Stejnoměrná konvergence III – řady funkcí 1

9. cvičení

Matematická analýza 3, NMMA201, Ondřej Bouchala

Teorie:

Věta 1 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$, pak posloupnost funkcí $u_n(x) \rightrightarrows 0$ na J.

Věta 2 (Weirstrassovo kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaných na intervalu J. Označme

$$a_n := \sup\{|u_n(x)|\colon\ x \in J\}.$$

Pokud číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na J.

Věta 3 (O spojitosti řady funkcí)
Nechť u_n jsou funkce spojité na intervale (a, b), a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na (a, b). Pak $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je na intervale (a, b) spojitá.

Příklady:

Odpovězte na otázky

a) Pro jaké x řada konverguje?

b) Na jakém intervale konverguje řada stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně?

c) Na jakém intervale je součet řady spojitá funkce?

pro následující funkce:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2x^2+1}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \dfrac{x^2}{n\log^2 n}\right)$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\dfrac{2x}{x^2+n^3}\right)$

* 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ – vyšetřete pouze na intervale $(0, \infty)$

Řešení:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$. Zde jde o geometrickou řadu, a jak známo ta konverguje právě tehdy, když $x \in (-1, 1)$. Z minulých cvičení víme, že posloupnost funkcí x^n nekonverguje k nule stejnoměrně, tedy dle nutné podmínky (Věta 1) víme, že konvergence zadané řady není stejnoměrná. Nicméně konvergence je lokálně stejnoměrná. Uvažujme interval $[-K, K]$ pro $K \in (0, 1)$, a na něm vyšetřujme stejnoměrnou konvergenci řady. Počítejme
$$a_n = \sup_{x \in [-K,K]} \{|x^n|\} = K^n.$$
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (opět geometrická řada), a tedy (z Věty 2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \rightrightarrows$ na $[-K, K]$ a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $(-1, 1)$.

   Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ je na svém definičním oboru $(-1, 1)$ spojitá.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2x^2 + 1}$. „Bodová" konvergence řady je jednoduchá. Pro $x = 1$ řada zjevně diverguje, a pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konverguje (třeba podle limitního srovnávacího kritéria s $\frac{1}{n^2}$). Stejnoměrná však tato konvergence opět není, zase není splněna nutná podmínka – Věta 3. Nějak (tady je to skoro vidět a lze si to tipnout, případně můžeme derivovat) zvolíme body $x_n = \frac{1}{n}$, respektive $x_n = -\frac{1}{n}$, potom $u_n(x_n) = \frac{1}{2}$, tedy konvergence není stejnoměrná na intervale $(0, \infty)$, respektive $(-\infty, 0)$.

   Vyšetřujme lokálně stejnoměrnou konvergenci na intervale $(0, \infty)$ (pro $(-\infty, 0)$ by to bylo totéž). Mějme dán interval $[K, \infty)$ pro $K \in (0, \infty)$. Pak
$$a_n = \sup_{x \in [K,\infty)} \left\{ \frac{1}{n^n x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{K^2 n^2 + 1},$$
tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (třeba opět limitní srovnávací kritérium), takže (z Věty 2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na intervale $[K, \infty)$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $(0, \infty)$ a ze symetrie i na $(-\infty, 0)$.

   Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ spojitá.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$. Je-li $x = 0$, pak řada zjevně konverguje. Je-li $x < 0$, pak není splněna nutná podmínka konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} x^2 e^{-nx} = \infty$, a tedy řada diverguje. A je-li $x > 0$, pak jde o geometrickou řadu $x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$, která konverguje. Tedy zadaná řada konverguje na intervale $[0, \infty)$.

   A dokonce jde i o konvergenci stejnoměrnou, což vyplyne z výpočtu:
$$a_n = \sup_{x \in [0,\infty)} \left\{ \left| \frac{x^2}{e^{nx}} \right| \right\}.$$
Hledáme extrém, zderivujeme a zjistíme, že na $\left[0, \frac{2}{n}\right]$ je funkce $\frac{x^2}{e^{nx}}$ rostoucí a na $\left[\frac{2}{n}, \infty\right]$ klesající. Tedy maximum je pro $x = \frac{2}{n}$, a
$$a_n = \frac{4}{n^2 e^2}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a tedy (díky Větě 2) zadaná řada konverguje absolutně na $[0, \infty)$.

Z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je na intervale $[0, \infty)$ spojitá. (Je třeba si rozmyslet, že to platí i pro [polo)uzavřený interval].

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \dfrac{x^2}{n \log^2 n}\right)$. Nejprve je třeba si vzpomenout na známou nerovnost

$$\log(1 + y) \leq y.$$

Kdyby nás zajímal její důkaz, tak si stačí uvědomit, že

$$\int_1^{1+y} \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t \leq \int_1^{1+y} \mathrm{d}t.$$

S tímto poznatkem již vidíme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n \log^2 n}.$$

Jelikož je napravo konvergentní řada (jednoduché použití kondenzačního kritéria), konverguje i zadaná řada pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Opět je vidět, že to nekonverguje stejnoměrně, neboť posloupnost $x_n = \sqrt{n \log^2 n}$ nasvědčuje, že není splněna nutná podmínka stejnoměrné konvergence – Věta 1. Vyšetřujme tedy lokálně stejnoměrnou konvergenci. Nechť máme zadán interval $[-K, K]$. Na něm počítejme

$$a_n = \sup_{x \in [-K,K]} \left\{ \left| \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right) \right| \right\} \leq \sup_{x \in [-K,K]} \left\{ \frac{x^2}{n \log^2 n} \right\} = \frac{K^2}{n \log^2 n},$$

tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (opět kondenzační kritérium), a tedy díky Větě 2 platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na $[-K, K]$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$.
A z Věty 3 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ je na $\mathbb{R}$ spojitá.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\dfrac{2x}{x^2 + n^3}\right)$. Zde to konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$, tedy je tam i spojitá. Derivací zjistíme, že $a_n = u_n(\sqrt{n^3})$. A $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{2n^3}\right)$ konverguje (pro $y > 0$ je $\arctan(y) \leq y$).