Úvod do celočíselné optimalizace

Martin Branda

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Výpočetní aspekty optimalizace

Proč celočíselnost?

Reálné celočíselné optimalizační úlohy

- **Optimalizace portfolia** – celočíselné alokace aktiv, (fixní) transakční náklady
- **Rozvrhování** – celočíselné (binární) rozhodnutí, zda úlohu zpracuje daný stroj
- **Úlohy rozvozu** (VRP) – binární proměnné pro identifikace následujícího zákazníka na cestě
- ...

Obecněji – modelování splnění **logických relací**, např.

- alespoň dvě ze tří omezení jsou splněné,
- nakoupíme-li danou akcii, zvýší se fixní transakční náklady,
- ...

Proč celočíselnost?

Reálné celočíselné optimalizační úlohy

- **Optimalizace portfolia** – celočíselné alokace aktiv, (fixní) transakční náklady
- **Rozvrhování** – celočíselné (binární) rozhodnutí, zda úlohu zpracuje daný stroj
- **Úlohy rozvozu** (VRP) – binární proměnné pro identifikace následujícího zákazníka na cestě
- ...

Obecněji – modelování splnění **logických relací**, např.

- alespoň dvě ze tří omezení jsou splněné,
- nakoupíme-li danou akcii, zvýší se fixní transakční náklady,
- ...

Úloha celočíselného lineárního programování

$$\min c^T x \tag{1}$$
$$Ax \geq b, \tag{2}$$
$$x \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{3}$$

Předpoklad: všechny koeficienty jsou celočíselné (racionální před vynásobením vhodnými konstantami).

Množinu přípustných řešení a její relaxaci označíme

$$S = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : \ Ax \geq b\}, \tag{4}$$
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ Ax \geq b\} \tag{5}$$

Triviálně $S \subseteq P$. Ne již tak triviálně $S \subseteq \mathrm{conv}(S) \subseteq P$

Úloha celočíselného lineárního programování

$$\min c^T x \tag{1}$$
$$Ax \geq b, \tag{2}$$
$$x \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{3}$$

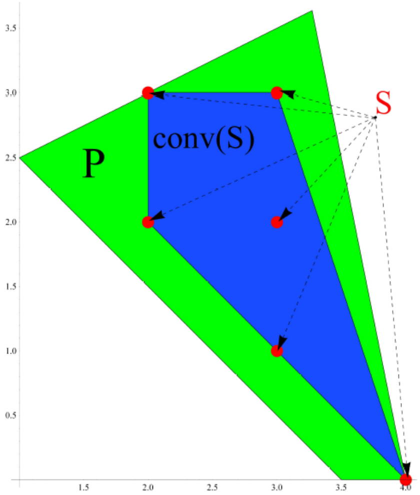
Předpoklad: všechny koeficienty jsou celočíselné (racionální před vynásobením vhodnými konstantami).

Množinu přípustných řešení a její relaxaci označíme

$$S = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : \ Ax \geq b\}, \tag{4}$$
$$P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \ Ax \geq b\} \tag{5}$$

Triviálně $S \subseteq P$. Ne již tak triviálně $S \subseteq \mathrm{conv}(S) \subseteq P$

Množina přípustných řešení, její relaxace a konvexní obal



Š. Škoda: Řešení lineárních úloh s celočíselnými omezeními v GAMSu. Bc. práce MFF UK, 2010.

Úloha celočíselného lineárního programování

Úloha

$$\min c^T x : \ x \in S. \tag{6}$$

je ekvivalentní

$$\min c^T x : \ x \in \mathrm{conv}(S). \tag{7}$$

$\mathrm{conv}(S)$ je prakticky velice obtížné zkonstruovat – je třeba velké množství omezení (existují výjimky).

LP-relaxace:

$$\min c^T x : \ x \in P. \tag{8}$$

Úloha celočíselného lineárního programování

Úloha

$$\min c^T x : \ x \in S. \tag{6}$$

je ekvivalentní

$$\min c^T x : \ x \in \mathrm{conv}(S). \tag{7}$$

$\mathrm{conv}(S)$ je prakticky velice obtížné zkonstruovat – je třeba velké množství omezení (existují výjimky).

