Logika

1. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

Konjunkce

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkce

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikace

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ekvivalence

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Příklady:

1. Bylo vyloupeno skladiště, pachatel (pachatelé) odvezli lup autem. Policie zadržela tři podezřelé A, B a C, nikdo jiný do loupeže zapojen nebyl. Po výslechu se zjistily tyto dvě skutečnosti:

   a) C se nikdy nepouští do akce bez A.

   b) B neumí řídit auto.

   Je A vinen?

2. Totéž, zjistilo se:

   a) A pracuje vždycky aspoň s jedním společníkem.

   b) C je nevinen.

   Je B vinen?

3. Co vyplývá z těchto zjištěných faktů:

   a) Pokud je A vinen a B nevinen, pak je C vinen.

   b) C nikdy nepracuje sám.

   c) A nikdy nepracuje s C.

   d) Kromě A, B a C není do případu zapleten nikdo další, a aspoň jeden z těch tří je vinen.

   (Kteří z obviněných jsou určině nevini a kteří jsou určitě vini?)

$*$ 4. Majitel klenotnictví nahlásil krádež, zjistilo se tohle:

   a) Každý z trojice A, B a C byl v den loupeže v obchodě, a nikdo další tam nebyl.

   b) Pokud je vinen A, měl právě jenoho společníka.

   c) Pokud je B nevinen, je nevinen i C.

   d) Pokud jsou vinni právě dva, pak jedním z nich je A.

   e) Pokud je C nevinen, je nevinen i B.

   Co lze z toho usoudit?

∗ 5. Tentokrát byli předvedeni k výslechu čtyři podezřelí, A, B, C a D. Opět šlo o loupež. Bylo známo, že alespoň jeden z nich je vinen, a že do loupeže není zapletený nikdo další. Dále vyšly najevo tyhle skutečnosti:

   a) Pokud je B vinen, pak měl právě jednoho společníka.
   b) Pokud je C vinen, pak měl právě dva společníky.
   c) A je nevinen.

   Zajímá nás, zdali je vinen D.

6. Zapište následující výroky pomocí symbolů, a vyplňte tabulku pravdivostních hodnot:

   a) Pokud je A vinen, pak B byl jeho společníkem.
   b) Pokud je A nevinen, pak je B vinen.
   c) Pokud jsou A i B oba vinni, pak C byl jejich společníkem.
   d) Pokud je A vinen, pak alespoň jeden z B a C byl jeho společníkem.
   e) Pokud je B vinen, pak buď C byl jeho společníkem, nebo je A nevinen.
   f) Pokud je B nevinen, pak A je vinen a C nevinen.

∗ 7. Naopak, najděte výroky, které odpovídají zadaným tabulkám

A	B	?
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

A	B	?
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

A	B	?
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	C	?
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

A	B	C	?
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

A	B	C	?
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

8. Nechť M značí množinu všech mužů a $\check{Z}$ značí množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové formy:

$$S(m,z): \text{„Muž } m \text{ je manželem ženy } z.\text{“}$$
$$L_1(m,z): \text{„Muž } m \text{ miluje ženu } z.\text{“}$$
$$L_2(m,z): \text{„Žena } z \text{ miluje muže } m.\text{“}$$

   Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem S, L_1 a L_2 vyjádřete následující tvrzení:

   a) Existuje vdaná žena.

b) Každý ženatý muž miluje svou manželku.
c) Existují nevěrné manželky. (To jest takové, které milují někoho jiného než svého manžela.)
d) Každou ženu miluje nějaký muž.
e) Existuje žena, kterou milují všichni muži, kteří nejsou ženatí.
f) Existuje pár, ve kterém se navzájem milují, ale kde nejsou sezdaní.
g) Každá žena ma nejvýše jednoho manžela.

Dále následující výroky přeložte do češtiny:

h) $\exists m \in M\, \forall z \in \check{Z}\colon \neg S(m, z)$
i) $\exists z \in \check{Z}\, \forall m \in M\colon L_1(m, z) \Rightarrow \neg L_2(m, z)$
j) $\exists z \in \check{Z}\, \forall m \in M\colon L_2(m, z) \Rightarrow \neg L_1(m, z)$

9. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace:

a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon (z > x) \Rightarrow (y < z)$
b) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon (z > x) \Rightarrow (y < z)$
c) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon (z > x) \Rightarrow (y < z)$
d) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon (z < x) \Rightarrow (y > z)$

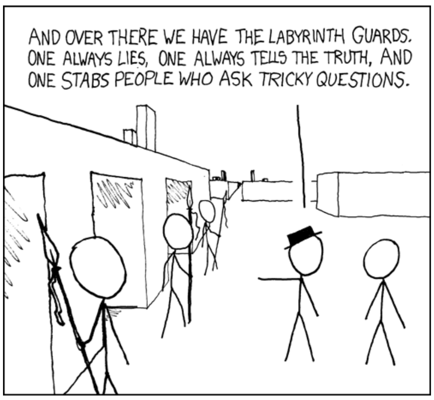
10. Na ostrově žijí dva druhy lidí (dva kmeny), padouši vždy lžou, a poctivci vždy mluví pravdu. Na cestě narazíte na dvě osoby, A a B. A prohlásí „Aspoň jeden z nás je padouch.“. Z jakých kmenů jsou A a B?

