

1. písemka

Příklad [6b]:

Nechť je dána funkce f definována předpisem:

$$f(x) = e^x \quad \text{na } [0, 1].$$

1. Rozviňte f do Fourierovy řady za předpokladu, že je dále rozšířená periodicky. [2b]
2. Rozšiřte f vhodně na $[-1, 0]$ a rozviňte do sinusové řady. [2b]
3. U obou řad zdůvodněte pomocí vět z přednášky k jaké funkci konvergují (pokud konvergují), popište a nakreslete tyto funkce. [1,5b]
4. Vypočítejte $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 k^2}$ [0,5b]

1. písemka

Příklad [6b]:

Nechť je dána funkce f definována předpisem:

$$f(x) = e^x \quad \text{na } [0, 2].$$

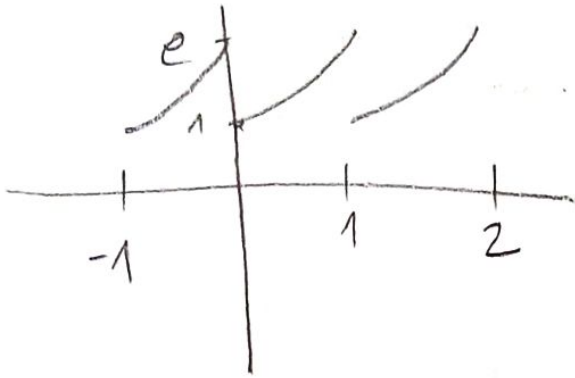
1. Rozviňte f do Fourierovy řady za předpokladu, že je dále rozšířená periodicky. [2b]
2. Rozšiřte f vhodně na $[-2, 0]$ a rozviňte do kosinusové řady. [1b]
3. U obou řad zdůvodněte pomocí vět z přednášky k jaké funkci konvergují (pokud konvergují), popište a nakreslete tyto funkce. [1,5b]
4. Vypočítejte $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\pi^2 k^2}$ [0,5b]

14:00

⑦

$$f(x) = e^x \text{ in } [0,1]$$

① Four. radica.



$$F(e^x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx)$$

Wde $a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 e^x dx = 2(e-1)$

$$a_k = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \cos(2\pi kx) = 2 \int_0^1 e^x \cos(2\pi kx) = \overset{PP}{=}$$

$$2 \left[e^x \cos(2\pi kx) \right]_0^1 + 2 \int_0^1 e^x (2\pi k) \sin(2\pi kx) = \overset{PP}{=}$$

$$2(e-1) + 2 \left[2\pi k e^x \sin(2\pi kx) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 (4\pi^2 k^2) e^x \cos(2\pi kx) =$$

$$\rightarrow a_k (1 + 4\pi^2 k^2) = 2(e-1) \Rightarrow a_k = \frac{2(e-1)}{1 + 4\pi^2 k^2}$$

$$\overset{0}{b_k} = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \sin(2\pi kx) = 2 \int_0^1 e^x \sin(2\pi kx) = \overset{PP}{=}$$

$$= 2 \left[e^x \sin(2\pi kx) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 (2\pi k) e^x \cos(2\pi kx) = \overset{PP}{=}$$

$$= -2 \left[e^x \cos(2\pi kx) (2\pi k) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 (4\pi^2 k^2) e^x \sin(2\pi kx) dx \quad (2)$$

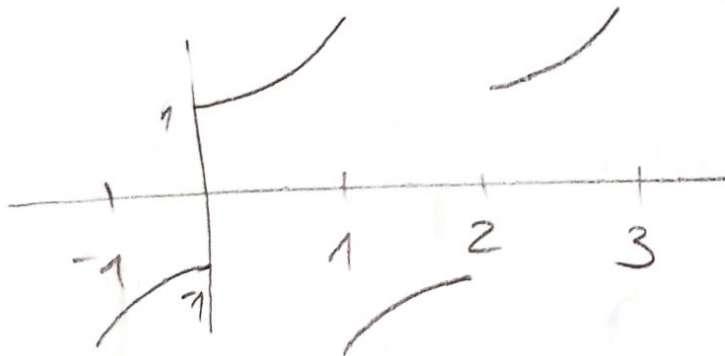
$$\Rightarrow b_k = -\frac{2(e-1)(2\pi k)}{1+4\pi^2 k^2}$$

$$F_f = (e-1) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+4\pi^2 k^2} \cos(2\pi kx) - \frac{4\pi k}{1+4\pi^2 k^2} \sin(2\pi kx) \right] \quad (\#)$$

