Obyčejné diferenciální rovnice I – – separované proměnné

11. cvičení

Matematická analýza 3, NMMA201, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA 1 (lemma o lepení)
Uvažujme $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$. Uvažujme dvě řešení y_l na (a, b) a y_p na (b, c) rovnice

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

pro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, Ω otevřená, $f\colon\ \Omega \to R$ spojitá. Nechť platí, že

$$\lim_{x \to b^-} y_l(x) = \lim_{x \to b^+} y_p(x) = B, \quad B \in \mathbb{R}.$$

Potom funkce $y\colon\ (a, c) \to \mathbb{R}$,

$$y(x) := \begin{cases} y_l(x), & x < b, \\ B, & x = b, \\ y_r(x), & x > b \end{cases}$$

je řešením rovnice (1) na intervalu (a, c).

VĚTA 2
Nechť jsou funkce $h\colon\ (a, b) \to \mathbb{R}$ a $g\colon\ (c, d) \to \mathbb{R}$ spojité. Nechť je navíc funkce g na (c, d) nenulová. Potok každým bodem obdélníku $(a, b) \times (c, d)$ prochází právě jedno řešení rovnice

$$y' = g(y)h(x).$$

POZNÁMKA 3 (algoritmus pro řešení rovnic se separovanými proměnnými)
Uvažujme rovnici

$$y'(x) = g(y) \cdot h(x), \tag{2}$$

kde g a h jsou spojité funkce. Při hledání řešení postupujeme takto:

1. krok
Nalezneme všechny maximální otevřené intervaly v $\mathscr{D}(h)$.
2. krok
Určíme nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, pak je funkce $y \equiv c$ zjevně řešením rovnice (2) na každém z intervalů z 1. kroku. (Tato řešení se nazývají stacionární nebo singulární.)

Dále určíme všechny maximální otevřené intervaly, na nichž je g nenulová (a definovaná).

3. krok
Uvažujme interval I z 1. kroku a interval J z 2. kroku. (Tento a následující krok je třeba zopakovat pro každou možnou dvojici intervalů.) Hledáme řešení rovnice (2), které je definované někde v I s hodnotami v J.

Taková řešení splňují
$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$
Tento vztah zintegrujeme. Nechť H je (nějaká) primitivní funkce k h a G je (nějaká) primitivní funkce k $\frac{1}{g}$. Pak z Věty o substituci plyne, že
$$G(y(x)) = H(x) + c.$$
Řešení tedy budou ve tvaru $y(x) = G^{-1}(H(x) + c)$. Nicméně ještě nám zbývá určit, na jakých intervalech je toto definováno. K tomu máme 4. krok.

4. krok
Potřebujeme, aby G^{-1} byla definována, a aby měla hodnoty v intervalu J. Tedy pro zafixované c najdeme všechny otevřené intervaly I_c v množině
$$\{x \in I\colon\ H(x) + c \in G(J)\}.$$
na těchto intervalech máme ze 3. kroku řešení
$$y_c = G^{-1}(H(x) + c),\ x \in I_c.$$

5. krok
Zbývá už jen slepit řešení z 4. kroku (pro všechny možnosti intervalů I a J) se singulárními řešeními z kroku 2 (viz Věta 1).

Poznámka 4
Rovnici $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (tzv. homogenní rovnici) je možné pomocí substituce $z = \frac{y}{x}$ převést na tvar rovnice se separovanými proměnnými.

Příklady:

Nalezněte maximální řešení následujících diferenciálních rovnic:

1. $y' = |x|$
2. $y' = yx$
3. $y' = \sqrt[3]{y}$
4. $xy' - y\left(1 + \log\dfrac{y}{x}\right) = 0$
5. $y' - y^2 \cos x = \cos x$
6. $(1 + e^x)\,yy' = e^x$
7. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$

Řešení:

1. $y' = |x|$. Zde jde o prosté nalezení primitivní funkce. Na intervalu $(0, \infty)$ máme primitivní funkce $\frac{x^2}{2} + c$, a na $(-\infty, 0)$ funkce $-\frac{x^2}{2} + d$. Je vidět, že abychom tato řešení mohli v nule slepit pomocí Věty 1 je třeba, aby $c = d$. Tedy dostáváme řešení

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^2}{2} + c, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

   pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Můžeme to zapsat také jako $y(x) = \frac{1}{2}x|x| + c$.

