Křivkový a plošný integrál III
plošný integrál prvního druhu

8. cvičení

Matematická analýza 4, NMMA202, Ondřej Bouchala

Teorie:

DEFINICE 1

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $L\colon\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení. Budeme značit

$$\operatorname{vol} L := \sqrt{\det(L^\top L)}.$$

TVRZENÍ 2

Platí, že je-li $k = n - 1$, pak

$$\operatorname{vol}[u^1, \dots, u^{n-1}] = \|u^1 \times \dots \times u^{n-1}\|.$$

Je-li $n = 3$ a $k = 2$, pak pro $a, b \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\operatorname{vol}[a, b] = \|a \times b\| = \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2}.$$

DEFINICE 3

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $G \subseteq \mathbb{R}^k$ je otevřená, $\varphi\colon\ G \to R^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ a f je funkce z $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (definovaná alespoň na okolí $\varphi(G)$). **Plošný integrál prvního druhu** definujeme jako

$$\int_\varphi f \,\mathrm{d}S := \int_G f\left(\varphi(t)\right) \cdot \operatorname{vol} \varphi'(t) \,\mathrm{d}t,$$

pokud tento integrál konverguje.

POZNÁMKA 4

Pro hladkou plochu φ platí, že její obsah je roven $\int_\varphi 1 \,\mathrm{d}S$.

Příklady:

Spočtěte plošný integrál prvního druhu, případně obsah plochy:

1. Obsah $x = v\cos\alpha$, $y = v\sin\alpha$ a $z = v^2$ pro $\alpha \in (0, 2\pi)$ a $v \in (0, 1)$.
2. Obsah povrchu kužele bez podstavy $\{x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.
3. $\int_S |z| \,\mathrm{d}S$ pro sféru $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
4. Obsah $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\colon\ z = xy,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
5. Obsah povrchu rotačního tělesa vzniklého rotací funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$.
6. Obsah povrchu toru (tj. anuloidu neboli koblihy) s hlavní osou R a poloměrem r.

Křivkový a plošný integrál III
plošný integrál prvního druhu

8. cvičení

Matematická analýza 4, NMMA202, Ondřej Bouchala

Řešení:

1. Obsah $x = v\cos\alpha$, $y = v\sin\alpha$ a $z = v^2$ pro $\alpha \in (0, 2\pi)$ a $v \in (0, 1)$. Parametrizaci máme zadanou, nazvěme ji $\varphi(v, \alpha)$, a označme si množinu $(0, 1) \times (0, 2\pi)$ jako G. Je třeba zderivovat φ podle v a podle α. Nuže

$$\begin{aligned}\varphi_v(v, \alpha) &= \big(\cos\alpha, \sin\alpha, 2v\big),\\ \varphi_\alpha(v, \alpha) &= \big(-v\sin\alpha, v\cos\alpha, 0\big).\end{aligned}$$

Dále je třeba spočítat $\operatorname{vol}\varphi'$ na což půjdeme přes vektorový součin dle Tvrzení 2.

$$\begin{aligned}\varphi_v \times \varphi_\alpha &= \big(-2v^2\cos\alpha, -2v^2\sin\alpha, v\sin^2\alpha + v\cos^2\alpha\big) =\\ &= \big(-2v^2\cos\alpha, -2v^2\sin\alpha, v\big)\end{aligned}$$

Tedy

$$\|\varphi_v \times \varphi_\alpha\|^2 = 4v^4\cos^2(\alpha) + 4v^4\sin^2(\alpha) + v^2 = 4v^4 + v^2,$$

tudíž $\operatorname{vol}(\varphi') = \|\varphi_v \times \varphi_\alpha\| = \sqrt{4v^4 + v^2}$. A z definice (a Fubiniho věty) je pak obsah zadané plochy roven

$$\begin{aligned}\int_\varphi 1\,\mathrm{d}S &= \int_G 1\operatorname{vol}(\varphi') = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{4v^4 + v^2}\right) =\\ &= 2\pi\int_0^1 v\sqrt{4v^2 + 1} = \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{w}\,\mathrm{d}w = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1)},\end{aligned}$$

kde jsme navíc využili substituce $w = 4v^2 + 1$.

