Vícero implicitních funkcí

6. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

<u>Věta</u> (O implicitních funkcích)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n+m}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Nechť je funkce F třídy $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, $[x_0, y_0] \in \Omega$. Nechť jsou splněny následující podmínky:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$,

(2)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ kde } |J| \text{ značí determinant matice } J.$$

Pak existují okolí U_x bodu x_0 ($x_0 \in U_x \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) a okolí bodu y_0 U_y ($y_0 \in U_y \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$) tak, že

$$\forall x \in U_x \, \exists! y \in U_y \colon \; F(x, y) = 0.$$

Označíme-li navíc toto y jako $\varphi(x)$, pak $\varphi : U_x \to U_y$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1(U_x)$.

<u>Poznámka</u>

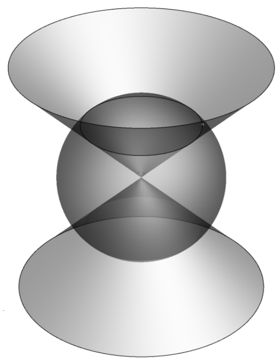
Determinant matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je roven $ad - bc$.

Příklady:

1. Ukažte, že soustava rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$x^2 + y^2 = z^2$$

určuje v jistém okolí bodu $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ jednoznačně funkce $x = x(y)$ a $z = z(y)$ splňující $x(0) = z(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Spočtěte první derivace těchto dvou funkcí v bodě 0. Lze teď něco říct o monotonii funkcí $x(y)$, $z(y)$ na nějakém okolí bodu 0? Je funkce x na okolí nuly konkávní?



2. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$:

   a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$.

   b) Určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U.

   c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.

3. Dokažte, že množina bodů $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ které splňují vztah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

   je v okolí bodu $[1, 1, 1]$ popsatelná jako graf funkce $f(x, y)$ definované na jistém okolí bodu $[1, 1]$, pro kterou je $f(1, 1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, 1]$.

4. Ukažte, že následující soustavy rovnic určují v jistém okolí zadaného bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v (proměnných x a y). Spočítejte obě první parciální derivace těchto funkcí v bodě $[x_0, y_0]$. Bude-li se vám chtít, určete rovnici tečné nadroviny.

   a) Bod $[1, 0, 1, 0]$,

$$\begin{aligned} x &= u \cos\left(\frac{v}{u}\right), \\ y &= u \sin\left(\frac{v}{u}\right). \end{aligned}$$

   b) Bod $\left[e + 1, e, 1, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} x &= e^u + u \sin v, \\ y &= e^u - u \cos v. \end{aligned}$$

   c) Bod $[1, 2, 0, 0]$,

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x. \end{aligned}$$