

1.1, i)

Vyřešme

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1.$$

Jmenovatel nesmí být nulový, tedy $x \neq 4$. Jeho znaménko se mění v bodě 4, proto rozlišíme dvě možnosti.

Pro $x > 4$ se směr nerovnosti nezmění:

$$x-2 \geq 2x-8 \iff x \leq 6.$$

Dostáváme $(4, 6]$. Pro $x < 4$ se směr nerovnosti obrátí:

$$x-2 \leq 2x-8 \iff x \geq 6,$$

což s podmínkou $x < 4$ nemá řešení. Celkem tedy

$$\boxed{x \in (4, 6]}.$$

1.1, ii)

Řešme

$$\log_{1/3}(x^2 - 3x + 3) \geq 0.$$

Protože

$$\log_{1/3} u = \frac{\log u}{\log(1/3)} = -\frac{\log u}{\log 3}$$

a $\log 3 > 0$, požadujeme

$$\log(x^2 - 3x + 3) \leq 0.$$

Výraz

$$x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

je kladný pro všechna x . Proto (pomocí toho že logaritmus je rostoucí funkce) zbývá podmínka

$$x^2 - 3x + 3 \leq 1,$$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0,$$

$$(x-1)(x-2) \leq 0.$$

Tedy

$$\boxed{x \in [1, 2]}.$$

1.2

Načrtněme graf funkce

$$f(x) = |||x| - 1| - 1|.$$

Budeme postupovat přesně podle toho, jak je výraz vytvořen: vždy nejprve odečteme 1 a potom vezmeme absolutní hodnotu.

1. Začneme funkcí $f_0(x) = |x|$

$$f_0(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

2. Odečteme 1

Položme

$$f_1(x) = |x| - 1.$$

Z předchozího předpisu dostáváme

$$f_1(x) = \begin{cases} -x - 1, & x \leq 0, \\ x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Graf funkce f_0 jsme tedy posunuli o jednu jednotku dolů. Nuly jsou $x = -1$ a $x = 1$.

3. Vezmeme absolutní hodnotu

Nyní

$$f_2(x) = ||x| - 1| = |f_1(x)|.$$

Část grafu f_1 , která leží pod osou x , překlopíme nad osu x . Algebraicky rozlišíme intervaly určené body -1 , 0 a 1 :

$$f_2(x) = \begin{cases} -x - 1, & x \leq -1, \\ x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Například pro $-1 \leq x \leq 0$ je $-x - 1 \leq 0$, a proto

$$|-x - 1| = x + 1.$$

Podobně pro $0 \leq x \leq 1$ je $x - 1 \leq 0$, takže

$$|x - 1| = 1 - x.$$

4. Znovu odečteme 1

Položme

$$f_3(x) = ||x| - 1| - 1 = f_2(x) - 1.$$

Od každé větve předpisu f_2 jednoduše odečteme 1:

$$f_3(x) = \begin{cases} -x - 2, & x \leq -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 0, \\ -x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Graf funkce f_2 se posunul o jednu jednotku dolů. Nové nuly jsou $x = -2$, $x = 0$ a $x = 2$.

5. Znovu vezmeme absolutní hodnotu

Nyní

$$f_4(x) = |||x| - 1| - 1| = |f_3(x)|.$$

Záporné části grafu f_3 opět překlopíme nad osu x . Dostaneme

$$f_4(x) = \begin{cases} -x - 2, & x \leq -2, \\ x + 2, & -2 \leq x \leq -1, \\ -x, & -1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Například:

$$|-x-2| = \begin{cases} -x-2, & x \leq -2, \\ x+2, & -2 \leq x \leq -1, \end{cases}$$

a

$$|x-2| = \begin{cases} 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}$$

6. Ještě jednou odečteme 1

Položme

$$f_5(x) = |||x| - 1| - 1| - 1 = f_4(x) - 1.$$

Opět odečteme 1 od každé větve:

$$f_5(x) = \begin{cases} -x-3, & x \leq -2, \\ x+1, & -2 \leq x \leq -1, \\ -x-1, & -1 \leq x \leq 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

Graf funkce f_4 jsme posunuli o jednu jednotku dolů. Nuly funkce f_5 jsou

$$x = -3, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad x = 3.$$

7. Poslední absolutní hodnota

Hledaná funkce je

$$f(x) = |f_5(x)| = |||x| - 1| - 1|.$$

Všechny části grafu f_5 pod osou x překlápíme nad osu x .

Pro první větev platí

$$|-x-3| = \begin{cases} -x-3, & x \leq -3, \\ x+3, & -3 \leq x \leq -2. \end{cases}$$

Pro větev $x+1$ platí

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1, & -2 \leq x \leq -1, \\ x+1, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Pro větev $x-1$ platí

$$|x-1| = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

A pro poslední větev

$$|x-3| = \begin{cases} 3-x, & 2 \leq x \leq 3, \\ x-3, & x \geq 3. \end{cases}$$

Celkem tedy

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3, & x \leq -3, \\ x + 3, & -3 \leq x \leq -2, \\ -x - 1, & -2 \leq x \leq -1, \\ x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3, \\ x - 3, & x \geq 3. \end{cases}$$

Graf prochází body

$$\begin{aligned} &(-3, 0), \quad (-2, 1), \quad (-1, 0), \quad (0, 1), \\ &(1, 0), \quad (2, 1), \quad (3, 0), \end{aligned}$$

a je souměrný podle osy y .

