Úvod do úloh plánování rozvozu (Vehicle Routing Problems)

RNDr. Martin Branda, Ph.D.

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Výpočetní aspekty optimalizace 2015

Problém obchodního cestujícího

Traveling salesman problem

- Je dáno n měst a v jednom z nich se nachází obchodní cestující.
- Potřebuje obejít všechna zbývající města a vrátit se zpět.
- Pro každou dvojici měst zná náklady na cestu oběma směry a hledá celkovou nejlevnější trasu.

$=$ Hledání hamiltonovského cyklu v grafu s cenami hran.

Přiřazovací problém

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

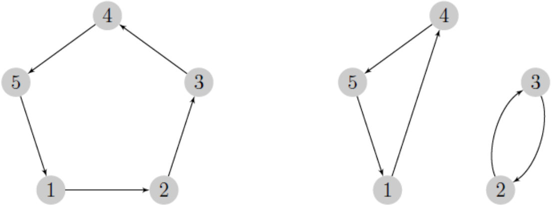
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, \ldots, n, \qquad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}. \qquad (4)$$

„do j přijedu z právě jednoho i, z i odjedu do právě jednoho j, minimalizuji náklady“

Příklad– 5 měst – cyklus a subcykly



O. Kafka, Optimální plánování rozvozu pomocí dopravních prostředků, Diplomá práce MFF UK, 2013.

Podmínky zamezující subcyklům I

- $x_{ii} = 0$, $c_{ii} = \infty$
- $x_{ij} + x_{ji} \leq 1$
- $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 2$
- $\dots$
- $\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1$, $S \subseteq \{1, \dots, n\}$, $2 \leq |S| \leq n - 1$
- Řádově 2^n nerovností, možno redukovat pro $|S| \leq \lceil n/2 \rceil$

Podmínky zamezující subcyklům II

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, i, j = 2, \ldots, n$$

Eliminují subcykly: Alespoň jeden cyklus neprochází vrcholem 1, označme C tento cyklus a $|E(C)|$ počet jeho hran. Sečteme-li nerovnosti přes všechny hrany $\{i, j\}$, které jsou v C, tj. odpovídající $x_{ij} = 1$, dostaneme

$$n|E(C)| \leq (n-1)|E(C)|, \tag{5}$$

což je spor.

Podmínky zamezující subcyklům III

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, i, j = 2, \ldots, n$$

Hamiltonovský cyklus je přípustný: nechť vrcholy tvoří cyklus v pořadí $v_1 = 1$, v_2, ..., v_n. Položíme $u_i = l$, je-li $v_l = i$, tj. u_i odpovídají pořadí. Pro každou hranu cyklu $\{i, j\}$ potom platí $u_i - u_j = -1$, tedy

$$u_i - u_j + nx_{ij} = -1 + n \leq n - 1. \quad (6)$$

Po hrany, které nejsou v cyklu, platí nerovnost také: Rozdíl $u_i - u_j \leq n - 1$ a $x_{ij} = 0$.

Úloha plánování rozvozu s kapacitami

Capacitated Vehicle Routing Problem

Parametry

- n – počet zákazníků
- 0 – depo (počátek a konec každého dopr. prostředku)
- K – počet (stejných) dopravních prostředků
- $d_j \geq 0$ – poptávka zákazníka, pro depo $d_0 = 0$
- $Q > 0$ – kapacity vozidel ($KQ \geq \sum_{j=1}^{n} d_j$)
- c_{ij} – cena přepravy z i do j (obvykle $c_{ii} = 0$)

Rozhodovací proměnné

- x_{ij} – 1, následuje-li j po i, 0 jinak
- u_j – horní odhad doposud převezeného nákladu po navštívení zákazníka j

Úloha rozvozu s kapacitami

$$\min_{x_{ij}, u_i} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0} = K, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = K, \tag{11}$$

$$u_i - u_j + d_j \leq Q(1 - x_{ij}) \; i, j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

$$d_i \leq u_i \leq Q, \; i = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Úloha rozvozu s kapacitami

