Jedna implicitní funkce

5. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

<u>VĚTA</u> (O implicitní funkci)
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n+1}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$. Nechť je funkce F třídy $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $[x_0, y_0] \in \Omega$. Nechť jsou splněny následující podmínky:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$,

(2) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existují okolí U_x bodu x_0 ($x_0 \in U_x \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) a okolí bodu y_0 U_y ($y_0 \in U_y \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}$) tak, že

$$\forall x \in U_x \, \exists! y \in U_y : \; F(x, y) = 0.$$

Označíme-li navíc toto y jako $\varphi(x)$, pak $\varphi : U_x \to U_y$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1(U_x)$, která splňuje vztah

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

pro $x \in U_x$ a $j \in \{1, \dots, n\}$.

Příklady:

1. Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2, 0]$:

   a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $f(2) = 0$.

   b) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 2.

   c) Spočtěte $f''(2)$.

   $*$ d) Pro které body $[a, 0]$, $a \in \mathbb{R}$ lze dokázat tvrzení analogické a)?

2. Je dán vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$.

   a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$.

   b) Dokažte, že funkce f roste v jistém okolí bodu 0.

   c) Je funkce f na okolí 0 konvexní nebo konkávní?

3. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$:

   a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$.

   b) Určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U.

   c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.

4. Dokažte, že množina bodů $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ které splňují vztah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

   je v okolí bodu $[1, 1, 1]$ popsatelná jako graf funkce $f(x, y)$ definované na jistém okolí bodu $[1, 1]$, pro kterou je $f(1, 1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, 1]$.