LP-relaxace:

$$\min c^T x : \ x \in P. \tag{8}$$

Úloha celočíselného lineárního programování

Úloha

$$\min c^T x : \; x \in S. \tag{6}$$

je ekvivalentní

$$\min c^T x : \; x \in \mathrm{conv}(S). \tag{7}$$

$\mathrm{conv}(S)$ je prakticky velice obtížné zkonstruovat – je třeba velké množství omezení (existují výjimky).

LP-relaxace:

$$\min c^T x : \; x \in P. \tag{8}$$

Úloha smíšeného celočíselného lineárního programování
Mixed-integer linear programming

Časté jsou úlohy smíšené (NEBUDEME UVAŽOVAT)

$$\min c^T x + d^T y \tag{9}$$
$$Ax + By \geq b, \tag{10}$$
$$x \in \mathbb{Z}_+^n,\ y \in \mathbb{R}_+^{n'}. \tag{11}$$

Základní postupy řešení

Ukážeme si:

- **Metoda sečných nadrovin** (Cutting Plane Method)
- **Metoda větvení a mezí** (Branch-and-Bound)

Metody kombinující předešlé, např. Branch-and-Cut.

Základní postupy řešení

Ukážeme si:

- **Metoda sečných nadrovin** (Cutting Plane Method)
- **Metoda větvení a mezí** (Branch-and-Bound)

Metody kombinující předešlé, např. Branch-and-Cut.

Metoda sečných nadrovin – Gomoryho řezy

1. Vyřešíme LP-relaxaci (primárním nebo duálním) SIMPLEXovým algoritmem.
   - Řešení je celočíselné – KONEC, máme opti. řešení,
   - jinak pokračuj dalším krokem.
2. Přidáme **Gomoryho řez** (...) a výslednou úlohu řešíme duálním SIMPLEXem.

Metoda sečných nadrovin – Gomoryho řezy

1. Vyřešíme LP-relaxaci (primárním nebo duálním) SIMPLEXovým algoritmem.
   - Řešení je celočíselné – KONEC, máme opti. řešení,
   - jinak pokračuj dalším krokem.
2. Přidáme **Gomoryho řez** (...) a výslednou úlohu řešíme duálním SIMPLEXem.

Gomoryho řez

Existuje řádek v simplexové tabulce odpovídající neceločíselnému řešení x_i ve tvaru

$$x_i + \sum_{j \in N} w_{ij} x_j = d_i, \tag{12}$$

kde N značí množinu indexů nebazických proměnných; d_i je neceločíselné. Označíme

$$w_{ij} = \lfloor w_{ij} \rfloor + f_{ij}, \tag{13}$$
$$d_i = \lfloor d_i \rfloor + f_i, \tag{14}$$

tj. $0 \leq f_{ij}, f_i < 1$. **Gomoryho řez** je poté

$$\sum_{j \in N} f_{ij} x_j \geq f_i, \tag{15}$$

resp. $-\sum_{j \in N} f_{ij} x_j + s = -f_i$, $s \geq 0$.

Gomoryho řez

Existuje řádek v simplexové tabulce odpovídající neceločíselnému řešení x_i ve tvaru

$$x_i + \sum_{j \in N} w_{ij} x_j = d_i, \tag{12}$$

kde N značí množinu indexů nebazických proměnných; d_i je neceločíselné. Označíme

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \lfloor w_{ij} \rfloor + f_{ij}, & (13) \\ d_i &= \lfloor d_i \rfloor + f_i, & (14) \end{aligned}$$

tj. $0 \leq f_{ij}, f_i < 1$. **Gomoryho řez** je poté

$$\sum_{j \in N} f_{ij} x_j \geq f_i, \tag{15}$$

resp. $-\sum_{j \in N} f_{ij} x_j + s = -f_i$, $s \geq 0$.

