

3.1

1. Viz 1.6.
2. Uvažujme nejprve případy $x, y \geq 0$. Pak zřejmě

$$||x| - |y|| = |x - y|.$$

Podobně, když nebo $x, y \leq 0$, pak

$$||x| - |y|| = |y - x| = |x - y|.$$

Nechť nyní bez újmy na obecnosti $x \geq 0$ a $y < 0$. Potom

$$|x - y| = |x| + |y| = |x| + |y| \geq |x| - |y|$$

a zároveň

$$|x| + |y| \geq |y| - |x|.$$

Tedy

$$|x - y| \geq ||x| - |y||.$$

3.2, 1)

Výrok

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x^2 + y^2 > 0$$

není pravdivý. Jeho negace je

$$\exists x, y \in \mathbb{R} : \quad x^2 + y^2 \leq 0.$$

Stačí uvažovat $x = y = 0$.

3.2, 2)

Uvažujme výrok

$$\forall x \in (0, \infty) \exists y \in \mathbb{N}_0 : \quad (y \leq x) \wedge (y + 1 > x).$$

Jeho negace je

$$\exists x \in (0, \infty) \forall y \in \mathbb{N}_0 : \quad (x < y) \vee (y + 1 \leq x).$$

Najdeme první $k \in \mathbb{N}$, pro které $k > x$. Takové k musí existovat díky Archimédovu principu. Položme $y = k - 1$. Potom $y \leq x$, protože kdyby $y > x$, bylo by to ve sporu s tím, že k je nejmenší přirozené číslo větší než x . Zároveň $y + 1 = k > x$. Původní výrok tedy platí.

Pro $x \in \mathbb{R}^-$ stačí například uvažovat $x = -1$.

3.2, 3)

Uvažujme výrok

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N}_0 : \quad (y \leq x) \wedge (y + 1 > x).$$

Jeho negace je

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N}_0 : \quad (x < y) \vee (y + 1 \leq x).$$

Stačí například uvažovat $x = -1$.

3.2, 4)

Uvažujme výrok

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 1| < \delta \implies |x - 3| < \varepsilon.$$

Jeho negace je

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 1| < \delta \text{ a } |x - 3| \geq \varepsilon.$$

Zvolme $\varepsilon = 1$ a položme

$$x = \min \left\{ \frac{3}{2}, 1 + \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Potom $|x - 1| \in (0, \delta)$, ale

$$|x - 3| \geq \frac{3}{2} > 1.$$

Negace tedy platí.

3.3

1. Uvažujme výrok

$$\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{R} : z > x \implies z > y.$$

Jeho negace je

$$\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{R} : z > x \wedge z \leq y.$$

Původní výrok platí: pro dané x stačí zvolit například $y = x$.

2. Uvažujme výrok

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \varepsilon) \iff |x - \alpha| < 1.$$

Platí: stačí zvolit $\alpha = a + 1$ a $\varepsilon = 2$, neboť $(a, a + 2) = (\alpha - 1, \alpha + 1)$.

Negace tohoto výroku je

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : (x \in (a, a + \varepsilon) \wedge |x - \alpha| \geq 1) \vee (|x - \alpha| < 1 \wedge x \notin (a, a + \varepsilon)).$$

3. Uvažujme výrok

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \varepsilon) \iff |x - \alpha| < 1.$$

Jeho negace je

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : (x \in (a, a + \varepsilon) \wedge |x - \alpha| \geq 1) \vee (|x - \alpha| < 1 \wedge x \notin (a, a + \varepsilon)).$$

Negace platí. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ zvolme $\varepsilon = 1$ a $\alpha = a + 3$. Je-li $x \in (a, a + 1)$, pak $|x - \alpha| > 2 \geq 1$. Jestliže naopak $|x - \alpha| < 1$, pak $x > a + 2$, a tedy $x \notin (a, a + 1)$.