(2)

Pro sinusovou řadu rozšíříme eise na $[-1,0]$ tedy

$$f^*(x) = \begin{cases} e^x & \text{na } [0,1] \\ -e^{-x} & \text{na } [-1,0] \end{cases}$$



a použít

$$F_{f^*} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\pi kx) + b_k \sin(\pi kx)$$

a kvůli eichosti máme

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Počítáme tedy jen

(3)

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{-1} f_+(x) \sin(\pi kx) = 2 \int_0^1 e^x \sin(\pi kx) = \\ &= 2 \left[e^x \sin(\pi kx) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 (\pi k) e^x \cos(\pi kx) = \\ &= -2\pi k \left[e^x \cos(\pi kx) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \pi^2 k^2 e^x \sin(\pi kx) \\ \Rightarrow b_k &= -\frac{[(-1)^k e - 1] 2\pi k}{1 + \pi^2 k^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_{f^*} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k \frac{1 - (-1)^k e}{1 + \pi^2 k^2} \sin(2\pi kx)$$

(3) Obě funkce jsou po částech C^1 a tudíž podle předvášky víme, že

$$\mathcal{F}_f = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

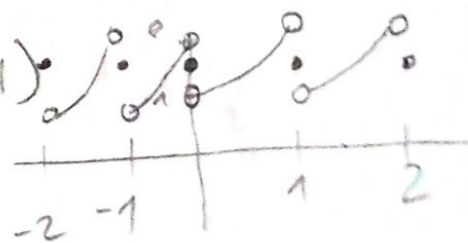
$$\mathcal{F}_{f^*} = \frac{f^*(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Tudíž

$$\mathcal{F}_f = \begin{cases} \frac{e+1}{2} & \text{když } x=0 \\ e^x & \text{když } x \in (0,1) \\ \frac{e+1}{2} & \text{když } x=1 \end{cases}$$

a dále

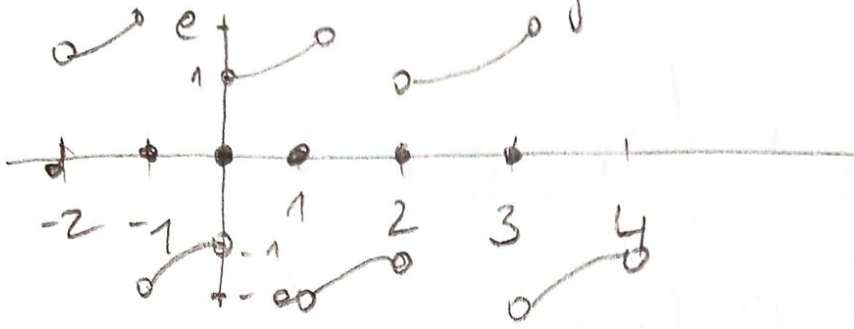
periodická



a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } x = -1 \\ -e^{-x} & \text{když } x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{když } x = 0 \\ e^x & \text{když } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{když } x = 1 \end{cases}$$

(4)



(4)

Dosaďme 0 (#) a z minulého bodu má

$$\frac{e+1}{2} = e^{-1} \left[1 + 2 \sum \frac{1}{1+4\pi^2 k^2} \right]$$

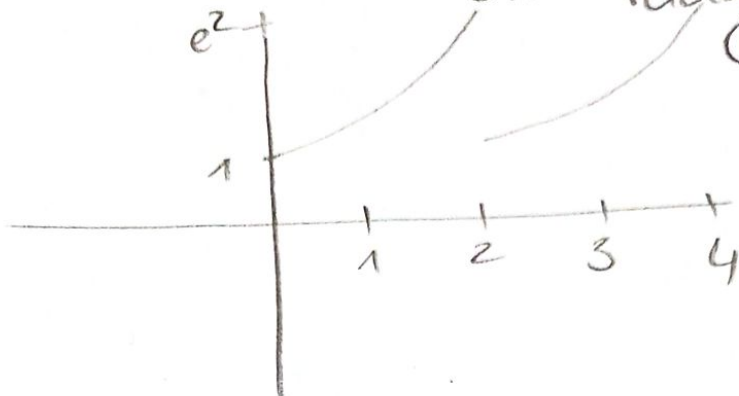
$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum \frac{1}{1+4\pi^2 k^2} &= \frac{e+1}{4(e-1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{e+1-2e+2}{2e-2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{3-e}{e-1} \end{aligned}$$

Máme $f = e^x$ na $[0, 2]$

①

①

Rozvineme do Four. řady:



$$F_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{2}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{2}x\right)$$

