

Cvičení 4 – Suprema a infima

Řešení

V celém řešení používáme konvenci $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Suprema a infima chápeme jako reálná čísla; v případě že reálný horní (dolní) mez neexistuje píšeme, že příslušné supremum je ∞ (nebo infimum je $-\infty$).

Příklad 4.1

A. $A = [0, 1)$.

$$\inf A = 0, \quad \sup A = 1.$$

Supremum. Pro každé $x \in A$ platí $x < 1$, takže 1 je horní závora množiny A . Necht $t < 1$. Položme

$$x = \frac{t+1}{2}.$$

Jestliže $t < 0$, pak už $0 \in A$ a $0 > t$. Jestliže $0 \leq t < 1$, potom $t < x < 1$, tedy $x \in A$. V obou případech t není horní závora A . Proto je 1 nejmenší horní závora.

Infimum. Pro každé $x \in A$ platí $x \geq 0$, a navíc $0 \in A$. Číslo 0 je tedy minimum množiny A , a proto také její infimum. Maximum množina nemá, protože $1 \notin A$ a pro každé $x \in A$ platí $x < (x+1)/2 < 1$.

B. $B = \{-1/n; n \in \mathbb{N}\}$.

$$\inf B = -1, \quad \sup B = 0.$$

Infimum. Pro $n \geq 1$ je $-1/n \geq -1$ a pro $n = 1$ nastává rovnost. Tedy $-1 = \min B = \inf B$.

Supremum. Všechny prvky B jsou záporné, takže 0 je horní závora. Je-li $t < 0$, zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak velké, aby $n > 1/(-t)$. Potom

$$-\frac{1}{n} > t,$$

takže t není horní závora. Proto $\sup B = 0$. Maximum neexistuje, protože $0 \notin B$.

C.

$$C = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pro lichá n je člen $1 - 1/n \geq 0$ a pro sudá n je člen $1 + 1/n > 0$. Hodnoty 0 dosáhneme pro $n = 1$, takže $0 = \min C = \inf C$. Pro lichá n je člen menší než 1, zatímco pro sudá $n \geq 2$ platí

$$1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Pro $n = 2$ nastává rovnost. Proto

$$\inf C = \min C = 0, \quad \sup C = \max C = \frac{3}{2}.$$

D. $D = \{n^{(-1)^n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Všechny prvky D jsou kladné, tedy 0 je dolní závora. Necht $t > 0$. Zvolíme liché $n > 1/t$. Pak $n^{(-1)^n} = 1/n < t$, takže t není dolní závora. Proto $\inf D = 0$; minimum neexistuje, neboť $0 \notin D$.

Pro sudá n je $n^{(-1)^n} = n$. Ke každému $K \in \mathbb{R}$ lze zvolit sudé $n > K$, a pak je prvek $n \in D$ větší než K . Množina tedy není shora omezená. Tudíž

$$\inf D = 0, \quad \sup D = \infty.$$

E. $E = \{1/\sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < 1/\sqrt{n} \leq 1$ a pro $n = 1$ nastává na pravé straně rovnost. Proto $\sup E = \max E = 1$. Číslo 0 je dolní závora. Je-li $t > 0$, zvolíme $n > 1/t^2$; potom $1/\sqrt{n} < t$, takže t není dolní závora. Tedy

$$\inf E = 0, \quad \sup E = 1.$$

Minimum neexistuje, protože všechny prvky E jsou kladné.

F. $F = \{p/(p+q); p, q \in \mathbb{N}\}$.

Pro všechna $p, q \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < \frac{p}{p+q} < 1,$$

takže 0 je dolní a 1 horní závora.

Je-li $t < 1$, pak pro $t < 0$ je libovolný prvek F větší než t . Pro $0 \leq t < 1$ zvolíme $p \in \mathbb{N}$ tak, aby $p > t/(1-t)$, a položíme $q = 1$. Pak

$$\frac{p}{p+1} > t,$$

takže t není horní závora. Proto $\sup F = 1$.

Je-li $s > 0$, zvolíme $q \in \mathbb{N}$ tak, aby $q > 1/s - 1$, a položíme $p = 1$. Potom $1/(1+q) < s$, takže s není dolní závora. Proto

$$\inf F = 0, \quad \sup F = 1.$$

Množina nemá minimum ani maximum, protože nerovnosti $0 < p/(p+q) < 1$ jsou ostré.