(7) minimalizace nákladů na rozvoz

(8) k zákazníkovi j přijede právě jeden prostředek

(9) od zákazníka i odjede právě jeden prostředek

(10) do depa 0 se vrátí od zákazníků právě K prostředků

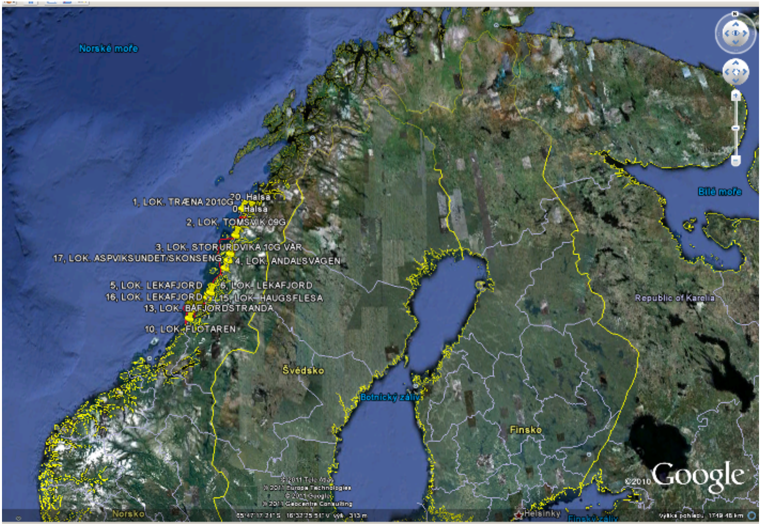
(11) z depa 0 vyjede k zákazníkům právě K prostředků

(12) balance převozu nákladu (zároveň eliminace subcyklů)

(13) nepřekročíme kapacitu dopr. prostředku

(Všechny prostředky musí být použity.)

Norsko . . .


Norské moře
1. LOK. TRÆNA 2010G
20. Halsa
0. Halsa
2. LOK. TOMSVIK 09G
3. LOK. STORURDVIKA 10G VÅR
17. LOK. ASPVIKSUNDET/SKONSENG
4. LOK. ANDALSVAGEN
5. LOK. LEKAFJORD
6. LOK. LEKAFJORD
16. LOK. LEKAFJORD
15. LOK. HAUGSFLESA
13. LOK. BAFJORDSTRANDA
10. LOK. FLOTAREN
Švédsko
Botnický záliv
Finsko
Bílé moře
Republic of Karelia
Norsko
Helsinky
Finský záliv
Google

Optimální plánování rozvozu

- **Cíl** – maximalizovat *filling rate* lodí (operační plánování), optimalizace složení flotily, tj. kapacity a počtu lodí (strategický problém)
- **Rich Vehicle Routing Problem**
  - časová okna
  - heterogenní flotila
  - více depotů a přejezdy mezi nimi
  - více cest v plánovaném období
  - *ne-euklidovské vzdálenosti* (fjordy)
- Celočíselná optimalizace :-(, konstrukční heuristiky a tabu search

- M. Branda, K. Haugen, J. Novotný, A. Olstad, **Downstream logistics optimization at EWOS Norway**. Research report, submitted.

Optimální plánování rozvozu

Náš postup

- Nalezení matematické formulace
- Řešení v GAMS na reálných (historických) datech
- Implementace heuristik
- Přenos do Decision Support System (DSS)

Literatura

- O. Kafka: **Optimální plánování rozvozu pomocí dopravních prostředků**, Diplomá práce MFF UK, 2013.
- P. Toth, D. Vigo: **The vehicle routing problem**, SIAM, Philadelphia, 2002.
- L.A. Wolsey, G.L. Nemhauser: **Integer and combinatorial optimization**. Wiley, New York, 1999.

Dotazy?

e-mail: branda@karlin.mff.cuni.cz
web: http://artax.karlin.mff.cuni.cz/ ˜branm1am