Souvislosti. Základní myšlenka podobnosti matic souvisí maticovou reprezentací endomorfismů, tj. s nalezením matice endomorfismu vzhledem k nějaké vhodné bázi, a to tak, aby výsledná matice byla co nejjednodušší. Některé endomorfismy je možno vzhledem k vhodné bázi popsat pomocí diagonální matice, jiné pomocí Jordanovy matice, někdy ani to není možné. Máme na to ekvivalentní podmínky (jsou formulovány pomocí charakteristického, resp. minimálního polynomu).

Obdobná myšlenka je realizována při převodu symetrické bilineární (kvadratické) formy na diagonální tvar, tj. při jejím převodu na vyjádření vzhledem k polární bázi. Tady je situace jednodušší. Pokud vyloučíme těleso charakteristiky 2, lze to vždy provést. Pokud se navíc pohybujeme nad tělesem reálných čísel, pokročíme ještě o kousek dál, dostaneme se k normálnímu tvaru formy, tj. k jejímu vyjádření vzhledem k normální bázi.

Oba případy je třeba rozlišovat při hledání té pěkné matice, tj. při transformování výchozí matice. Nalézt diagonální tvar nebo Jordanův kanonický tvar bývá těžší než najít diagonální tvar symetrické matice. V prvním případě musíme výchozí matici z obou stran násobit navzájem inverzními maticemi, které je někdy těžké najít, ve druhém případě násobíme výchozí matici navzájem transponovanými maticemi – to lze dělat postupně symetrickými úpravami bez větších problémů.

Transformujeme-li matici A endomorfismu f pomocí matice přechodu B, dospějeme k matici $B^{-1}AB$. Transformujeme-li matici A symetrické bilineární formy f pomocí matice přechodu B, dospějeme k matici B^TAB. Důležité je si uvědomit toto: pokud se pohybujeme v prostoru se skalárním součinem a matice přechodu reprezentuje ortogonální transformaci vůči ortonormálním bázím, je matice B přechodu ortogonální, a tedy je $B^{-1} = B^T$.

Když jsme maticí reprezentovali rotaci kartézského systému souřadnic, dospěli jsme k matici přechodu od čárkovaných souřadnic k nečárkovaným, která byla složena ze sinů a kosinů. Pokud bychom utvořili matici přechodu od nečárkovaných souřadnic k čárkovaným, zjistíme, že je k předchozí matici transponovaná. Ona je však současně k předchozí matici inverzní, neboť rotace souřadnic je ortogonální transformace, která je reprezentována vůči ortonormálním bázím ortogonální maticí.

Lineární forma je opravdu speciální případ homomorfismu.

Na homomorfismy na prostoru dimenze n se můžeme dívat jako na lineární „funkce“ n proměnných, které ovšem mají „vícerozměrné obrazy“, tj. zobrazují prostor dimenze n do prostoru dimenze m. Můžeme se na takový homomorfismus také dívat jako na kolekci m funkcí n proměnných.

Pokud je $m = 1$, jedná se o lineární formu, tedy o jedinou funkci n proměnných.

Na homogenní soustavu rovnic se můžeme dívat jako na úlohu, která vyžaduje nalezení průniku jader několika lineárních forem. Každou rovnici takové soustavy lze totiž chápat jako lineární formu, resp. jako její analytické vyjádření.

Geometricky představuje každá lineární forma na prostoru dimenze n tzv. nadrovinu, tj. podprostor dimenze $n - 1$ (je to její jádro). Znáte to z analytické geometrie: např. $2x + 3y = 0$ je rovnice přímky (procházející počátkem) v prostoru dimenze 2 (v rovině), podobně je $2x + 3z - 5z = 0$ rovnicí roviny v prostoru dimenze 3 (v prostoru). Musíme však nejprve zavést tzv. afinní, případně eukleidovský prostor, kdy k vektorům přidáme body. To budete probírat v geometrii, využijete větu o dimenzích spojení a průniku, abyste např. zjistili, jakou vzájemnou polohu mohou mít podprostory dimenzí 5 a 7 v prostoru dimenze 9.

Řešení soustavy rovnic pak odpovídá průniku příslušných přímek, rovin a nadrovin apod. I to již znáte ze střední školy. V geometrii to uvidíte ve větší obecnosti.

15. 5. 2021