2. $y' = yx$. Postupujeme podle Poznámky 3. Označme $g(y) := y$ a $h(x) := x$.

   <u>1. krok</u>
   Zjevně je funkce x definovaná na $\mathbb{R}$, tedy $I := \mathbb{R}$.

   <u>2. krok</u>
   Funkce g je nulová pouze pro $y = 0$, tedy máme jedno stacionární řešení $y(x) = 0$.

   Funkce g je definovaná všude, a nenulová je pro intervaly $J_1 := (-\infty, 0)$ a $J_2 := (0, \infty)$.

   <u>3. krok</u>
   Integrujme!

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x,$$

   tedy díky větě o substituci

$$\log |y(x)| = \frac{x^2}{2} + c.$$

   <u>4. krok</u>
   Nejprve se zbavíme logaritmu.

$$|y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^c e^{\frac{x^2}{2}}.$$

   Abychom si zjednodušili zápis, označme $d := e^c$. Konstanta $c \in \mathbb{R}$ byla libovolná, tedy $d > 0$ bude libovolné.

   Nyní se chceme zbavit absolutní hodnoty, a pro to už musíme rozlišit, jestli řešíme případ kdy $y(x) \in J_1 = (-\infty, 0)$ nebo $y(x) \in J_2 = (0, \infty)$.

   Tedy, na $(0, \infty)$ máme $y = de^{\frac{x^2}{2}}$. A vidíme, že pro každé c je $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}+c} > 0$.

   Obdobně na J_2 dostáváme pro každé $c \in \mathbb{R}$ řešení $y(x) = -de^{\frac{x^2}{2}}$.

   <u>5. krok</u>
   Jelikož řešení $\pm e^{\frac{x^2}{2}+c}$ jsou nenulová, není možné navázat na singulární řešení, a tedy se lepit nebude a všechna řešení dostaneme jako

$$y(x) = de^{\frac{x^2}{2}},$$

   kde d je libovolné reálné číslo. (Tím, že d volíme libovolné reálné pokryjeme všechny možnosti. Singulární řešení dostaneme pro volbu $d = 0$.)

3. $y' = \sqrt[3]{y}$. Opět viz Poznámku 3, $g(y) = \sqrt[3]{y}$ a $h(x) = 1$.

   1. krok
   Zřejmě $I = \mathbb{R}$.

   2. krok
   g je definována všude (tj. na $\mathbb{R}$), nulová je pouze v 0 (tedy máme řešení $y \equiv 0$) a tedy máme intervaly $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.

   3. krok
   Integrujme:
$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y(x)}} = 1,$$
   tedy
$$\frac{3}{2} y(x)^{\frac{2}{3}} = x + c.$$

   4. krok
   Vidíme, že bez ohledu na znaménko y musí být $x + c > 0$, tedy $x \in (-c, \infty)$. Je-li $y < 0$ (tj. uvažujeme J_1), pak $y = -\left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}$. Jeli $y > 0$, pak $y = \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}$.

   5. krok
   Vidíme, že v obou případech je $\lim\limits_{x \to (-c)^+} \pm \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}} = 0$, tedy zde můžeme přilepit nulové řešení. Celkem dostaneme řešení
$$y_{1,2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ \pm \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}, & x > c. \end{cases}.$$
   A nesmíme zapomenout, že navíc ještě máme singulární řešení $y_3(x) = 0$.