G. $G = \{\sin x; x \in (0, 2\pi]\}$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, takže -1 a 1 jsou příslušné závory. Protože

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

a oba body patří do $(0, 2\pi]$, jsou obě závory dosaženy. Tedy

$$\inf G = \min G = -1, \quad \sup G = \max G = 1.$$

H. Protože

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x),$$

platí pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{2} \leq \sin x \cos x \leq \frac{1}{2}.$$

Horní závory je dosaženo například pro $x = \pi/4$ a dolní pro $x = 3\pi/4$. Proto

$$\inf H = \min H = -\frac{1}{2}, \quad \sup H = \max H = \frac{1}{2}.$$

I. $I = \{n^2 - m^2; n, m \in \mathbb{N}\}.$

Nechť $K \in \mathbb{R}$. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak velké, aby $n^2 - 1 > K$. Pro $m = 1$ pak dostaneme prvek $n^2 - 1 \in I$ větší než K , takže I není shora omezena. Dále zvolíme $m \in \mathbb{N}$ tak velké, aby $1 - m^2 < K$. Pro $n = 1$ je $1 - m^2 \in I$ menší než K , takže I není ani zdola omezena. Proto

$$\sup I = \infty \text{ a } \inf I = -\infty.$$

J. $J = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N}\}.$

Pro $n \geq 1$ platí $2^{-n} \leq 2^{-1}$ a $3^{-n} \leq 3^{-1}$, tedy

$$2^{-n} + 3^{-n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Pro $n = 1$ nastává rovnost, takže $\sup J = \max J = 5/6$.

Všechny prvky jsou kladné, takže 0 je dolní závora. Nechť $s > 0$. Navíc je $3^{-n} \leq 2^{-n}$ a tudíž je

$$2^{-n} + 3^{-n} \leq 2^{1-n}.$$

Chceme ukázat ze infimum je nula a tudíž necht $\epsilon > 0$ je dany. Zde je definována funkce $\log$. Zvolme

$$m := \left\lfloor \frac{\lfloor \log \epsilon^{-1} \rfloor + 2}{\log 2} + 2 \right\rfloor \in \mathbb{N}.$$

Pozorujme, že $m > \frac{\lfloor \log \epsilon^{-1} \rfloor + 2}{\log 2} + 1 =: \tilde{m} \in (0, \infty)$. Pak díky tomu, že funkce $\log$ a $\exp$ jsou rostoucí a díky tomu, že $2^{-x} = (2^x)^{-1} = e^{-x \log 2}$ platí

$$2^{1-m} \leq 2^{1-\tilde{m}} = e^{-[\log \epsilon^{-1}] + 1 - \log 2} < e^{\log \epsilon - \log 2} < \epsilon.$$

Tudíž vidíme, že ϵ není dolní mez. Nicméně $2^{-n}, 3^{-n} \geq 0$ a tudíž nula je dolní mezí a tudíž infimum.

K.

$$K = \{5^{(-1)^j 3^k}; j, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Všechny prvky jsou kladné, takže 0 je dolní závora. Nechť $\epsilon > 0$. Zvolíme liché j tvrdíme, že lze zvolit potom k tak velké, aby $5^{-3^k} < \epsilon$. Totiz stačí najít k takové že $-3^k < \frac{\log \epsilon}{\log 5}$, neboli

$$k \geq \frac{\log \left(\frac{\log \epsilon^{-1}}{\log 5} \right)}{\log 3}$$

a jelikož je pravá strana reálné číslo, toto lze díky Aristotlovu axiomu.

Nas prvek patří do K , a proto ϵ není dolní závora. Odtud $\inf K = 0$; minimum neexistuje.

Naopak, zvolíme-li sudé j , dostáváme prvky 5^{3^k} . Ke každému $R \in \mathbb{R}$ lze zvolit k tak velké, aby $5^{3^k} > R$. Podobně jako dříve stačí

$$k \geq \frac{\log \left(\frac{\log R}{\log 5} \right)}{\log 3}.$$

Množina K tedy není shora omezená. Proto

$$\inf K = 0, \quad \sup K = \infty.$$

L. $L = \{q \in \mathbb{Q}; q < \sqrt{3}\}.$

Z definice L plyne, že $\sqrt{3}$ je její horní závora. Ke každé k , najdeme prvek $t \in \mathbb{Q}$ takové ze $0 < \sqrt{3} - t < 2^{-k}$ tak, že vybereme největší z čísel $\{j2^{-k}; j \in \mathbb{N}, j2^{-k} < \sqrt{3}\}$. Množina je konečná a tudíž maximum existuje. Protože $2^{-k} < 1/k$ staci k libovolné ϵ zvolit $k := \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1$. Pak je $\sqrt{3} - t < 2^{-k} < 1/k < \epsilon$. Tudíž je každý horní mez větší než $\sqrt{3} - \epsilon$ pro každé $\epsilon > 0$ neboli $\sup L = \sqrt{3}$. Maximum neexistuje, neboť $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Ke každému $R \in \mathbb{R}$ lze zvolit $n \in \mathbb{N}$ tak velké, aby $-n < R$. Protože $-n \in L$, množina L není zdola omezená. Tedy

$$\sup L = \sqrt{3}, \quad \inf L \text{ v } \mathbb{R} \text{ neexistuje.}$$

Teoretický příklad 4.2

Předpokládejme, že A a B jsou neprázdné a omezené. Označme $s_A = \sup A$, $i_A = \inf A$, $s_B = \sup B$ a $i_B = \inf B$.