3.4

1.

$$\forall m \in M \forall z \in Z : (S(m, z) \wedge L_1(m, z)) \vee \neg S(m, z).$$

2.

$$\forall z \in Z \exists m \in M : L_2(m, z).$$

3.

$$\exists z \in Z \exists m_1, m_2 \in M : m_1 \neq m_2 \wedge S(m_1, z) \wedge L_2(m_2, z).$$

3.5

1. Dokážeme sporem, že $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Předpokládejme, že $\sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Protože

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1,$$

platilo by také $\sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, a tedy $2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. To je spor s iracionalitou čísla $\sqrt{2}$.

Pro úplnost: kdyby $\sqrt{2} = n/m$ pro nesoudělná $n, m \in \mathbb{N}$, pak $n^2 = 2m^2$. Číslo n by bylo sudé, a následně také m , což je spor s jejich nesoudělností.

2. Necht'

$$S = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$$

a necht' $m \in \mathbb{N} \setminus S$. Ukážeme, že $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$. Rozložme

$$m = k_1^{j_1} k_2^{j_2} \cdots k_r^{j_r},$$

kde k_i jsou prvočísla. Protože m není čtverec, alespoň jeden exponent j_i je lichý. Kdyby $\sqrt{m} = p/q$ pro nesoudělná $p, q \in \mathbb{N}$, pak by $p^2/q^2 = m$. Exponent každého prvočísla v p^2 i q^2 je však sudý, což dává spor u prvočísla s lichým exponentem v rozkladu m .

3.6

Necht' $f: X \rightarrow Y$ a $A, B \subseteq Y$.

1. Dokážeme, že

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Pro $x \in X$ platí

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \vee f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

2. Dokážeme, že

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

Pro $x \in X$ platí

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \setminus B) &\iff f(x) \in A \wedge f(x) \notin B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

3.7

Necht' $A, B \subseteq X$.

1. Dokážeme De Morganův zákon

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Pro $x \in X$ platí

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cap B) &\iff x \in X \wedge \neg(x \in A \cap B) \\ &\iff x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\iff x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B). \end{aligned}$$

2. Obdobně

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),$$

protože

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cup B) &\iff x \in X \wedge \neg(x \in A \cup B) \\ &\iff (x \in X \setminus A) \wedge (x \in X \setminus B) \\ &\iff x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B). \end{aligned}$$

3.8

Nechť $f: X \rightarrow Y$ a $A, B \subseteq X$.

1. Platí

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

neboť

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= \{y \in Y : \exists x \in A \cup B, f(x) = y\} \\ &= \{y \in Y : (\exists x \in A, f(x) = y) \vee (\exists x \in B, f(x) = y)\} \\ &= f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

2. Obecně platí pouze

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Je-li $y \in f(A \cap B)$, existuje $x \in A \cap B$ takové, že $f(x) = y$. Odtud $y \in f(A)$ a zároveň $y \in f(B)$.

Opačná inkluze obecně neplatí. Například pro $f = \sin$, $A = [0, 2\pi]$ a $B = [4\pi, 6\pi]$ máme

$$A \cap B = \emptyset, \quad f(A \cap B) = \emptyset, \quad f(A) = f(B) = [-1, 1].$$

3. Platí

$$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B).$$

Jestliže $y \in f(A) \setminus f(B)$, pak existuje $x \in A$ s $f(x) = y$ a žádný prvek B se nezobrazuje na y . Proto $x \notin B$, tedy $x \in A \setminus B$ a $y \in f(A \setminus B)$.

Opačná inkluze obecně neplatí. Pro $f = \sin$, $A = [-2\pi, 2\pi]$ a $B = [0, 2\pi]$ je

$$A \setminus B = [-2\pi, 0), \quad f(A \setminus B) = [-1, 1],$$

zatímco

$$f(A) = f(B) = [-1, 1], \quad f(A) \setminus f(B) = \emptyset.$$