11. Opět potkáte A a B. Tentokráte A řekne „Buď já jsem padouch, nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?

12. Tentokráte jsem potkal jednoho ostrovana, který řekl „Buď jsem já padouch, nebo 2 a 2 je 5“. Jak to bude?

∗ 13. Dostali jste se na onom ostrově do svízelné situace. Jste uvězněni, a máte na výběr ze dvou dveří. Jedny vedou na svobodu, druhé na popraviště. Hlídá vás smíšená stráž, to jest po jednom člověku z každého ze dvou kmenů, vy ale nevíte který je který. Jednoho z nich se můžete zeptat na jednu otázku. Jaká to má být otázka, aby jste se dozvěděli, kterými dveřmi se dostanete na svobodu?

∗ 14. A co kdyby jste byli ve stejné situaci, avšak strážný tam byl jenom jeden (z neznámo kterého kmenu)? Jakou otázku mu máte položit nyní?



xkcd 246, https://xkcd.com/246/

Logika

1. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. Ano.
2. Ano.
3. B je určitě vinen, u ostatních se to neví.
4. Nemohlo se to takhle stát – majitel klenotnictví kecal.
5. Ano.
6. a) $A \Rightarrow B$
   b) $\neg A \Rightarrow B$
   c) $(A \wedge B) \Rightarrow C$
   d) $A \Rightarrow (B \vee C)$
   e) $B \Rightarrow (C \vee \neg A)$
   f) $\neg B \Rightarrow (A \wedge \neg C)$

A	B	C	a)	b)	c)	d)	e)	f)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0			0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0			1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0			1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0			1	1	1	0

7. $B \wedge (\neg A)$ $\quad \neg(A \wedge B)$ $\quad \neg(A \Leftrightarrow B)$
8. a) $\exists z \in \check{Z}\, \exists m \in M\colon\ S(m,z)$
   b) $\forall m \in M\, \forall z \in \check{Z}\colon\ S(m,z) \Rightarrow L_1(m,z)$
   c) $\exists z \in \check{Z}\colon\ (\exists m_1 \in M : S(m_1,z)) \wedge (\exists m_2 \in M\colon\ L_2(m_2,z) \wedge \neg S(m_2,z))$
   d) $\forall z \in \check{Z}\, \exists m \in M\colon\ L_1(m,z)$
   e) $\exists z_1 \in \check{Z}\, \forall m \in M\colon\ \Big(\forall z_2 \in \check{Z}\colon\ \neg S(m,z_2)\Big) \Rightarrow L_1(m,z_1)$
   f) $\exists z \in \check{Z}\, \exists m \in M\colon\ \neg S(m,z) \wedge L_1(m,z) \wedge L_2(m,z)$
   g) $\forall z \in \check{Z}\, \forall m_1 \in M\, \forall m_2 \in M\colon\ (S(m_1,z) \wedge S(m_2,z)) \Rightarrow (m_1 = m_2)$
   h) Existuje svobodný muž.
   i) Existuje žena, která nemiluje žádného z mužů, kteří milují ji.
   j) Existuje žena, která není milována žádným z mužů, které miluje ona.

9. a) Výrok je pravdivý, jeho negací je $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\colon (z > x) \wedge (y \geq z)$.
   b) Výrok je pravdivý, jeho negací je $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\colon (z > x) \wedge (y \geq z)$.
   c) Výrok není pravdivý, jeho negací je $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\colon (z > x) \wedge (y \geq z)$.
   d) Výrok je pravdivý, jeho negací je $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\colon (z < x) \wedge (y \leq z)$.

10. A je poctivec a B je padouch.

11. Oba dva jsou poctivci.

12. Já (jakožto zadavatel úlohy) jsem z kmene padouchů.

13. „Kdybych se zeptal toho druhého, jestli ty levé dveře vedou na svobodu, co by mi odpověděl?“

14. „Kdybych se tě zeptal, jestli ty levé dveře vedou na svobodu, co by jsi mi odpověděl?“

Rovnice, nerovnice

2. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

Pro každou dvojici reálných čísel x a y platí takzvaná trojúhelníková nerovnost:

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

popřípadě pro každou dvojici a, b platí

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|.$$

Příklady:

1. Řešte v $\mathbb{R}$ následující nerovnosti:
   a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$
   b) $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$
   c) $x^2 + 1 - |x + 2| > 0$
   d) $\log_2(x^2 + |x + 6| - 1) > 0$
   e) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$
2. Najděte všechna reálná řešení rovnice $\log_3^2 x + \log_3(9^3) = \log_3 x^5$.
3. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ najděte všechna reálná čísla x, která splňují:
   a) $a(a - 1)x < 2^{57\,885\,161} - 1$
   b) $x^2 + ax < 0$
   c) $x + a = 2ax + 1$
   d) $\frac{a}{x} - \frac{4}{ax} = 1 - \frac{2}{a}$
   e) $x^2 - 2(a + 4)x + a^2 + 6a = 0$
   f) $x^2 + 4x + 6 \leq |x^2 + 4|$
4. Řešte nerovnici $1 \leq |ax + 1| < 2$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.
5. Určete množinu $\big\{a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\colon (|x - 2| \leq 1) \Rightarrow (x^2 - ax > 5)\big\}$.
6. V závislosti na parametru c najděte všechna reálná x, která splňují, že

$$\log|x| + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Načrtněte grafy funkcí:

   a) $\left|\left|\left||x|-1\right|-1\right|-1\right|$

   b) $\left|\frac{3x+3}{2x-4}\right|$

   c) $|\tan(-\pi x)|$

   d) $|\sin(2-x)-1|$

   e) $|\log|x-1||$

$*$ 8. Zjednodušte pro $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2^{n+3}}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}}$$

$*$ 9. Pro $n \in \mathbb{N}$ je definován výraz $V(n) = \log 2^n - \log 2^{n-1} + \log 2^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\log 2$.

   a) Vyjádřete jediným členem $V(3)$.

   b) Vypočtěte podíl $\frac{V(5)}{V(4)}$.

   c) Vypočtěte rozdíl $V(100) - V(99)$.

α. Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$\log_7^2(y^2+2y+1) + \log_7\left((y+1)^{48}\right) = \log_7(49^{26})$$

β. Načrtněte grafy funkcí:

   a) $\frac{7x-13}{x-2}$

   b) $\left|\frac{4x+67}{x+17}\right|$

   c) $\frac{3x^2+x-4}{x^2-1}$

   d) $\frac{\pi x-\pi\varphi+1}{x-\varphi}$, kde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.6180339887$.

Rovnice, nerovnice

2. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. a) $x \in (4, 6]$

   b) $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup (-6, -3)$

   c) $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$

   d) $x \in \mathbb{R}$

   e) $x \in [1, 2]$

2. $x \in \{9, 27\}$

3. a) $a \in \{0, 1\},\ x \in \mathbb{R}, \quad$ nebo
   $a \in (0, 1),\ x > \frac{2^{57\,885\,161}-1}{a(a-1)}, \quad$ nebo
   $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty),\ x < \frac{2^{57\,885\,161}-1}{a(a-1)}.$

   b) $a < 0,\ x \in (0, -a), \quad$ nebo
   $a > 0, x \in (-a, 0).$

   c) $a \neq \frac{1}{2}, x = \frac{1-a}{1-2a}$

   d) $a = 2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad$ nebo
   $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\},\ x = a + 2.$

   e) $x = a + 4 \pm \sqrt{2}\sqrt{a + 8}$

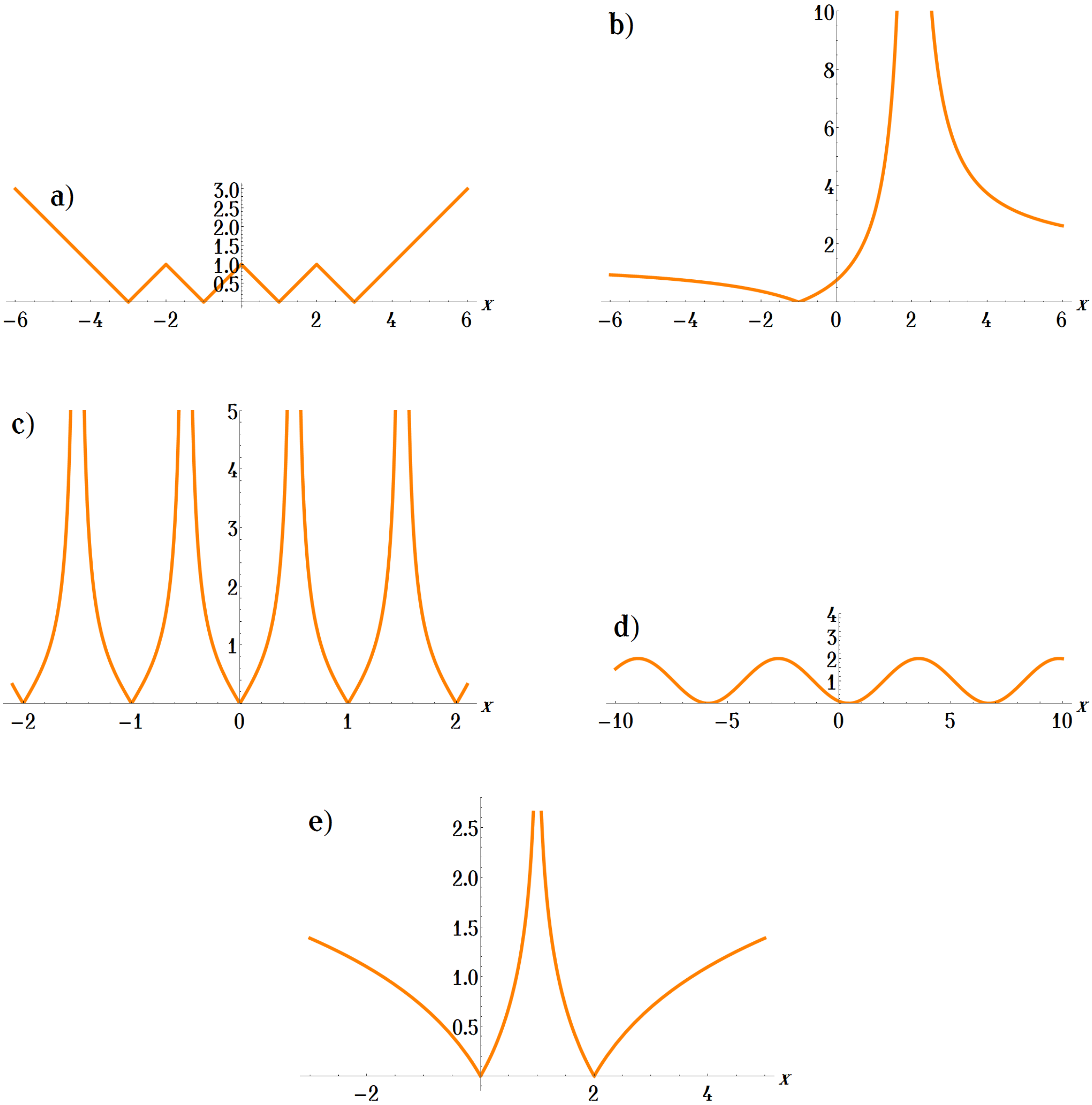
   f) $x \leq -\frac{1}{2}$

4. $a < 0,\ x \in \left(\frac{1}{a}, 0\right] \cup \left[-\frac{2}{a}, -\frac{3}{a}\right), \quad$ nebo
   $a = 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad$ nebo
   $a > 0,\ x \in \left(-\frac{3}{a}, -\frac{2}{a}\right] \cup \left(0, \frac{1}{a}\right).$

