

Domácí úkoly

April 3, 2024

Odevzdáním těchto úkolů můžete sbírat body za aktivitu na cvičení. Nemusíte odevzdat všechny (ale můžete a v tom případě všechny opravím), počet odevzdaných úkolů je na Vás, ale maximální počet bodů, který lze dohromady dosáhnout je 7.

1 Fourierovy řady

[3b] Příklad 1:

Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

pomocí aplikace výsledků teorie trigonometrických řad.

Návod: Nalezněte rozvoj funkcí $f(x) = x$ a $f(x) = x^2$ zúžených na $(-\pi, \pi)$. Vyšetřete konvergenci příslušných řad. Pro tyto řady aplikujte Parsevalovu rovnost.

[3b] Příklad 2:

Nechť f je lichá, 2π -periodická funkce, nechť

$$f(x) = \cos(x), \quad x \in (0, \pi).$$

1. Najděte Fourierovy koeficienty.
2. Čemu se rovná součet příslušné Fourierovy řady? Nakreslete graf; podobně odůvodněte.
3. Napište Parsevalovu rovnost (nejprve obecně a potom vyčíslete její části v tomto konkrétním případě).
4. Napište vzoreček pro integrování Fourierovy řady člen po členu (nejprve obecně; pak vyčíslete podrobně jednotlivé členy - omezte se na $x \in [-\pi, \pi]$).

2 Integrace pomocí reziduovy věty

[3b] **Příklad 3:** Vypočítejte pomocí reziduové věty

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x(x^2 + 9)^2} dx.$$

- použitá pravidla pro výpočet rezidua
- limitní přechody u jednotlivých částí křivkových integrálů

[3b] **Příklad 4:** Vypočítejte pomocí reziduové věty

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin^2 x}{x^6 + 10x^4 + 9x^2} dx.$$

Komentujte podrobně:

- použitá pravidla pro výpočet rezidua
- limitní přechody u jednotlivých částí křivkových integrálů

[3b] **Příklad 5:** Nalezněte funkci $F(z)$ tak, aby integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{3 + \cos 2x} dx$$

byl roven integrálu F podél (kladně orientované) jednotkové kružnice v komplexní rovině.

- Najděte singularity F - jakého jsou typu?
- Vyčíslete daný integrál pomocí reziduové věty.