Gomoryho řez

Obecné vlastnosti řezů (i Gomoryho):

- Aktuální (neceločíselné) řešení se stane nepřípustným („odřízne se“)
- Žádné celočíselné řešení se nestane nepřípustných („neodřízne se“)

Gomoryho řez – vlastnost 1

Omezení vyjádříme ve tvaru

$$x_i + \sum_{j\in N}(\lfloor w_{ij}\rfloor + f_{ij})x_j \quad = \quad \lfloor d_i\rfloor + f_i, \tag{16}$$

$$x_i + \sum_{j\in N}\lfloor w_{ij}\rfloor x_j - \lfloor d_i\rfloor \quad = \quad f_i - \sum_{j\in N} f_{ij}x_j. \tag{17}$$

Aktuální řešení $x_j^* = 0$ pro $j \in N$ a $x_i^* = d_i$ je neceločíselné, tj. $0 < x_i^* - \lfloor d_i\rfloor < 1$, tedy

$$0 < x_i^* - \lfloor d_i\rfloor = f_i - \sum_{j\in N} f_{ij}x_j^* \tag{18}$$

a

$$\sum_{j\in N} f_{ij}x_j^* < f_i, \tag{19}$$

což je ve sporu s Gomoryho řezem.

Gomoryho řez – vlastnost 2

Uvažujme libovolné přípustné celočíselné řešení a přepis omezení

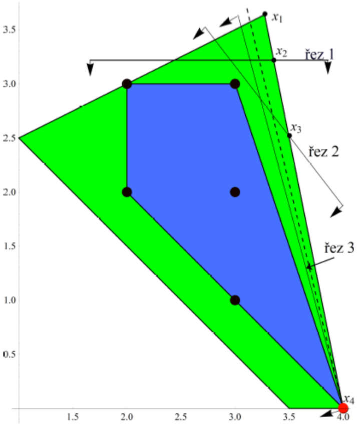
$$x_i + \sum_{j \in N} \lfloor w_{ij} \rfloor x_j - \lfloor d_i \rfloor \quad = \quad f_i - \sum_{j \in N} f_{ij} x_j, \tag{20}$$

Levá strana (LS) je celočíselná, tedy i pravá strana (PS) je celočíselná. Navíc $f_i < 1$ a $\sum_{j \in N} f_{ij} x_j \geq 0$, tedy PS je ostře menší než 1 a zároveň celočíselná, tedy menší nebo rovna než 0, tj. dostáváme Gomoryho řez

$$f_i - \sum_{j \in N} f_{ij} x_j \leq 0. \tag{21}$$

Každé přípustné celočíselné řešení ho splňuje.

Průběh algoritmu sečných nadrovin



Š. Škoda: Řešení lineárních úloh s celočíselnými omezeními v GAMSu. Bc. práce MFF UK, 2010.

Dantzigovy řezy

$$\sum_{j\in N} x_j \geq 1. \tag{22}$$

(Připomeňme, že nebazické proměnné jsou nulové.)

Příklad

$$\min 4x_1 + 5x_2 \tag{23}$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 5, \tag{24}$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 7, \tag{25}$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{26}$$

Duální simplex pro LP-relaxaci ...

Po dvou iteracích duálního SIMPLEXového algoritmu …

			4	5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
5	x_2	8/10	0	1	-3/10	1/10
4	x_1	18/10	1	0	2/10	-4/10
		112/10	0	0	-7/10	-11/10

Nesplňuje celočíselnost, např. omezení pro x_1:

$$\begin{aligned} x_1 + 2/10x_3 - 4/10x_4 &= 18/10, \\ x_1 + (0 + 2/10)x_3 + (-1 + 6/10)x_4 &= 1 + 8/10. \end{aligned}$$

Gomoryho řez:

$$2/10x_3 + 6/10x_4 \geq 8/10.$$

Po dvou iteracích duálního SIMPLEXového algoritmu ...

			4	5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
5	x_2	8/10	0	1	-3/10	1/10
4	x_1	18/10	1	0	2/10	-4/10
		112/10	0	0	-7/10	-11/10

Nesplňuje celočíselnost, např. omezení pro x_1:

$$\begin{aligned} x_1 + 2/10x_3 - 4/10x_4 &= 18/10, \\ x_1 + (0 + 2/10)x_3 + (-1 + 6/10)x_4 &= 1 + 8/10. \end{aligned}$$

Gomoryho řez:

$$2/10x_3 + 6/10x_4 \geq 8/10.$$

Po dvou iteracích duálního SIMPLEXového algoritmu ...