5. $(-\infty, -4)$

6. $x \in \left(e^{-\frac{\pi}{2}-c}, e^{\frac{\pi}{2}-c}\right) \cup \left(-e^{\frac{\pi}{2}-c}, -e^{-\frac{\pi}{2}-c}\right)$

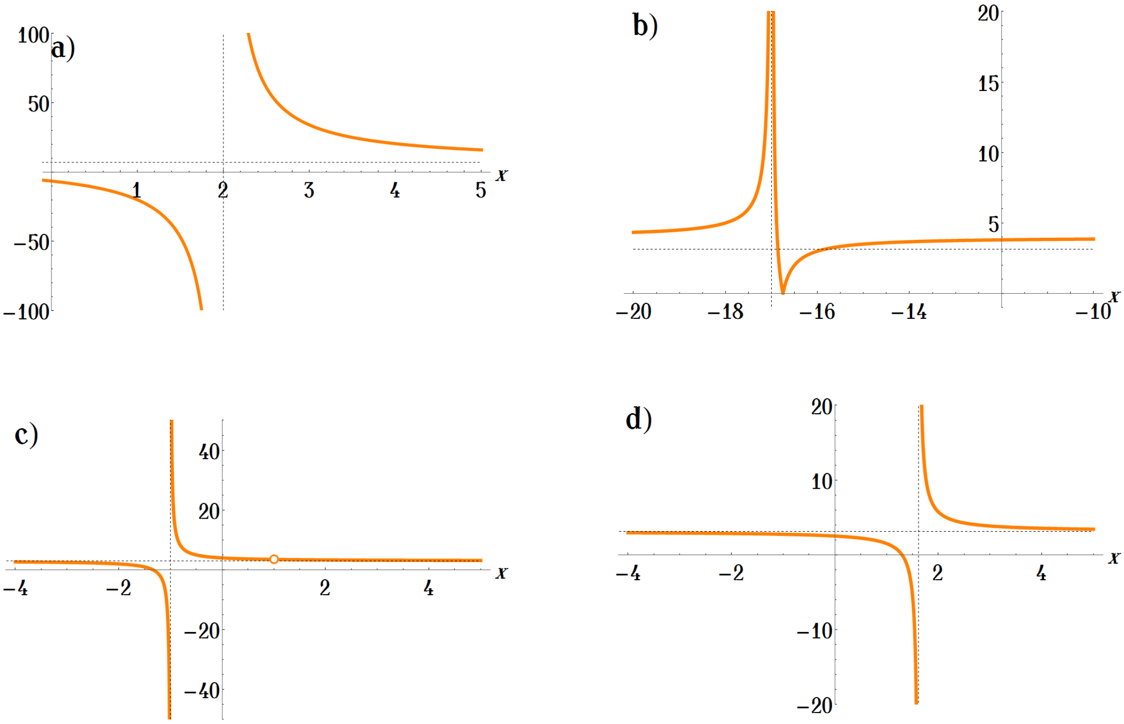
7.



8. 8

α. $x = 6$ a $x = 7^{-13} - 1$.

β.


a)
100
50
−50
−100
1
2
3
4
5
x
b)
20
15
10
5
−20
−18
−16
−14
−10
x
c)
40
20
−20
−40
−4
−2
2
4
x
d)
20
10
−10
−20
−4
−2
2
4
x

Důkazy, indukce, kvantifikátory

3. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Příklady:

1. Dokažte, že $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

2. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí vztah

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

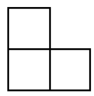
3. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je číslo $5^n - 1$ dělitelné čtyřmi.

4. Dokažte, že pro každé $x > -1$ a pro každé přirozené n platí nerovnost

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

5. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ a pro $n > 2$ platí $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Najděte vzorec pro n-tý člen této posloupnosti, a dokažte jeho správnost.

6. Mějme šachovnici s rozměry $2^n \times 2^n$, na které chybí pravé horní políčko. Dokažte, že se dá tato šachovnice vydláždit s pomocí dílků tohoto tvaru (dílky se mohou otáčet):



7. Dokažte, že pro $n \geq 4$ je počet uhlopříček konvexního n-úhleníka $\frac{1}{2}n(n-3)$.

8. Vyjádřete následující výroky pomocí kvantifikátorů:

   a) Každý zná každého.

   b) Někdo zná každého.

   c) Každý zná někoho.

   d) Někoho nikdo nezná.

9. Vyjádřete co nejjednodušeji:

   a) $\forall \varepsilon > 0\, \forall y \in \mathbb{R}$: $(|y - 7| < 5) \Rightarrow (|f(y) - 15| < \varepsilon)$

   b) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 1\, \forall y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $(|y - x| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n})$

10. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. O f řekneme, že je **nerozhodná**, pokud je na nějakém otevřeném intervalu rostoucí a na nějakém otevřeném intervalu klesající. Zapište tuto definici pomocí kvantifikátorů.