4. $xy' - y\left(1 + \log\dfrac{y}{x}\right) = 0$. Vidíme, že pro $x = 0$ to nedává smysl, a tedy ani žádné řešení nemůže nulou procházet. Tedy zadanou rovnici můžeme podělit x. Dostaneme
$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \log\frac{y}{x}\right). \tag{3}$$
   Jedná se tedy o homogenní rovnici, a tedy použijeme substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Pak $y(x) = xz(x)$, a tedy $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dosadíme do (3):
$$z + xz' = z(1 + \log z)$$
   Tedy po úpravě (již víme, že x můžeme podělit):
$$z' = \frac{1}{x} z \log z$$
   To už je rovnice se separovanými proměnnými, a tedy můžeme postupovat podle Poznámky 3.

   1. krok
   Vidíme, že pro $x = 0$ to není definované, a tedy máme dva intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$.

2. krok

Nulový bod funkce $z \log z$ je 1. Tedy máme singulární řešení a dva intervaly $J_1 = (0, 1)$ a $J_2 = (1, \infty)$. (Pro $z \leq 0$ není $z \log z$ definováno.)

3. krok

Integrujeme pro $x < 0$.

$$\frac{z'(x)}{z(x) \log z(x)} = \frac{1}{x},$$

tedy pomocí substituce $ž = z(x)$

$$\int \frac{1}{ž \log ž} \, dž \Big|_{ž = z(x)} = \log x + c.$$

Dále můžeme provést substituci $\check{ž} = \log(ž)$, tedy $\check{ž} = \log(z(x))$. Pak

$$\int \frac{1}{\check{ž}} \, d\check{ž} \Big|_{\check{ž} = \log ž, \; ž = z(x)} = \log x + c.$$

Tedy dohromady

$$\log(|\log(z(x))|) = \log x + c.$$

Zbavíme se 1. logaritmu (zatím může být x a $c \in \mathbb{R}$ libovolné):

$$|\log(z)| = e^{c - \log x} = e^c x.$$

4. krok

Pro $z \in J_1$, tj. $0 < z < 1$ máme $\log z < 0$, a tedy

$$z = e^{-e^c x}.$$

Pro $z \in J_2$, tj. $1 < z$ máme $\log z > 0$, a tedy

$$z = e^{e^c x}.$$

Tedy pro $d = e^c$, dostaneme najednou řešení

$$z(x) = e^{dx}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

(Interval J_1 vyhodí výsledek pro $d < 0$, interval J_2 vyhodí výsledek pro $d > 0$ a případ $d = 0$ odpovídá singulárnímu řešení.

Pro interval $I_1 = (-\infty, 0)$ bychom obdobným postupem dostali stejné řešení. Lepit zde nemusíme, neboť e^{dx} se pro $d \neq 0$ a $x \neq 0$ se singulárním řešením nikde nepotká.

Nakonec se ještě nesmíme zapomenout vrátit k y. Víme, že $y(x) = xz(x)$, tedy

$$y(x) = xe^{dx}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

5. $y' - y^2 \cos x = \cos x$. Jednoduchou úpravou si odseparujeme proměnné:

$$y' = \cos(x)(1 + y^2).$$

Postupujeme opět podle Poznámky 3.

<u>**1. krok**</u>
Funkce cos je definována na $I := \mathbb{R}$.

<u>**2. krok**</u>
Funkce $(1 + y^2)$ je pro všechna reálná y definována a nenulová, tedy $J = \mathbb{R}$.

<u>**3. krok**</u>
Integrujme:

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} = \cos x,$$

tedy

$$\arctan y(x) = \sin x + c.$$

Tedy

$$y(x) = \tan(\sin(x) + c),$$

<u>**4. krok**</u>
Toto platí na intervalech, kde $\sin(x) + c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

<u>**5. krok**</u>
Lepit není kde a není s čím.

6. $(1 + e^x)yy' = e^x$. Víme, že e^x bude určitě nenulové, a tedy i y musí být nenulové. Stejnětak i $1 + e^x$ je nenulové. Tedy tím vším můžeme podělit, a dostaneme

$$y' = \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot \frac{1}{y}.$$

To jsou separované proměnné, tedy Poznámka 3.

<u>**1. krok**</u>
Je vidět, že definičním oborem funkce $\frac{e^x}{1+e^x}$ je $\mathbb{R}$.

