

## Domácí úkol 2:

- (a) Uvažujme prince. Nechť přijel na koni pod věž, na jejímž vrcholu je princezna. Princ sesedne z koně a stoupá po točitém schodišti směrem k princezně. Věž je vysoká 35 metrů, a má poloměr 7 metrů. Schodiště je těsně u zdi věže, a než se princ vyškrábe nahoru tak tu věž obejde přesně dvakrát. Zatímco se princ dere k princezně, tak kůň obíhá věž tak, aby byl vždy co nejbližší princovi.

Čím je princ dál od princezny, tím je nespokojenější. Ale nespokojený je, i když se vzdaluje od koně. Nicméně princ má princeznu 7-krát raději, než koně. Zadefinujeme tedy „míru nespokojenosti prince“  $\odot$ , a to pomocí následujícího vzorce:

$$\odot = 7 (\text{vzdálenost prince od princezny})^2 + (\text{vzdálenost prince od koně})^2$$

Otázkou je, kdy je princ nejspokojenější (neboli kdy je  $\odot$  nejmenší), a kdy je nejmíň spokojený.

Věž uvažujeme jako válec o zmíněné výšce a poloměru, princezna je hmotný bod uprostřed horní podstavy, princ je (hmotnější) bod pohybující se po spirále, která se přesně dvakrát obtočí kolem válce. Kůň je nejhmotnější bod, a obíhá po zemi věž (válec) tak, aby byl co nejbližší princovi (neboli je vždy přesně pod ním). Nějakým, pokud možno jednoduchým způsobem popište, v jakou fázi výstupu na věž bude princ nejvíce/nejméně spokojený, a uveďte i hodnotu funkce  $\odot$  v tomto bodě.

- (b) Uvažujme zase válec, tentokrát nekonečný, o poloměru jedna, a nechť osa toho válce je osa  $z$ . Dále uvažujme kouli se středem v bodě  $[1, 0, 1]$  a poloměrem 1. Nechť  $M$  je průnik toho válce a té koule. Najděte minimum a maximum funkce

$$F[x, y, z] = 3x^2 + 7y^2 + 10z - 5z^2$$

na množině  $M$ , a určete ve kterých bodech se těchto extrémů nabývá.