(1) Pro sjednocení platí přesně

$$\sup(A \cup B) = \max\{s_A, s_B\}, \quad \inf(A \cup B) = \min\{i_A, i_B\}.$$

Například $\max\{s_A, s_B\}$ je horní závora obou množin, a tedy i jejich sjednocení. Každá horní závora $A \cup B$ je současně horní závorou A i B , takže nemůže být menší než s_A ani než s_B . Důkaz pro infimum je obdobný.

(2) Průnik může být prázdný; potom jeho supremum je $-\infty$ a infimum je ∞ . Je-li $A \cap B \neq \emptyset$, pak

$$\max\{i_A, i_B\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{s_A, s_B\}.$$

Obecně nelze z pouhých čtyř čísel s_A, i_A, s_B, i_B určit přesné supremum a infimum průniku.

(3) Pro Minkowského součet platí

$$\sup(A + B) = s_A + s_B, \quad \inf(A + B) = i_A + i_B.$$

Skutečně, $a + b \leq s_A + s_B$ pro každé $a \in A$, $b \in B$. Navíc pro každé $\epsilon > 0$ existují $a \in A$ a $b \in B$ takové, že $a > s_A - \epsilon/2$ a $b > s_B - \epsilon/2$. Potom $a + b > s_A + s_B - \epsilon$, takže menší číslo už horní závorou být nemůže. Tvrzení o infimu se dokáže analogicky.

(4) Rozdíl $A \setminus B$ může být prázdný; (viz 2 v tomto případě). Je-li neprázdný, protože $A \setminus B \subset A$, platí pouze obecné odhady

$$i_A \leq \inf(A \setminus B) \leq \sup(A \setminus B) \leq s_A.$$

Ani čtyři čísla s_A, i_A, s_B, i_B výsledek neurčují. Například pro $A = [0, 2]$ mají množiny $B_1 = \{0, 2\}$ a $B_2 = \{0\} \cup [1, 2]$ stejné infimum 0 a supremum 2, ale

$$A \setminus B_1 = (0, 2), \quad A \setminus B_2 = (0, 1).$$

Teoretický příklad 4.3

Je-li f i g shora omezená, pak pro každé $x \in M$ platí

$$f(x) \leq \sup f(M), \quad g(x) \leq \sup g(M).$$

Sečtením dostaneme

$$(f + g)(x) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

Pravá strana je tedy horní závora množiny $(f + g)(M)$, a proto

$$\sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

Podobně, jsou-li f a g zdola omezené, pak pro každé $x \in M$

$$f(x) \geq \inf f(M), \quad g(x) \geq \inf g(M),$$

a tedy

$$\inf(f + g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M).$$

Obě nerovnosti mohou být ostré. Vezměme $M = \{0, 1\}$ a definujme

$$f(x) = x, \quad g(x) = 1 - x.$$

Potom $f + g \equiv 1$. Máme tedy

$$\sup(f + g)(M) = 1 < 2 = \sup f(M) + \sup g(M)$$

a zároveň

$$\inf(f + g)(M) = 1 > 0 = \inf f(M) + \inf g(M).$$

Důvodem je, že maxima funkcí f a g nastávají v různých bodech; totéž platí pro minima.

Teoretický příklad 4.4

- Tvrzení

$$\forall A \subset M : \quad f^{-1}(f(A)) = A$$

platí právě tehdy, když je f **prosté**.

Je-li f prosté a $x \in f^{-1}(f(A))$, pak $f(x) = f(a)$ pro nějaké $a \in A$; z prostoty plyne $x = a$, tedy $x \in A$. Opačná inkluze platí pro každé zobrazení. Naopak, platí-li rovnost pro všechna A , vezměme $x, y \in M$ s $f(x) = f(y)$. Pro $A = \{x\}$ máme $y \in f^{-1}(f(A)) = A$, a tedy $y = x$.

- Tvrzení

$$\forall B \subset L : \quad f(f^{-1}(B)) = B$$

platí právě tehdy, když je f **na**.

Pro každé zobrazení platí $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(M)$. Je-li f na, pak $f(M) = L$, takže dostáváme $B \cap L = B$. Naopak z rovnosti pro $B = L$ plyne $f(M) = L$, což je právě surjektivita.