2. Obsah povrchu kužele bez podstavy $\{x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Jde nám o povrch kužele, tedy nás zajímají body pro které $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$. A výraz $x^2 + y^2$ nám napovídá, že použijeme sinus a cosinus. Tedy (jedna z možných) parametrizací bude

$$\varphi(r, t) = \begin{pmatrix} r\sin t \\ r\cos t \\ 1 - r \end{pmatrix},$$

kde $t \in (0, 2\pi)$ a $r \in (0, 1)$. Zderivujme φ podle r a t:

$$\begin{aligned}\varphi_r(r, t) &= \big(\sin t, \cos t, -1\big),\\ \varphi_t(r, t) &= \big(r\cos t, -r\sin t, 0\big).\end{aligned}$$

Dále

$$\varphi_r \times \varphi_t = \big(-r\sin t, -r\cos t, -r\cos^2 t - r\sin^2 r\big),$$

a tedy $\|\varphi_r \times \varphi_t\| = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2} = \operatorname{vol}(\varphi')$, neboť $r \in (0, 1)$. A zadaný obsah je roven

$$\int_\varphi 1\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{2}\,r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t = 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\pi\sqrt{2}}.$$

3. $\int_S |z|\,\mathrm{d}S$ pro sféru $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Sféra nás přímo navádí k tomu, že máme použít sférické souřadnice. Inu nechť třeba

$$\varphi(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \sin\alpha \sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \in (0, \pi)$ a $\beta \in (0, 2\pi)$. Pak

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= \big(\cos\alpha \sin\beta, \cos\alpha\cos\beta, -\sin\alpha\big), \\ \varphi_\beta &= \big(\sin\alpha\cos\beta, -\sin\alpha\sin\beta, 0\big). \end{aligned}$$

Dále $\|\varphi_\alpha\|^2 = 1$, $\|\varphi_\beta\|^2 = \sin^2\alpha$ a $\varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta = 0$. Tedy díky Tvrzení 2 máme

$$\mathrm{vol}(\varphi') = \sqrt{1 \cdot \sin^2\alpha - 0^2} = |\sin\alpha|.$$

Jelikož $\alpha \in (0, \pi)$, tak $\mathrm{vol}(\varphi') = \sin\alpha$. Tedy

$$\begin{aligned} \int_S |z|\,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} |\cos\alpha| \sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha \right) \mathrm{d}\beta = \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\sin\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos\alpha\sin\alpha \right) = \\ &= 2\pi \left(\left[-\frac{\cos^2\alpha}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos^2\alpha}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \boldsymbol{2\pi}. \end{aligned}$$

(Použili jsme substituci $t = \cos\alpha$.)

4. Obsah $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \; z = xy, \; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Zde je možné použít třeba parametrizaci ψ:

$$\begin{aligned} x &= r\sin t, \\ y &= r\cos t, \\ z &= r^2 \sin t \cos t. \end{aligned}$$

Po krátkém výpočtu (cca 1-2 stránky) dojdeme k výsledku $\mathrm{vol}(\psi') = \sqrt{r^4 + r^2}$. Nicméně rychlejší je použít jednodušší parametrizaci

$$\varphi(u, v) = (u, v, uv),$$

kde $u^2 + v^2 \leq 1$. (Označme si $B = B(0, 1) = \{[u, v] \in \mathbb{R}^2 : \; u^2 + v^2 \leq 1\}$.) Pak

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (1, 0, v), \\ \varphi_v &= (0, 1, u). \end{aligned}$$

Tedy

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-v, -u, 1),$$

a tedy $\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{1+u^2+v^2} = \mathrm{vol}(\varphi')$. Zadaný obsah je pak roven

$$\int_\varphi 1\,\mathrm{d}S = \int_B 1\sqrt{1+u^2+v^2} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\alpha =$$
$$= 2\pi\int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{\check{r}}\,\mathrm{d}\check{r} = 2\pi\left[\frac{1}{3}\check{r}^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 =$$
$$= \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)},$$

kde jsme použili Větu o substituci pro polární souřadnice ($u = r\sin\alpha$, $v = r\cos\alpha$) a substituci $\check{r} = 1 + r^2$.

5. Obsah povrchu rotačního tělesa vzniklého rotací funkce $f(x)$, $x \in [a,b]$, $f(x) > 0$. Zde máme parametrizaci v podstatě zadanou:

$$\varphi(t,\theta) = \begin{pmatrix} t \\ f(t)\cos\theta \\ f(t)\sin\theta \end{pmatrix},$$

kde $t \in [a,b]$, $\theta \in (0,2\pi)$. Pro každé $t \in [a,b]$ obtočíme po kružnici o poloměru $f(t)$ osu x dokola. Pak už jen stačí spočítat derivace

$$\varphi_t = \big(1, f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta\big),$$
$$\varphi_\theta = \big(0, -f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta\big),$$

spočítat vektorový součin těchto derivací

$$\varphi_t \times \varphi_\theta = \big(f(t)f'(t)\cos^2\theta + f(t)f'(t)\sin^2\theta, -f(t)\cos\theta, -f(t)\sin\theta\big) =$$
$$= \big(f(t)f'(t), -f(t)\cos\theta, -f(t)\sin\theta\big),$$

normu tohoto součinu

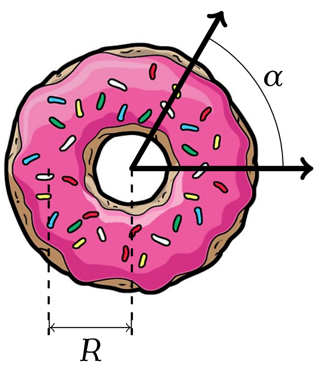
$$\|\varphi_t \times \varphi_\theta\| = \sqrt{f(t)^2f'(t)^2 + f(t)^2} = f(t)\sqrt{f'(t)^2+1}$$