			4	5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
5	x_2	8/10	0	1	-3/10	1/10
4	x_1	18/10	1	0	2/10	-4/10
		112/10	0	0	-7/10	-11/10

Nesplňuje celočíselnost, např. omezení pro x_1:

$$\begin{aligned} x_1 + 2/10x_3 - 4/10x_4 &= 18/10, \\ x_1 + (0 + 2/10)x_3 + (-1 + 6/10)x_4 &= 1 + 8/10. \end{aligned}$$

Gomoryho řez:

$$2/10x_3 + 6/10x_4 \geq 8/10.$$

Aktualizovaná simplexová tabulka

			4	5	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	8/10	0	1	-3/10	1/10	0
4	x_1	18/10	1	0	2/10	-4/10	0
0	x_5	-8/10	0	0	- 2/10	-6/10	1
		112/10	0	0	-7/10	-11/10	0

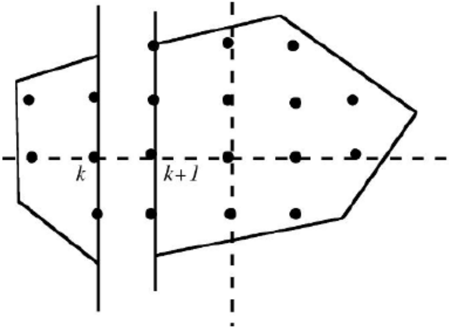
Duální simplex ...

Metoda větvení a mezí (Branch-and-Bound)

Obecné principy:

- Řeš úlohy LP bez celočíselnosti.
- Větvi pomocí dodatečných podmínek na neceločíselnou proměnnou $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$, $x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1$.
- Odřízni neperspektivní větve.

Metoda větvení a mezí



P. Pedegral (2004). Introduction to optimization, Springer-Verlag, New York.

Metoda větvení a mezí (Branch-and-Bound)

0. $f_{min} = \infty$, $x_{min} = \cdot$, seznam úloh $P = \emptyset$
   Vyřeš LP-relaxaci úlohy f^*, x^*. Je-li řešení celočíselné, STOP. Je-li úloha nepřípustná nebo neomezená, STOP.
1. BRANCHING: Existuje x_i bazická neceločíselná proměnná taková, že $k < x_i < k + 1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$:
   - K předešlém problému přidáme omezení $x_i \leq k$ a zařadíme do P.
   - K předešlém problému přidáme omezení $x_i \geq k + 1$ a zařadíme do P.
2. Vyjmi problém z P a vyřeš ho: f^*, x^*.
3.
   - Je-li $f^* < f_{min}$ a x^* porušuje celočíselnost, jdi na 1.
   - BOUNDING: Je-li $f^* < f_{min}$ a x^* je celočíselné, polož $f_{min} = f^*$ a $x_{min} = x^*$, jdi na 4.
   - BOUNDING: Je-li $f^* \geq f_{min}$, jdi na 4.
   - Úloha je nepřípustná, jdi na 4.
4.
   - Je-li $P \neq \emptyset$, jdi na 2.
   - Je-li $P = \emptyset$ a $f_{min} = \infty$, celočíselné řešení neexistuje.
   - Je-li $P = \emptyset$ a $f_{min} < \infty$, optimální hodnota a řešení jsou f_{min}, x_{min}.

Metoda větvení a mezí (Branch-and-Bound)

0. $f_{min} = \infty$, $x_{min} = \cdot$, seznam úloh $P = \emptyset$
   Vyřeš LP-relaxaci úlohy f^*, x^*. Je-li řešení celočíselné, STOP. Je-li úloha nepřípustná nebo neomezená, STOP.
1. BRANCHING: Existuje x_i bazická neceločíselná proměnná taková, že $k < x_i < k + 1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$:
   - K předešlém problému přidáme omezení $x_i \leq k$ a zařadíme do P.
   - K předešlém problému přidáme omezení $x_i \geq k + 1$ a zařadíme do P.
2. Vyjmi problém z P a vyřeš ho: f^*, x^*.
3. - Je-li $f^* < f_{min}$ a x^* porušuje celočíselnost, jdi na 1.
   - BOUNDING: Je-li $f^* < f_{min}$ a x^* je celočíselné, polož $f_{min} = f^*$ a $x_{min} = x^*$, jdi na 4.
   - BOUNDING: Je-li $f^* \geq f_{min}$, jdi na 4.
   - Úloha je nepřípustná, jdi na 4.
4. - Je-li $P \neq \emptyset$, jdi na 2.
   - Je-li $P = \emptyset$ a $f_{min} = \infty$, celočíselné řešení neexistuje.
   - Je-li $P = \emptyset$ a $f_{min} < \infty$, optimální hodnota a řešení jsou f_{min}, x_{min}.