$\ast$ 11. Znegujte následující výrok: „Každý si někdy rád dá jedno pivo, ale ne vždy a ne v každé hospodě.“

Důkazy, indukce, kvantifikátory

3. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Výsledky:

5. $a_n = 2^{n+1} - 1$

8. Označme výrok „osoba a zná osobu b" symbolem $Z(a, b)$, dále označme množinu všech lidí jako L. Pak:

   a) $\forall a \in L \, \forall b \in L\colon Z(a, b)$

   b) $\exists a \in L \, \forall b \in L\colon Z(a, b)$

   c) $\forall a \in L \, \exists b \in L\colon Z(a, b)$

   d) $\exists b \in L \, \forall a \in L\colon \neg Z(a, b)$

9. a) Pro $y \in (2, 12)$ platí, že $f(y) = 15$.

   b) Funkce f je na $\mathbb{R}$ konstantní.

10. $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d \ \forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \ \forall t_1, t_2 \in (c, d), t_1 < t_2\colon$

$$(f(x_1) < f(x_2)) \ \& \ (f(t_1) > f(t_2))$$

11. Označme symbolem $V(c, t, h)$ výrok „Člověk c si dá rád jedno pivo v čase t a v hospodě h". Pak si zadaný výrok můžeme napsat jako (kvantifikujeme vždy přes všechny lidi (c), všechny časy (t) a všechny hospody (h)):

$$\forall c : [(\exists t \, \exists h\colon V(c, t, h)) \wedge \neg \, (\forall t \, \exists h\colon V(c, t, h)) \wedge \neg \, (\forall h \, \exists t\colon V(c, t, h))]$$

Negace tohoto je pak (s využitím pravidel pro negaci kvantifikovaných výroků a pro negaci konjunkce):

$$\exists c : [(\forall t \, \forall h\colon \neg V(c, t, h)) \vee (\forall t \, \exists h\colon V(c, t, h)) \vee (\forall h \, \exists t\colon V(c, t, h))]$$

Takže, když to přepíšeme do češtiny, „Existuje osoba, která si nikdy nedá ráda jedno pivo, nebo která si ho dá ráda v libovolný čas, nebo která si ho dá ráda v libovolné hospodě."

Indukce, kvantifikátory, supremum

3b. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

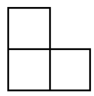
Příklady:

1. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí vztah

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ a pro $n > 2$ platí $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Najděte vzorec pro n-tý člen této posloupnosti, a dokažte jeho správnost.

3. Mějme šachovnici s rozměry $2^n \times 2^n$, na které chybí pravé horní políčko. Dokažte, že se dá tato šachovnice vydláždit s pomocí dílků tohoto tvaru (dílky se mohou otáčet):



4. Vyjádřete následující výroky pomocí kvantifikátorů:

   a) Každý zná každého.
   b) Někdo zná každého.
   c) Každý zná někoho.
   d) Někoho nikdo nezná.

5. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. O f řekneme, že je **nerozhodná**, pokud je na nějakém otevřeném intervalu rostoucí a na nějakém otevřeném intervalu klesající. Zapište tuto definici pomocí kvantifikátorů.

∗ 6. Vyjádřete co nejjednodušeji:

   a) $\forall \varepsilon > 0\, \forall y \in \mathbb{R}\colon (|y - 7| < 5) \Rightarrow (|f(y) - 15| < \varepsilon)$
   b) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 1\, \forall y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon (|y - x| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n})$

∗ 7. Znegujte následující výrok: „Každý si někdy rád dá jedno pivo, ale ne vždy a ne v každé hospodě.“

8. Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima?

   a) $\left\{\frac{p}{p+q}\colon\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\right\}$
   b) $\{\sin x\colon\ x \in [0, 2\pi]\}$
   c) $\{\sin x\colon\ x \in (0, 2\pi)\}$
   d) $\{\sin x\colon\ x \in (0, \pi)\}$
   e) $\{n^2 - m^2\colon\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$
   f) $\{n^2 - m^2\colon\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ n > m\}$
   g) $\{n^2 - m^2\colon\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ n \leq m\}$
   h) $\{2^{-n} + 3^{-n}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$
   i) $\{2^{-n} + 3^{-n}\colon\ n \in \mathbb{Z}\}$
   j) $\{5^{(-1)^m \cdot 3^n}\colon\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\}$

Indukce, kvantifikátory, supremum

3b. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Výsledky:

2. $a_n = 2^{n+1} - 1$

4. Označme výrok „osoba a zná osobu b" symbolem $Z(a,b)$, dále označme množinu všech lidí jako L. Pak:

   a) $\forall a \in L\, \forall b \in L\colon\ Z(a,b)$

   b) $\exists a \in L\, \forall b \in L\colon\ Z(a,b)$

   c) $\forall a \in L\, \exists b \in L\colon\ Z(a,b)$

   d) $\exists b \in L\, \forall a \in L\colon\ \neg Z(a,b)$

5. $\exists a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d\ \forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2\ \forall t_1, t_2 \in (c,d), t_1 < t_2\colon$

$$(f(x_1) < f(x_2))\ \ \&\ \ (f(t_1) > f(t_2))$$

6. a) Pro $y \in (2,12)$ platí, že $f(y) = 15$.

   b) Funkce f je na $\mathbb{R}$ konstantní.