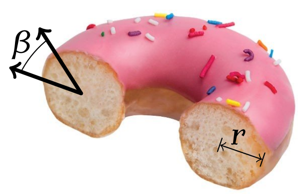
a konečně zadaný obsah plochy

$$\int_\varphi 1\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\left(\int_a^b f(t)\sqrt{f'(t)^2+1}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta = \boldsymbol{2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{f'(t)^2+1}\,\mathrm{d}t}.$$

(Zde by bylo kratší použít pro výpočet $\mathrm{vol}(\varphi')$ posledního vztahu z Tvrzeni 2, zvlášť protože $\varphi_t \cdot \varphi_\theta = 0$.)

6. Obsah povrchu toru (tj. anuloidu neboli koblihy) s hlavní osou R a poloměrem r. Zde je jediným problémem torus parametrizovat.





Parametrizaci provedeme pomocí dvou úhlů, α popisuje pohyb po vnějším obvodu toru a β popisuje pohyb po kružnici v daném řezu, viz obrázek. Pak není tak těžké si uvědomit, že parametrizace φ bude ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= (R + r\sin\beta)\cos\alpha, \\ y &= (R + r\sin\beta)\sin\alpha, \\ z &= r\cos\beta, \end{aligned}$$

kde α i β jsou z intervalu $(0, 2\pi)$. Kam dáme sinus a kam cosinus je jedno, to jen určuje orientaci parametrizace (což je pro výpočet povrchu jedno).

Dále už klasicky počítáme. Nejprve parciální derivace φ:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= \big(-(R + r\sin\beta)\sin\alpha, (R + r\sin\beta)\cos\alpha, 0\big), \\ \varphi_\beta &= \big(r\cos\alpha\cos\beta, r\sin\alpha\cos\beta, -r\sin\beta\big), \end{aligned}$$

následně jejich vektorový součin

$$\varphi_\alpha \times \varphi_\beta = \begin{pmatrix} -r(R + r\sin\beta)\cos\alpha\sin\beta \\ -r(R + r\sin\beta)\sin\beta\sin\alpha \\ -r(R + r\sin\beta)\cos^2\alpha\cos\beta - r(R + r\sin\beta)\sin^2\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -r(R + r\sin\beta)\cos\alpha\sin\beta \\ -r(R + r\sin\beta)\sin\beta\sin\alpha \\ -r(R + r\sin\beta)\cos\beta. \end{pmatrix} = -r(R + r\sin\beta)\begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\alpha \\ \cos\beta. \end{pmatrix}$$

Dále spočteme normu tohoto součinu. Několikrát se použije goniometrická jednička, nejprve pro α a pak pro β.

$$\begin{aligned} \|\varphi_\alpha \times \varphi_\beta\|^2 &= r^2(R + r\sin\beta)^2\left(\sin^2\beta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \cos^2\beta\right) = \\ &= r^2(R + r\sin\beta)^2. \end{aligned}$$

Tedy $\|\varphi_\alpha \times \varphi_\beta\| = |r| \cdot |R + r\sin\beta|$. Je jasné, že r i R jsou kladné. A taky je jasné, že každá správná kobliha má uprostřed díru nenulové (a kladné!) velikosti. Tedy $R > r$. Tudíž $R + r\sin\beta > 0$ a tedy $\|\varphi_\alpha \times \varphi_\beta\| = r(R + r\sin\beta)$. A povrch toru pak spočítáme přímo z definice:

$$\begin{aligned} \int_\varphi 1\,\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} r(R + r\sin\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)\mathrm{d}\alpha = \\ &= 2\pi r\left(\int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\beta + \int_0^{2\pi} r\sin\beta\,\mathrm{d}\beta\right) = \\ &= 2\pi r(2\pi R + 0) = \boldsymbol{4\pi^2 rR}. \end{aligned}$$

Alternativním postupem by bylo rozdělit si torus na dvě poloviny, popsat každou z nich jako plochu vzniklou rotací funkce, a využít vztahu odvozeného v minulém příkladu.