

2.1 i)

Dokážeme indukcií, že

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Položme $n = 1$. Potom

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6},$$

takže tvrzení platí.

Předpokládejme jeho platnost pro $n - 1$, kde $n \geq 2$, tedy

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Přičteme n^2 . Na levé straně nyní máme $\sum_{k=1}^n k^2$ a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1) + 6n^2}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

2.1 ii)

Dokážeme, že

$$\sum_{k=1}^n k^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Platnost pro $n = 1$ je zřejmá. Předpokládejme platnost pro $n - 1$, tedy

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right)^2 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4}.$$

Přičteme n^3 na obou stranách a dostaneme

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

2.1 iii)

Dokážeme indukcií, že pro $a \neq 0$, $a \neq 1$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Pro $n = 0$ platí

$$\sum_{k=0}^0 a^k = a^0 = 1 = \frac{a - 1}{a - 1},$$

takže tvrzení je pravdivé.

Předpokládejme jeho platnost pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$, tedy

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Přičteme a^{n+1} a dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a^k &= \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+1}(a - 1)}{a - 1} \\ &= \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1}. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali tvrzení pro $n + 1$.

Pro $a = 1$ platí zvlášť

$$\sum_{k=0}^n 1^k = n + 1.$$

2.2 i)

Dokážeme, že

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

Pro $n = 1$ dostáváme $1 = 1$, takže tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme jeho platnost pro n . Přičteme další liché číslo $2n + 1$:

$$\begin{aligned} (2n + 1) + \sum_{i=1}^n (2i - 1) &= \sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2. \end{aligned}$$

2.2 ii)

Dokážeme, že

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{pro } x > -1, n \in \mathbb{N}.$$

Pro $n = 1$ platí rovnost. Předpokládejme, že

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Protože $1 + x > 0$, můžeme obě strany vynásobit výrazem $1 + x$:

$$\begin{aligned} (1 + x)^n (1 + x) &\geq (1 + nx)(1 + x) \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali tvrzení pro $n + 1$.

2.3, i)

Dokážeme, že

$$n \leq 2^n.$$

Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Pro $n \geq 2$ předpokládejme, že výrok platí, tedy

$$n \leq 2^n.$$

Protože $2^n \geq 1$, dostáváme

$$n + 1 \leq 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

2.3, ii)

Dokážeme, že

$$n^2 \leq 2^n \quad \text{pro } n \neq 3.$$

Pro $n = 0, 1, 2$ tvrzení snadno ověříme. Pro $n = 4$ platí

$$16 = 4^2 \leq 2^4 = 16.$$

Nechť nyní tvrzení platí pro nějaké $n \geq 4$. Máme

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < 2,$$

protože

$$1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 \iff n^2 - 2n - 1 > 0,$$

a polynom $x^2 - 2x - 1$ je kladný na $(1 + \sqrt{2}, \infty)$, přičemž $1 + \sqrt{2} < 3$. Proto

$$(n+1)^2 < 2n^2 \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

2.4, i)

Dokážeme Pascalův vztah:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} ((k+1) + (n-k)) \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

2.4, ii)

Dokážeme indukci, že

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Pro $n = 1$ platí

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 = 2^1.$$

Podle části i) je

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \\
 &= 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} \\
 &= 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1 \right) \\
 &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.
 \end{aligned}$$

Z indukčního předpokladu tedy plyne

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

2.4, iii)

Dokážeme, že

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

Máme

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \\
 &= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} \\
 &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \\
 &= n 2^{n-1},
 \end{aligned}$$

kde jsme v předposledním řádku položili $j = k - 1$ a v posledním použili část 2.4, ii).

2.5

Dokážeme binomickou větu indukcí. Užíváme Pascalův vztah

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Pro $n = 1$ je tvrzení $(a + b)^1 = a + b$ zřejmé. Předpokládejme, že věta platí pro $n - 1$. Potom

$$\begin{aligned}
 (a + b)^n &= (a + b)^{n-1}(a + b) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} \right) (a + b) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\
 &= a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) a^k b^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.
 \end{aligned}$$

2.6

Použijeme část 2.4, i). Platí

$$\binom{2n}{2k} = \binom{2n-1}{2k-1} + \binom{2n-1}{2k}.$$

Sečtením přes k dostáváme všechny členy binomického součtu pro $2n - 1$, a tedy

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} = 2^{2n-1}.$$

2.7

Dokážeme, že

$$(n + 1)^n \leq n^{n+1} \quad \text{pro } n \geq 3.$$

Pro $n = 3$ snadno ověříme

$$4^3 = 64 < 3^4 = 81.$$

Nechť tvrzení platí pro $n - 1$, tedy

$$n^{n-1} \leq (n - 1)^n.$$

Chceme dostat

$$(n + 1)^n \leq n^{n+1}.$$

Stačí si všimnout, že

$$0 < \frac{n+1}{n} \leq \frac{n}{n-1},$$

neboť

$$\frac{n+1}{n} \leq \frac{n}{n-1} \iff n^2 - 1 \leq n^2.$$

Funkce $x \mapsto x^n$ je na $(0, \infty)$ rostoucí, takže

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \leq \left(\frac{n}{n-1} \right)^n.$$

Vynásobením této nerovnosti indukčním předpokladem dostáváme

$$(n + 1)^n \leq n^{n+1}.$$

2.8

Dokážeme aritmeticko-geometrickou nerovnost

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}, \quad x_1, \dots, x_n \geq 0,$$

indukčním postupem.

Krok 1: $n = 1$. Tvrzení je zřejmé.

Krok 2: $n \Rightarrow 2n$. Rozdělíme součet na dvě poloviny:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} x_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}} \right) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{x_1 x_2 \cdots x_{2n}}. \end{aligned}$$

Ve druhé nerovnosti jsme použili

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

která po umocnění na druhou plyne z $(a-b)^2 \geq 0$.

Krok 3: $n \Rightarrow n-1$. Zvolme

$$x_n = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}.$$

Z nerovnosti pro n proměnných dostáváme

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \frac{1}{n} \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n-1}}.$$

Po převedení druhého členu doprava a použití

$$\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-1} = \frac{1}{n-1}$$

obdržíme

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}}.$$

Kroky 1–3 dokazují tvrzení pro všechna $n \in \mathbb{N}$.