7. Označme symbolem $V(c,t,h)$ výrok „Člověk c si dá rád jedno pivo v čase t a v hospodě h". Pak si zadaný výrok můžeme napsat jako (kvantifikujeme vždy přes všechny lidi (c), všechny časy (t) a všechny hospody (h)):

$$\forall c : [(\exists t\, \exists h\colon\ V(c,t,h)) \wedge \neg\,(\forall t\, \exists h\colon\ V(c,t,h)) \wedge \neg\,(\forall h\, \exists t\colon\ V(c,t,h))]$$

   Negace tohoto je pak (s využitím pravidel pro negaci kvantifikovaných výroků a pro negaci konjunkce):

$$\exists c : [(\forall t\, \forall h\colon\ \neg V(c,t,h)) \vee (\forall t\, \exists h\colon\ V(c,t,h)) \vee (\forall h\, \exists t\colon\ V(c,t,h))]$$

   Takže, když to přepíšeme do češtiny, „Existuje osoba, která si nikdy nedá ráda jedno pivo, nebo která si ho dá ráda v libovolný čas, nebo která si ho dá ráda v libovolné hospodě."

8. a) Supremum je 1, maximum neexistuje. Infimum je 0, minimum neexistuje.

   b) Supremum je 1, maximum taky. Infimum je -1, minimum rovněž.

   c) Supremum je 1, maximum taky. Infimum je -1, minimum rovněž.

   d) Supremum je 1, maximum taky. Infimum je 0, minimum neexistuje.

   e) Supremum, infimum, maximum ani minimum neexistuje (množina je zhora i zdola neomezená).

   f) Supremum ani maximum neexistuje. Infimum je 3, minimum taky.

   g) Supremum je 0, maximum taky. Infimum ani minimum neexistuje.

   h) Supremum je $\frac{5}{6}$, maximum taky. Infimum je 0, minimum neexistuje.

   i) Supremum ani maximum neexistuje. Infimum je 0, minimum neexistuje.

   j) Supremum ani maximum neexistuje. Infimum je 0, minimum neexistuje.

Supremum, limity

3c. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Příklady:

∗ 1. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. O f řekneme, že je **nerozhodná**, pokud je na nějakém otevřeném intervalu rostoucí a na nějakém otevřeném intervalu klesající. Zapište tuto definici pomocí kvantifikátorů.

2. Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima?

   a) $\left\{\frac{p}{p+q}\colon\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\right\}$
   b) $\{\sin x\colon\ x \in [0, 2\pi]\}$
   c) $\{\sin x\colon\ x \in (0, 2\pi)\}$
   d) $\{\sin x\colon\ x \in (0, \pi)\}$
   e) $\{n^2 - m^2\colon\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$
   f) $\{n^2 - m^2\colon\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ n > m\}$
   g) $\{n^2 - m^2\colon\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ n \leq m\}$
   h) $\{2^{-n} + 3^{-n}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$
   i) $\{2^{-n} + 3^{-n}\colon\ n \in \mathbb{Z}\}$
   j) $\{5^{(-1)^m \cdot 3^n}\colon\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\}$

3. Spočtěte následující limity:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-2)^{-n}$
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n\pi)$
   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\pi)$

Supremum, limity

3c. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d\ \forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2\ \forall t_1, t_2 \in (c, d), t_1 < t_2$:

$$(f(x_1) < f(x_2))\ \ \&\ \ (f(t_1) > f(t_2))$$

2. a) Supremum je 1, maximum neexistuje. Infimum je 0, minimum neexistuje.
   b) Supremum je 1, maximum taky. Infimum je -1, minimum rovněž.
   c) Supremum je 1, maximum taky. Infimum je -1, minimum rovněž.
   d) Supremum je 1, maximum taky. Infimum je 0, minimum neexistuje.
   e) Supremum, infimum, maximum ani minimum neexistuje (množina je zhora i zdola neomezená).
   f) Supremum ani maximum neexistuje. Infimum je 3, minimum taky.
   g) Supremum je 0, maximum taky. Infimum ani minimum neexistuje.
   h) Supremum je $\frac{5}{6}$, maximum taky. Infimum je 0, minimum neexistuje.
   i) Supremum ani maximum neexistuje. Infimum je 0, minimum neexistuje.
   j) Supremum ani maximum neexistuje. Infimum je 0, minimum neexistuje.

3. a) 0
   b) Limita neexistuje
   c) Limita neexistuje
   d) 0

Limity posloupností

4. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je **limitou** posloupnosti $\{a_n\}$, pokud platí, že

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0\colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Řekneme, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je ∞, pokud $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\colon\ a_n > K$.
A konečně řekneme, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je $-\infty$, pokud $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0\colon\ a_n < K$.
Je-li $A \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ limitou posloupnosti $\{a_n\}$, pak to značíme symbolem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, případně $\lim a_n = A$. Má-li posloupnost konečnou (vlastní) limitu, řekneme, že je **konvergentní**. Není-li tomu tak, řekneme, že je **divergentní**.

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}^*$, pak platí:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, je-li výraz na pravé straně definován.
- Je-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ číslo b_n nenulové, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, je-li výraz na pravé straně definován.

Příklady:

1. Spočtěte (z definice) následující limity posloupností (pokud existují):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-2)^{-n}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n\pi)$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\pi)$

2. Spočtěte následující limity posloupností (pokud existují):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - 2n)$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

   f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n}\right)$

   g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n}$

   h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arctan n + n}{n}$

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} (2^{2n} - 3 \cdot 3^n)$

   j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}$

   k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1}}{n}$

   l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

   m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$

   n) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$

   o) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Limity posloupností

4. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. a) 0
   b) Limita neexistuje
   c) Limita neexistuje
   d) 0

2. a) ∞
   b) 0
   c) 2
   d) 2
   e) 0
   f) 0
   g) 0
   h) 1
   i) ∞
   j) 1
   k) 0
   l) 0
   m) 0
   n) $-\frac{1}{2}$
   o) 1

Limity posloupností

5. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA (Aritmetika limit)
Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $A, B \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Pak platí, že:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, je-li výraz na pravé straně definován.
- Je-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ číslo b_n nenulové, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, je-li výraz na pravé straně definován.

