Domácí úkol 1:

Uvažujme funkci

$$F(x, y, z) = \left(x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1\right)^3 - x^2 z^3 - \frac{9}{200} y^2 z^3.$$

Dále uvažujme množinu bodů $S := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ F[x, y, z] = 0\}$.

a) Určuje množina S na nějakém okolí bodu $[1, 0, 1]$ hladkou funkci $x = x(y, z)$ tak, že $x(0, 1) = 1$? Pokud ano, tak spočtěte rovnici tečné nadroviny funkce x v bodě $[0, 1]$.

b) Nyní uvažujme řez této množiny rovinou $y = 0$, neboli uvažujme množinu

$$H := \{[x, z] \in \mathbb{R}^2 \colon\ [x, 0, z] \in S\}.$$

Najděte funkci G tak, aby řešení rovnice $G(x, z) = 0$ tvořily právě množinu H. Pro kterou z dvojic $[-1, -1], [-1, 0], [-1, 1], [1, -1], [1, 0], [1, 1]$ platí, že když si ji označíme jako $[x_0, z_0]$, pak množina H určuje na okolí $[x_0, z_0]$ funkci $z = z(x)$ tak, že $z(x_0) = z_0$? Pro všechny takové dvojice spočtěte první derivaci funkce z v bodě x_0 a určete rovnici tečny. Lze na základě té derivace rozhodnout, zdali je funkce z na nějakém okolí bodu x_0 rostoucí či klesající?