Metoda větvení a mezí (Branch-and-Bound)

0. $f_{min} = \infty$, $x_{min} = \cdot$, seznam úloh $P = \emptyset$
   Vyřeš LP-relaxaci úlohy f^*, x^*. Je-li řešení celočíselné, STOP. Je-li úloha nepřípustná nebo neomezená, STOP.
1. BRANCHING: Existuje x_i bazická neceločíselná proměnná taková, že $k < x_i < k + 1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$:
   - K předešlém problému přidáme omezení $x_i \leq k$ a zařadíme do P.
   - K předešlém problému přidáme omezení $x_i \geq k + 1$ a zařadíme do P.
2. Vyjmi problém z P a vyřeš ho: f^*, x^*.
3. - Je-li $f^* < f_{min}$ a x^* porušuje celočíselnost, jdi na 1.
   - BOUNDING: Je-li $f^* < f_{min}$ a x^* je celočíselné, polož $f_{min} = f^*$ a $x_{min} = x^*$, jdi na 4.
   - BOUNDING: Je-li $f^* \geq f_{min}$, jdi na 4.
   - Úloha je nepřípustná, jdi na 4.
4. - Je-li $P \neq \emptyset$, jdi na 2.
   - Je-li $P = \emptyset$ a $f_{min} = \infty$, celočíselné řešení neexistuje.
   - Je-li $P = \emptyset$ a $f_{min} < \infty$, optimální hodnota a řešení jsou f_{min}, x_{min}.

Metoda větvení a mezí (Branch-and-Bound)

0. $f_{min} = \infty$, $x_{min} = \cdot$, seznam úloh $P = \emptyset$
   Vyřeš LP-relaxaci úlohy f^*, x^*. Je-li řešení celočíselné, STOP. Je-li úloha nepřípustná nebo neomezená, STOP.
1. BRANCHING: Existuje x_i bazická neceločíselná proměnná taková, že $k < x_i < k + 1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$:
   - K předešlém problému přidáme omezení $x_i \leq k$ a zařadíme do P.
   - K předešlém problému přidáme omezení $x_i \geq k + 1$ a zařadíme do P.
2. Vyjmi problém z P a vyřeš ho: f^*, x^*.
3.
   - Je-li $f^* < f_{min}$ a x^* porušuje celočíselnost, jdi na 1.
   - BOUNDING: Je-li $f^* < f_{min}$ a x^* je celočíselné, polož $f_{min} = f^*$ a $x_{min} = x^*$, jdi na 4.
   - BOUNDING: Je-li $f^* \geq f_{min}$, jdi na 4.
   - Úloha je nepřípustná, jdi na 4.
4.
   - Je-li $P \neq \emptyset$, jdi na 2.
   - Je-li $P = \emptyset$ a $f_{min} = \infty$, celočíselné řešení neexistuje.
   - Je-li $P = \emptyset$ a $f_{min} < \infty$, optimální hodnota a řešení jsou f_{min}, x_{min}.

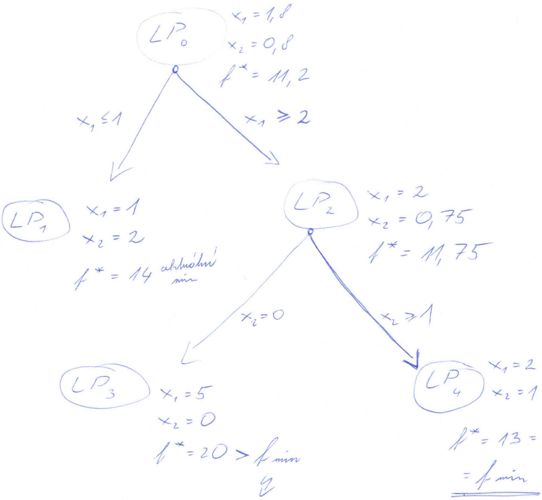
Metoda větvení a mezí (Branch-and-Bound)