POZNÁMKA
Pro $x \in \mathbb{R}$ nejsou mj. definovány výrazy $\infty + (-\infty)$, $(-\infty) + \infty$, $0 \cdot \infty$, $-\infty \cdot 0$, $\frac{x}{0}$, $\frac{\infty}{0}$.

VĚTA („Nulová“ krát omezená)
Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\} = 0$, a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

VĚTA (O dvou strážnících)
Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. Nechť $\exists n_0\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \ a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

POZNÁMKA (Známé limity)
Platí, že

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- Je-li $q \in (-1, 1)$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Je-li $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, a je-li $q \leq -1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ neexistuje.

VĚTA
Pro $A, B \in \mathbb{R}$ platí, že

$$(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \cdots + B^n.$$

Dále platí, že

$$A^n - B^n = (A - B)\big(A^{n-1} + A^{n-2} \cdot B + \cdots + A \cdot B^{n-2} + B^{n-1}\big).$$

Tedy speciálně $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ a $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

Příklady:

1. Spočtěte následující limity posloupností (pokud existují):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arctan n+n}{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (2^{2n} - 3\cdot 3^n)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1}}{n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$

2. Spočtěte následující limity posloupností (pokud existují):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^6+7n^3-5}{50n^5-24n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot 7^n+n^3\cdot 5^n}{-3n\cdot 7^n+6^n\cdot\sqrt{n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+n\sin(2n)}{n\cos(3n)+(2n+\sin(4n))^2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ pro $a > 0$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$, kde $a,b,c > 0$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

Limity posloupností

5. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. a) 0
   b) 1
   c) ∞
   d) 1
   e) 0
   f) 0
   g) $-\frac{1}{2}$
2. a) ∞
   b) $-\infty$
   c) 1
   d) 1
   e) $\frac{1}{2}$
   f) 1
   g) $\max\{a, b, c\}$
   h) Limita neexistuje (`https://youtu.be/skOqZAYymoc?t=48s`)

Limity posloupností

6. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

Poznámka

Pro $x \in \mathbb{R}$ nejsou mj. definovány výrazy $\infty + (-\infty)$, $(-\infty) + \infty$, $0 \cdot \infty$, $-\infty \cdot 0$, $\frac{x}{0}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Poznámka (Růstová škála)

„Pro $q > 1$ platí, že $n! \gg q^n \gg n^k$."

Definice

Nechť $x \in \mathbb{R}$. (Dolní) celou částí čísla x nazveme největší celé číslo, které je menší nebo rovno x, tedy $[x] = \lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z}:\ z \leq x\}$.

Poznámka

Platí, že $\forall x \in \mathbb{R}:\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. Tedy například platí:

- $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$
- $\lfloor -5.93 \rfloor = -6$
- $\lfloor -3 \rfloor = -3$
- $\lfloor 5.96 \rfloor = 5$
- $\lfloor -3.01 \rfloor = -4$
- $\lfloor 2 \rfloor = 2$

Pozor:

- $\lfloor a \cdot x \rfloor \neq a \cdot \lfloor x \rfloor$
- $\lfloor x^n \rfloor \neq \lfloor x \rfloor^n$
- $\lfloor x \pm a \rfloor \neq \lfloor x \rfloor \pm a$
- $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \neq \frac{\lfloor x \rfloor}{a}$
- $\lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor \neq \sqrt[n]{\lfloor x \rfloor}$

Příklady:

1. Spočtěte následující limity posloupností (pokud existují):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + \sin n) \left(\sqrt{n^4 + 2} - \sqrt{n^4 + 1}\right)$

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$

   f) $\lim\limits_{n\to\infty} \lfloor \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \rfloor$

   g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n - \left\lfloor \sqrt[3]{(n+1)!} \right\rfloor}{3n^3 - \lfloor \sqrt[3]{n!} \rfloor}$

   h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor \sqrt[3]{n^3-1} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n^3+1} \rfloor}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \ldots + n^n}}$

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+7)^{50} - \left(n^2-1\right)^{25}}{\sqrt{n^{200} + n^{99} - 1} - \sqrt{n^{100} + 2n^{99} + 1}}$

   j) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^{3n}\sqrt{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$

2. Spočtěte následující limity posloupností (pokud existují) - zkoušková složitost:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \sqrt[3]{n^3+n^2} - n \sqrt[3]{8^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n} + 1} - \sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}\right) \frac{\sqrt[n]{n+n^n}}{\lfloor \sqrt{n+2} \rfloor}$

* 3. Najděte konkrétní příklady x a a, pro které neplatí rovnosti ze třetí poznámky v teorii.

Limity funkcí

7. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

Věta (Limita složené funkce)
Buď $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, a nechť jsou f a g funkce. Nechť platí, že $\lim_{x \to c} g(x) = D$, $\lim_{x \to D} f(x) = A$. Nechť platí alespoň jedna z podmínek:

$$\exists \eta > 0 \ \forall x \in P(c, \eta) \colon \ g(x) \neq D \tag{P}$$

$$f \text{ je spojitá v } D. \tag{S}$$

Pak platí $\lim_{x \to c} f\big(g(x)\big) = A$.