<u>**2. krok**</u>
Funkce $\frac{1}{y}$ je nenulová, a definovaná na intervalech $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.

<u>**3. krok**</u>
Počítáme:

$$y(x)y'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Tedy pomocí substitucí, kde substituujeme za $y(x)$ a za e^x, dostaneme

$$\frac{1}{2}y^2 = \log(1 + e^x) + c = \log(1 + e^x) + \log(d) = \log(d(1 + e^x)),$$

pro $c \in \mathbb{R}$ libovolné aneb $d > 0$ libovolné.

<u>**4. krok**</u>
Je jedno, jestli $y > 0$ nebo $y < 0$. Lišit se to bude jen znaménkem při odmocnění. Pro interval pro x je důležité, že $y \neq 0$, tedy $\frac{1}{2}y^2 > 0$ a tedy $\log(d(1 + e^x)) > 0$. Takže $d(1 + e^x) > 1$, neboli $e^x > \frac{1}{d} - 1$. Je-li $d \geq 1$, pak to platí pro všechna x. Je-li $d < 1$ pak to platí pro $x > \log\left(\frac{1}{d} - 1\right)$.

Celkem tedy dostávám $y_{1,2}(x) = \pm\sqrt{2\log(d(1+e^x))}$, a to na intervale $\mathbb{R}$ pro $d \geq 1$ a na $\left(\log\left(\frac{1}{d}-1\right), \infty\right)$ pro $d \in (0,1)$.

4. krok
Lepit opět není co a kde.

7. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$. Opět vidíme, že $x \neq 0$, a tedy tím můžeme podělit. Dostaneme homogenní rovnici
$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$
Opět provedeme substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, již máme spočteno, že pak $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dohromady
$$z + xz' = e^z + z,$$
tedy
$$z' = \frac{1}{x}e^z.$$
Opět separované proměnné, opět Poznámka 3.

1. krok
Funkce $\frac{1}{x}$ je definována na intervalech $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$.

2. krok
Funkce e^z je vždy nenulová a definovaná, tedy $J = \mathbb{R}$.

3. krok
Výpočet pro $x \in I_2$, tj. $x > 0$:
$$z'(x)e^{-z(x)} = \frac{1}{x}.$$
Tedy
$$-e^{-z(x)} = \log x + c = \log(dx)$$
pro $c \in \mathbb{R}$ neboli pro $d > 0$.

4. krok
Abych mohl použít logaritmus a zbavit se exponenciály, potřebuju aby $-\log(dx) > 0$. Tedy $dx \in (0,1)$. Tedy je třeba, aby $x \in (0, \frac{1}{d})$. Pak
$$z = -\log(-\log(dx)) \quad d > 0.$$

3. krok
Výpočet pro $x \in I_1$, tj. $x < 0$:
$$z'(x)e^{-z(x)} = \frac{1}{x}.$$
Tedy
$$-e^{-z} = \log(-x) + c = \log(-dx)$$
pro $c \in \mathbb{R}$ neboli pro $d > 0$.

4. krok
Abych mohl použít logaritmus a zbavit se exponenciály, tak potřebuju aby platilo $-\log(-dx) > 0$. Tedy $-dx \in (0,1)$. Tedy je třeba, aby $x \in (-\frac{1}{d}, 0)$. Pak
$$z = -\log(-\log(-dx)), \quad d > 0.$$

5. krok
Lepit opět nikde nelze.

Nakonec to ještě shrneme, a vrátíme se k y. Dohromady to mohu napsat jako

$$y(x) = xz(x) = -x\log(-\log(dx)), \quad d \neq 0$$

na intervalech $(\frac{1}{d}, 0)$ a $(0, \frac{1}{d})$.

Poznamenejme ještě, že se to dá zapsat také pomocí konstanty c, tedy

$$y(x) = -x\log(-\log(|x|) - c), \quad c \in \mathbb{R}$$

na intervalech $(-e^{-c}, 0)$ a $(0, e^{-c})$.