Řady s nezápornými členy

12. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

<u>VĚTA</u> (Nutná podmínka konvergence)
Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>VĚTA</u> (Srovnávací kritérium)
Nechť posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ splňují, že $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 0 \leq a_n \leq b_n$. Potom platí následující implikace:

- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$
- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}\right)$

<u>VĚTA</u> (Limitní srovnávací kritérium)
Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť posloupnosti nezáporných čísel $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ splňují $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$. Potop platí:

- Je-li $c \in (0, \infty)$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right)$.
- Je-li $c = 0$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$.
- A je-li $c = \infty$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$.

<u>VĚTA</u> (Cauchyovo odmocninové kritérium)
Nechť je $\{a_n\}$ libovolná posloupnost. Potom platí, že:

- $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně}\right)$
- $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$

<u>VĚTA</u> (d'Alambertovo podílové kritérium)
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nenulových čísel. Potom platí:

- $\left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně}\right)$
- $\left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$

<u>VĚTA</u> (Leibnizovo kritérium)
Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost jdoucí k nule ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

<u>TVRZENÍ</u>
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje, právě když $q \in (-1, 1)$.

Příklady:

Vyšetřete konvergenci následujících řad s nezápornými členy v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n^2-13n+8}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+2}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^a e^{-n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n+1}}{(-\sqrt{3})^{2n}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n-1}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n+3^n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log a}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\log n}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{7}\right)^n$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+3}}{\sqrt[4]{n}}$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$