11 část (ii), v 8.16 rovněž druhou část důkazu (pro nekonečně generovaný prostor), poznámku 8.17 a větu 8.26.

Ve větě 8.11 je v části (i) pro konečně generovaný prostor konstruována báze postupným rozšiřováním lineárně nezávislé množiny. Prostě a jednoduše: pokud ta lineárně nezávislá množina ještě negeneruje celý prostor, přidáme k ní nějaký (vhodně zvolený) vektor, a to provedeme tolikrát, kolikrát je to zapotřebí, tj. dokud nedospějeme k bázi.

Věta 8.13 popisuje vlastnost, která je pro bázi charakteristická: každý vektor prostoru se dá vyjádřit **právě jedním způsobem** jako lineární kombinace vektorů báze. Pro konečnou bázi  $M$  je důkaz formálně srozumitelnější, neboť lze sčítat násobky  $a_i v_i$  vektorů  $v_1, \dots, v_n$  báze pro  $i = 1, \dots, n$ . V učebnici je v důkazu užíván zápis, který je obecný, tj. použitelný i pro nekonečně generovaný prostor (jako množinu indexů vezmeme přímo prvky báze  $M$ ). Z věty 8.13 bezprostředně vyplývá možnost zavést *souřadnice vektoru vzhledem k bázi* (definice 8.14). Představte si konkrétní situaci: v analytické geometrii v rovině (nebo v prostoru) dva (nebo tři) kolmé jednotkové vektory (tvoří bázi) a uvědomte si, co jsou souřadnice obecně zvoleného vektoru vzhledem k této bázi. To již znáte ze střední školy – a přesně to odpovídá obecné definici 8.14. Za ní je delší poznámka objasňující obecný zápis pro nekonečně generovaný prostor. Pokud vám to nebude jasné, není třeba se tím nyní trápit. Některé věci pochopíte později. Nicméně si tuto pasáž zkuste pomalu a pozorně přečíst. Přispěje to k rozvoji vaší matematické kultury.

Důkaz lemmatu 8.15 je poměrně obtížný (jeden z nejobtížnějších důkazů z celoroční látky). Je to důkaz matematickou indukcí, který ještě užívá postup dokazování sporem. Vřele doporučuji si rozmyslet každý krok důkazu a zkusit si jej psát na papír. Jednoduchým důsledkem lemmatu 8.15 je (pro konečně generovaný prostor) věta 8.16, která umožňuje zavést pojem *dimenze* (Definice 8.18). Následující příklady přibližují pojem dimenze na konkrétních příkladech.

Věty 8.21 a 8.22 jsou jednoduché důsledky předchozího výkladu.

Věta 8.24 se týká dimenzí **podprostorů**  $U$  a  $V$  nějakého prostoru a dimenzí jejich průniku  $U \cap V$  a spojení  $U + V$ . Tato věta je velmi užitečná např. v geometrii – vyplyne z ní např. přehled všech možností vzájemné polohy dvou podprostorů dimenzí  $k, l$  v prostoru dimenze  $n$ . Příklad 8.25 ukazuje užití předchozí věty.

\* \* \*

Knihou tohoto týdne je v dnešní době docela aktuální titul:

M. Bárta, T. Tureček: *Kolaps neznamená konec*.

Písni týdne je

<https://www.youtube.com/watch?v=JuCCdsvglZo>

Trochu hudby pro zábavu i potěšení:

<https://www.youtube.com/watch?v=VBbRTRBY4D4>

<https://www.youtube.com/watch?v=LwLABSm0yYc>

<https://www.youtube.com/watch?v=s9PQ7qPkluM>

A také něco moudrosti pro život:

Jednoho večera vzal starý Indián svého vnuka a vyprávěl mu o bitvě, která probíhá v nitru každého člověka. Řekl mu: „Synku, ta **bitva v každém z nás je bitva mezi dvěma vlky.**

**Jeden je špatný.** Je to vztek, závist, žárlivost, smutek, sobeckost, hrubost, nenávisť, sebelítost, falešnost, namyšlenost a ego.

**Ten druhý je dobrý.** Je to radost, pokoj, láska, naděje, vyrovnanost, skromnost, laskavost, empatie, štedrost, věrnost, soucit a důvěra”.

Vnuk o tom všem přemýšlel a po minutě se zeptal: „A který vlk vyhraje?”

Starý Indián odpověděl: „**Ten, kterého krmíš.**”

Srdečně zdraví J. B.

2. 11. 2020