Poznámka (Známé limity)
Platí, že: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$, a $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Příklady:

1. Spočtěte následující limity, nebo dokažte, že neexistují:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

d) $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $(m, n \in \mathbb{N})$

f) $\lim_{x \to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$, $(n \in \mathbb{N})$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $(m, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R})$

i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $(m, n \in \mathbb{N})$

j) $\lim_{x \to 1} ([x] - x)$

k) $\lim_{x \to 0} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$

l) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

m) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

n) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

Limity funkcí

8. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

Věta (Limita složené funkce)
Buď $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, a nechť jsou f a g funkce. Nechť platí, že $\lim_{x\to c} g(x) = D$, $\lim_{x\to D} f(x) = A$. Nechť platí alespoň jedna z podmínek:

$$\exists \eta > 0 \ \forall x \in P(c,\eta) \colon \ g(x) \neq D \tag{P}$$

$$f \text{ je spojitá v } D. \tag{S}$$

Pak platí $\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = A$.

Poznámka (Známé limity)
Platí, že: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$, a $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Příklady:

1. Spočtěte následující limity, nebo dokažte, že neexistují (V bodech d) a e) použijte ze známých limit pouze $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$):

a) $\lim_{x\to 1} ([x] - x)$

b) $\lim_{x\to 0} x \cdot [\frac{1}{x}]$

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos \alpha x)}{\log(\cos \beta x)}$

* 2. Spočtěte následující limity, nebo dokažte, že neexistují:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{x^2}$

b) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$

c) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

d) $\lim_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$

e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

Spojitost a derivace

9. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Příklady:

1. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+4^x\sqrt{x}}{1+3^x\sqrt{x}}\right)^{\frac{\sqrt{e^x}-\cos x}{x^2}}$$

2. Spočtěte derivace následujících funkcí, vyšetřete spojitost, případně rozhodněte, zdali je možné funkce spojitě dodefinovat na $\mathbb{R}$:

   a) $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sign} x$

   b) $f(x) = |x-3|$

   c) $f(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor$

   d) $f(x) = \begin{cases} 3\sin(-x), & \text{když } x \geq 0 \\ x^2 - 3x, & \text{když } x < 0 \end{cases}$

   e) $f(x) = |x^3|$

   f) $f(x) = e^{-x^{-2}}$ (zde nepočítejte derivaci)

   g) $f(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$ (zde spočtěte derivaci, pokud existuje, pouze v nule)

3. Spočtěte derivace následujících funkcí a vyšetřete spojitost (odvážní mohou zkusit funkce spojitě rozšířit na hranici):

   a) $(x^2 - 7x + 14)^3$

   b) $\sin x \cdot \cos x$

   c) $\sin^2 x + \cos^2 x$

   d) x^x

   e) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

   f) $\log(x^2 + x + 1)$

4. Dvě chodby široké 2 m a 5 m se křižují v pravém úhlu. Zjistěte maximální délku žebříku, který je možno přenést ve vodorovné poloze z jedné chodby do druhé.

5. Spočtěte derivace následujících funkcí a vyšetřete spojitost:

   a) $(x^2 + 51x + 119)^{87}$

   b) $(x+15)^3(x-17)^{10}x^9$

   c) $\frac{e^{x^2+1}\cdot\cos x}{(x+1)^2\cdot\log(x^2+1)}$

   d) $\log(x^2 + x + 1)$

   e) $\sin\left(\cos\left((x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{18}\right)\right)$

   f) $(\sin x)^{\cos x}$

   g) $\arcsin(\sin x)$

   h) $\log \arccos x$

   i) $x \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}$

   j) $\arctan e^x - \log\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

   k) $\arctan\sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$

   l) $(\arctan x)^{\arcsin x}$

   m) $f(x) = e^{\frac{1}{\log|x|}}$

Průběh funkce

10. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

Definice

Vyšetřit průběh funkce znamená:

I. Určit definiční obor.

II. Provést diskuzi spojitosti (případně až s použitím derivací).

III. Nalézt průsečíky s osami (existují-li), zjistit, zdali je funkce symetrická (lichá, sudá, periodická).

IV. Dopočítat limity v „krajních bodech definičního oboru“.

V. Spočítat první derivaci (i s jejím definičním oborem), určit intervaly monotonie.

VI. Nalézt lokální (a globální) extrémy, určit obor hodnot.

VII. Spočítat druhou derivaci (i s jejím definičním oborem), určit intervaly, kde je funkce konvexní nebo konkávní. Určit inflexní body.

VIII. Rozhodnout, má-li funkce nějaké asymptoty, případně je spočítat.

IX. Na základě zjištěných poznatků načrtnout graf funkce.

Věta (O inflexních bodech)

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pokud $f''(a)$ existuje a je nenulová, pak a není inflexním bodem funkce f.

Nechť $l, a, p \in \mathbb{R}$, $l < a < p$. Nechť má funkce f spojitou první derivaci na intervalu (l, p). Nechť platí, že

- $[\forall x \in (l, a)\colon\ f''(x) < 0]$ a $[\forall x \in (a, p)\colon\ f''(x) > 0]$, nebo
- $[\forall x \in (l, a)\colon\ f''(x) > 0]$ a $[\forall x \in (a, p)\colon\ f''(x) < 0]$.

Pak je a inflexním bodem funkce f.

Věta

$$\left[\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - (a\cdot x + b)\big) = 0\right] \Leftrightarrow \left[\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \wedge \lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - a\cdot x\big) = q \in \mathbb{R}\right]$$

Příklady:

1. Vyšetřete průběh funkce $\log\left(|e^{2x} + e^{x} - 2|\right)$.

2. Vyšetřete průběhy funkcí:

a) $\frac{2x}{1-x^2}$

b) $x\sqrt{1-x^2}$

c) $\sin x + \cos^2 x$

d) $\arcsin(\cos^2 x)$

e) e^{-x^2+3x-7}

f) $\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$