0. $f_{min} = \infty$, $x_{min} = \cdot$, seznam úloh $P = \emptyset$
   Vyřeš LP-relaxaci úlohy f^*, x^*. Je-li řešení celočíselné, STOP. Je-li úloha nepřípustná nebo neomezená, STOP.
1. BRANCHING: Existuje x_i bazická neceločíselná proměnná taková, že $k < x_i < k+1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$:
   - K předešlém problému přidáme omezení $x_i \leq k$ a zařadíme do P.
   - K předešlém problému přidáme omezení $x_i \geq k+1$ a zařadíme do P.
2. Vyjmi problém z P a vyřeš ho: f^*, x^*.
3. - Je-li $f^* < f_{min}$ a x^* porušuje celočíselnost, jdi na 1.
   - BOUNDING: Je-li $f^* < f_{min}$ a x^* je celočíselné, polož $f_{min} = f^*$ a $x_{min} = x^*$, jdi na 4.
   - BOUNDING: Je-li $f^* \geq f_{min}$, jdi na 4.
   - Úloha je nepřípustná, jdi na 4.
4. - Je-li $P \neq \emptyset$, jdi na 2.
   - Je-li $P = \emptyset$ a $f_{min} = \infty$, celočíselné řešení neexistuje.
   - Je-li $P = \emptyset$ a $f_{min} < \infty$, optimální hodnota a řešení jsou f_{min}, x_{min}.

Lépe ...

2. Vyjmi problém z P a vyřeš ho: f^*, x^*. Pokud však pro původní úlohu před přidáním omezení platí $f^* \geq f_{min}$ – pro aktuální f_{min} – tak úlohy s přidaným omezením nemá smysl řešit! (Nemůžu dostat menší optimální hodnotu něž f_{min}.)

Metoda větvení a mezí



Metoda větvení a mezí

- **Výběr problému z** P: FIFO/LIFO/úloha s nejmenší f^*.
- **Výběr větvící proměnné** x_i^*: největší/nejmenší porušení celočíselnosti nebo největší/nejmenší koeficient v účelové funkci.

Totálně unimodulární matice

Totálně unimodulární matice A: pro libovolný celočíselný vektor pravých stran b dostaneme celočíselné řešení, např. dopravní problém.

Software

… i pro nelineární celočíselné

- **Prostředí**: GAMS, CPlex Studio, Gurobi, …
- **Řešitele**: CPlex (*pouze* MILP, MIQP), Gurobi (MILP, MIQP), Baron, Bonmin (MINLP), Dicopt (MINLP), Knitro (MINLP), Lindo, …

Pro náročné úlohy často nutné **heuristické a metaheuristické algoritmy** (greedy h., genetické alg., tabu search, simulated annealing, …)

Software

... i pro nelineární celočíselné

- **Prostředí**: GAMS, CPlex Studio, Gurobi, ...
- **Řešitele**: CPlex (*pouze* MILP, MIQP), Gurobi (MILP, MIQP), Baron, Bonmin (MINLP), Dicopt (MINLP), Knitro (MINLP), Lindo, ...

Pro náročné úlohy často nutné **heuristické a metaheuristické algoritmy** (greedy h., genetické alg., tabu search, simulated annealing, ...)

GAMS

Celočíselné proměnné

- **Integer variables** – automaticky nezáporné s přednastavenou horní mezí 100 (lze změnit pomocí *x.up(i) = 1;*)!
- **Binary variables**

Příkaz SOLVE using

- MILP
- MIQCP
- MINLP

GAMS – nastavení

GAMS – options

POZOR na TOLERANCE optimálního řešení (hodnoty) pro celočíselné úlohy.

- **optcr** – relativní tolerance (implicitně 0.1 – bývá příliš velké)
- **optca** – absolutní rolerance (vypnuta)
- **reslim** – počet sekund pro řešení (implicitně 1000 – bývá málo)
- **nlp** = *conopt* , **lp** = *gurobi* , **mip** = *cplex* – výběr rešitele v kódu

Např. OPTIONS optcr=0.000001 reslim = 3600;

GAMS – nastavení

GAMS – options

POZOR na TOLERANCE optimálního řešení (hodnoty) pro celočíselné úlohy.