↑
perioda

$$\text{kde } a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 e^x dx = \frac{e^2 - 1}{e^2 - 1}$$

$$a_k = \frac{2}{2} \int_0^2 e^x \cos(k\pi x) dx = \text{P.P.} \left[e^x \cos(k\pi x) \right]_0^2 +$$

$$+ \int_0^2 (k\pi) e^x \sin(k\pi x) dx = (e^2 - 1) + \left[k\pi e^x \sin(k\pi x) \right]_0^2$$

$$- \int_0^2 (k\pi)^2 e^x \cos(k\pi x) dx$$

$$\rightarrow a_k = \frac{e^2 - 1}{1 + k^2 \pi^2}$$

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^2 e^x \sin(k\pi x) dx \stackrel{P.P.}{=} \overbrace{\left[e^x \sin(k\pi x) \right]_0^2}^{(1)} -$$

$$- \int_0^2 e^x (k\pi) \cos(k\pi x) dx = - \left[(k\pi) e^x \cos k\pi x \right]_0^2$$

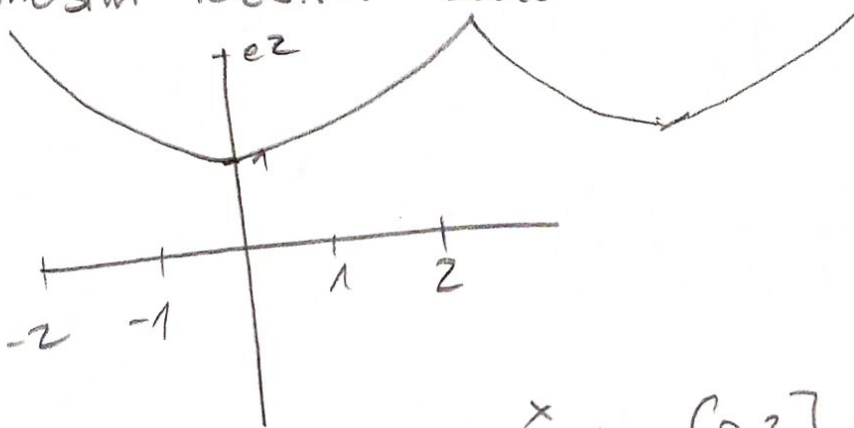
$$- \int_0^2 (k\pi)^2 e^x \sin(k\pi x) dx$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{(1-e^2)(k\pi)}{1+k^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{F_f}{f} = e^2 - 1 \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\pi^2} \left[\cos(k\pi x) - (k\pi) \sin(k\pi x) \right] \right] \quad (\#)$$

(2)

Pokud chceme rozvinout e^x do kosinové řady musíme rozšířit sudě



$$\text{tj } f^*(x) = \begin{cases} e^x & \text{na } [0, 2] \\ e^{-x} & \text{na } [-2, 0] \end{cases}$$

a dle 4-pet

a nyml $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f^*(x) dx = \int_0^2 e^x dx = e^2 - 1$$

$$a_k = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f^*(x) \cos\left(\frac{\pi k}{2} x\right) dx = \int_0^2 e^x \cos\left(\frac{\pi k}{2} x\right) dx$$

súčasť

$$PP = \underbrace{\int_0^2 e^x \cos\left(\frac{\pi k}{2} x\right) dx}_0^2 + \int_0^2 e^x \left(\frac{\pi k}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2} x\right)$$

$$e^2(-1)^k - 1$$

$$PP = e^2(-1)^k - 1 + \underbrace{\int_0^2 e^x \left(\frac{\pi k}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2} x\right)}_0^2 -$$

$$- \int_0^2 e^x \left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi k}{2} x\right) dx$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{(e^2(-1)^k - 1)4}{4 + \pi^2 k^2}$$