1.3

Nechť

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4 - \sqrt{x}}.$$

Aby byla odmocnina definována, musí být $x \geq 0$. Současně $4 - \sqrt{x} \neq 0$, tedy $x \neq 16$. Proto

$$D_f = [0, 16) \cup (16, \infty).$$

Pokusme se najít inverzní funkci. Z rovnosti

$$y = \frac{2\sqrt{x}}{4 - \sqrt{x}}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} 4y &= y\sqrt{x} + 2\sqrt{x}, \\ \sqrt{x} &= \frac{4y}{y + 2}, \\ x &= \frac{16y^2}{(y + 2)^2}. \end{aligned}$$

Je nutné, aby $y \neq -2$ a

$$\frac{4y}{y + 2} \geq 0.$$

Odtud

$$H_f = (-\infty, -2) \cup [0, \infty).$$

Jelikož je f na svém definičním oboru prostá, existuje f^{-1} a

$$f^{-1}(y) = \frac{16y^2}{(y + 2)^2}, \quad y \in (-\infty, -2) \cup [0, \infty).$$

1.4

Použijeme součtové vzorce:

$$\begin{aligned}\sin 5x &= \sin(3x + 2x) \\ &= \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x.\end{aligned}$$

Dosazením

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x, & \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

obdržíme například tvar

$$\boxed{\sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x}.$$

1.5

Dokážeme, že pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Rozlišíme případy podle znamének a a b .

Mají-li a a b stejné znaménko (případně je některé z nich nulové), platí rovnost

$$|a + b| = |a| + |b|.$$

Mají-li opačná znaménka, pak

$$|a + b| = ||a| - |b|| \leq |a| + |b|.$$

Poslední nerovnost plyne například z toho, že při $|a| \geq |b|$ máme

$$||a| - |b|| = |a| - |b| \leq |a| + |b|;$$

případ $|b| \geq |a|$ je obdobný.

Alternativně můžeme použít vyjádření

$$\begin{aligned}|a + b| &= \max\{a + b, -a - b\}, \\ |a| + |b| &= \max\{a, -a\} + \max\{b, -b\} \\ &= \max\{a + b, a - b, -a + b, -a - b\}.\end{aligned}$$

První maximum se bere z podmnožiny druhé množiny, a proto $|a + b| \leq |a| + |b|$.

1.6, i)

Vyřešte

$$\sin 2x = \sin x.$$

Protože

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

dostáváme

$$2 \sin x \cos x = \sin x,$$

tedy

$$\sin x(2 \cos x - 1) = 0.$$

Proto

$$\sin x = 0 \quad \text{nebo} \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

První možnost dává

$$\sin x = 0 \iff x \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ve druhém případě

$$\cos x = \frac{1}{2} \iff x \in \left\{ \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi, 2k\pi - \arccos \frac{1}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Řešením je tedy sjednocení množin

$$\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi, 2k\pi - \arccos \frac{1}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

neboli

$$x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1.6, ii)

Vyřešte

$$2 \sin x + \cos x = 1.$$

Tato rovnice je ekvivalentní soustavě

$$2 \sin x + \cos x > 0 \quad \text{a} \quad (2 \sin x + \cos x)^2 = 1.$$

Po umocnění dostáváme

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x &= 1, \\ 3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x &= 0, \\ \sin x (3 \sin x + 4 \cos x) &= 0. \end{aligned}$$

Proto

$$\sin x = 0 \quad \text{nebo} \quad 3 \sin x + 4 \cos x = 0.$$

Jestliže

$$\sin x = 0,$$

pak po dosazení do původní rovnice musí platit $\cos x = 1$. Dostáváme

$$x \in \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Jestliže

$$3 \sin x + 4 \cos x = 0,$$

pak $\cos x \neq 0$ a můžeme rovnici vydělit výrazem $\cos x$:

$$3 \tan x + 4 = 0,$$

tedy

$$\tan x = -\frac{4}{3}.$$

Odtud

$$x \in \left\{ \arctan \left(-\frac{4}{3} \right) + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Musíme však zachovat podmínku

$$2 \sin x + \cos x > 0.$$

Pro jedno z odpovídajících ramen jednotkové kružnice platí

$$\sin x = \frac{4}{5}, \quad \cos x = -\frac{3}{5},$$

a tedy

$$2 \sin x + \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = 1.$$

Vyhovují proto právě úhly

$$x \in \left\{ \arctan \left(-\frac{4}{3} \right) + \pi + 2k\pi; \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Celkové řešení je

$$\{2k\pi; \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \arctan \left(-\frac{4}{3} \right) + \pi + 2k\pi; \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1.6, iii)

Vyřešte

$$\log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x).$$

Použijeme vztah

$$b \log a = \log(a^b), \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Nejprve musí platit

$$3 - x > 0,$$

tedy

$$x < 3.$$

Původní rovnici můžeme přepsat jako

$$\log(x^2 + 1) = \log(3 - x)^2.$$

Logaritmus je prostá funkce, a proto

$$x^2 + 1 = (3 - x)^2.$$

Tedy

$$x^2 + 1 = 9 - 6x + x^2,$$

$$6x = 8,$$

$$x = \frac{4}{3}.$$

Protože

$$\frac{4}{3} < 3,$$

nalezená hodnota patří do definičního oboru. Řešením je tedy

$$x = \frac{4}{3}.$$