- **optcr** – relativní tolerance (implicitně 0.1 – bývá příliš velké)
- **optca** – absolutní rolerance (vypnuta)
- **reslim** – počet sekund pro řešení (implicitně 1000 – bývá málo)
- **nlp** = *conopt* , **lp** = *gurobi* , **mip** = *cplex* – výběr rešitele v kódu

Např. OPTIONS optcr=0.000001 reslim = 3600;

Úlohy s pravděpodobnostními omezeními

Chance (probabilistic) constrained problems

Nechť $f, g_j(\cdot, \xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ξ je reálný náhodný vektor, $\varepsilon \in (0,1)$ malé:

$$\min_{x \in X} f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad P\left(g_1(x,\xi) \le 0, \ldots, g_m(x,\xi) \le 0\right) \ge 1 - \varepsilon.$$

Úlohy s pravděpodobnostními omezeními

W.M. Raike (1970). **Dissection Methods for Solutions in Chance Constrained Programming Problems Under Discrete Distributions**. Management Science 16 (11), 708–715.

Má-li ξ konečné diskrétní rozdělení s realizacemi $\xi^1, \dots, \xi^S$ a pnostmi p_s.
Polož $M \geq \max_{j=1,\dots,m} \max_{s=1,\dots,S} \sup_{x \in X} g_j(x, \xi_s)$.

$$\begin{array}{rcl}
\min_{x,u} f(x) & & \\
\text{s.t.} & & \\
\sum_{s=1}^{S} p_s y_s & \geq & 1 - \varepsilon, \\
g_1(x, \xi_s) - M(1 - y_s) & \leq & 0, \; s = 1, \dots, S \\
 & \vdots & \\
g_m(x, \xi_s) - M(1 - y_s) & \leq & 0, \; s = 1, \dots, S, \\
y_s & \in & \{0, 1\}, \; s = 1, \dots, S, \\
x & \in & X.
\end{array} \tag{27}$$

Velká úloha mixed-celočíselné optimalizace ...

Value at Risk (VaR)

Definice VaR pro náhodnou veličinu udávající ztrátu Z na pstním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, hladina $\alpha \in (0,1)$, obvykle 0.95, 0.99, 0.995:

$$VaR_\alpha(Z) = \min_z z \text{ s.t. } P(Z \le z) \ge \alpha.$$

Optimalizace portfolia:

$$\begin{aligned} &\min_{z,x} z \\ P\left(-\sum_{i=1}^n R_i x_i \le z\right) &\ge \alpha, \\ \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[R_i] \cdot x_i &\ge r_{min}, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1,\ x_i &\ge 0, \end{aligned}$$

kde R_i je náhodný výnos aktiva i a minimální očekávaný výnos r_{min} je zvolen tak, aby úloha byla přípustná.

Value at Risk (VaR)

Definice VaR pro náhodnou veličinu udávající ztrátu Z na pstním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, hladina $\alpha \in (0,1)$, obvykle 0.95, 0.99, 0.995:

$$VaR_\alpha(Z) = \min_z z \text{ s.t. } P(Z \le z) \ge \alpha.$$

Optimalizace portfolia:

$$\begin{aligned} \min_{z,x}\ & z \\ P\left(-\sum_{i=1}^n R_i x_i \le z\right) &\ge \alpha, \\ \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[R_i] \cdot x_i &\ge r_{min}, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1,\ x_i &\ge 0, \end{aligned}$$

kde R_i je náhodný výnos aktiva i a minimální očekávaný výnos r_{min} je zvolen tak, aby úloha byla přípustná.

Literatura

- M. Branda, M.: Solving real-life portfolio problem using stochastic programming and Monte-Carlo techniques. Proceedings of the 28th International Conference on Mathematical Methods in Economics 2010, 67–72.
- P. Pedegral (2004). Introduction to optimization, Springer-Verlag, New York.
- W.M. Raike (1970). Dissection Methods for Solutions in Chance Constrained Programming Problems Under Discrete Distributions. Management Science 16 (11), 708–715.
- Š. Škoda: Řešení lineárních úloh s celočíselnými omezeními v GAMSu. Bc. práce MFF UK, 2010.
- L.A. Wolsey, G.L. Nemhauser, Integer and Combinatorial Optimization. Wiley, New York, 1999.

Dotazy?

e-mail: branda@karlin.mff.cuni.cz
web: http://artax.karlin.mff.cuni.cz/ ~branm1am