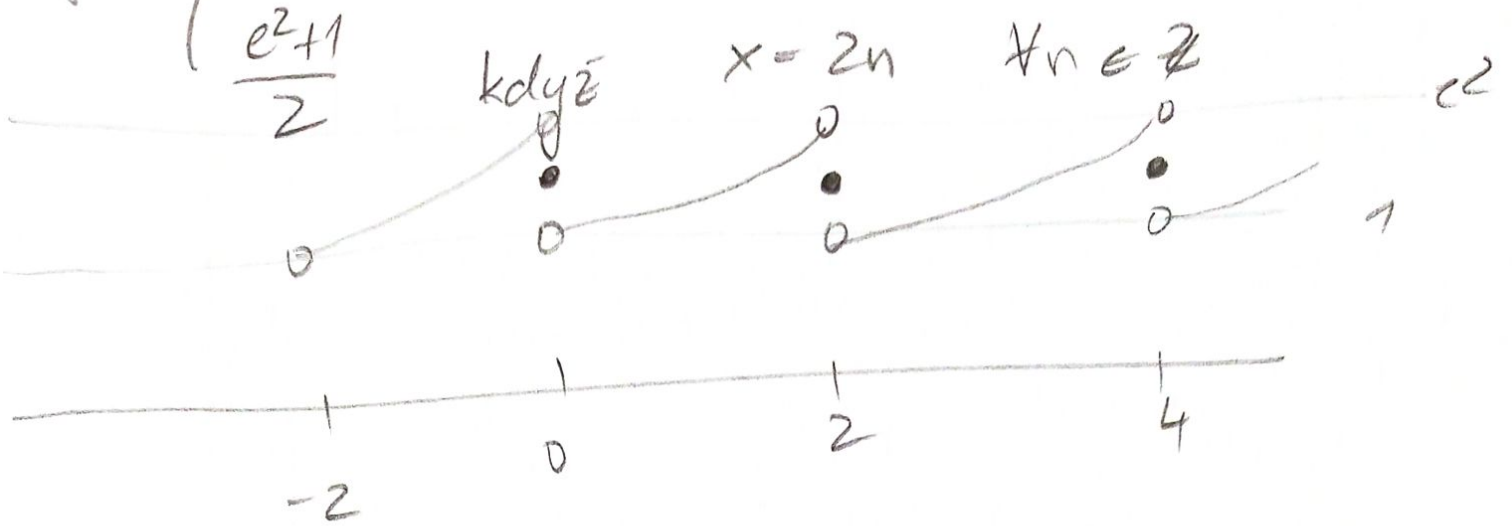
$$\Rightarrow F_{f^*} = \frac{e^2 - 1}{2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2(-1)^k - 1}{4 + \pi^2 k^2} \cos\left(\frac{\pi k}{2} x\right)$$

a v bodoch
vesporitost ma
↑ vlastni
limite

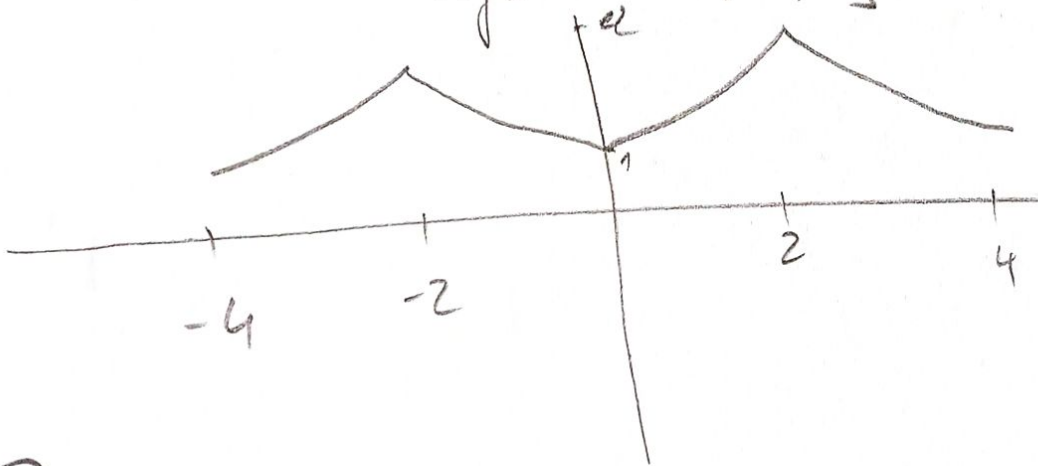
3

Obe funkcie jsou po částech C^1 a
tudíž využijeme větu že $F = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

$$f = \begin{cases} e^{x-2n} & \text{když } x \in (2n, 2(n+1)) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4) \\ \frac{e^2+1}{2} & \text{když } x = 2n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$f = \begin{cases} e^x & \text{když } x \in (0, 2] \\ e^{-x} & \text{když } x \in [-2, 0] \end{cases} \quad \text{a d'el 4-pe}$$



③

Dosadim $x=0$ do (#) a

$$\frac{e^2+1}{2} = \frac{e^2-1}{2} + e^2-1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\pi^2}$$

$$\frac{e^2+1-e^2+1}{2} = e^2-1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2\pi^2} = \frac{1}{(e^2-1)}$$