

5. Mohutnost množin – řešení

Budeme říkat, že množina je *spočetná*, má-li mohutnost nejvýše $\aleph_0$; konečné množiny jsou tedy také spočetné. Množinu všech podmnožin množiny X značíme $\mathcal{P}(X)$. Dále

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}|, \quad \mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

Opakovaně použijeme Cantorovu–Bernsteinovu větu: existují-li injekce $A \rightarrow B$ a $B \rightarrow A$, pak existuje bijekce $A \rightarrow B$.

Příklad 5.1

Porovnáme mohutnosti všech uvedených množin.

- (1) Množina $\mathbb{N}$ je podle definice spočetně nekonečná, tedy

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

- (2) Množina $\mathbb{Z}$ je spočetně nekonečná. Například posloupnost

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

obsahuje každý prvek $\mathbb{Z}$ právě jednou, a určuje tedy bijekci $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$. Proto $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

- (3) Každé $q \in \mathbb{Q}$ lze právě jedním způsobem zapsat jako $q = p/r$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$ a $\gcd(|p|, r) = 1$. Zobrazení

$$q \mapsto (p, r)$$

je proto injekce $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Součin dvou spočetných množin je spočetný (dvojice lze například seřadit podle $|p|+r$), takže $\mathbb{Q}$ je spočetná. Jelikož $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, je zároveň nekonečná. Tedy

$$|\mathbb{Q}| = \aleph_0.$$

- (4) Každé podmnožině $A \subset \mathbb{N}$ přiřadíme její charakteristickou posloupnost $(\mathbf{1}_A(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Dostáváme bijekci

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \longleftrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Cantorova věta dává $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$. Níže současně ukážeme, že $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

Nejprve tvrdíme, že je zobrazení

$$A \mapsto \sum_{n \in A} \frac{1}{10^n} \approx 0.000110010110101 \dots \quad (\text{dame jedničky tam kde prvek je})$$

prostě $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$. Odhadneme totiž

$$\sum_{n=k}^{k+M} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^k} \sum_{n=0}^M \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^k} \frac{1 - 10^{-M-1}}{1 - 1/10} < \frac{1}{9} \cdot 10^{1-k},$$

neboli jakmile dve posloupnosti lisi v jednom clenu, tak ani cely zbytek clenu nema sancí dohnat pocet. Tudiz jakmile dve posloupnosti lisi, tak se lisi i soucet vyssi rady.

Opačným směrem zvolme očíslování $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ a poloźme

$$x \mapsto \{n \in \mathbb{N} : q_n < x\}.$$

Toto zobrazení $[0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ je injektivní, protože mezi dvěma různými reálnými čísly leží racionální číslo. Cantorova–Bernsteinova věta tedy dává $|[0, 1]| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Jelikož $(0, 1)$ je bijektivní s $\mathbb{R}$ (například pomocí vhodně posunuté a přeskálované funkce $\tan$), dostáváme

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

- (5) Z předchozího bodu plyne $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Podle Cantorovy věty je mocninná množina vždy ostře větší než původní množina, a proto

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|.$$

- (6) Všechny čtyři intervaly mají mohutnost $\mathfrak{c}$. Pro otevřený interval máme například bijekci

$$x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x \quad \text{z } \mathbb{R} \text{ na } (0, 1).$$

Inkluze $(0, 1) \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$ a $(0, 1) \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$ spolu s Cantorovou–Bernsteinovou větou dávají

$$|[0, 1]| = |(0, 1)| = |[0, 1]| = \mathfrak{c}.$$

Konečně $[0, 1] \hookrightarrow [0, 1]^2$, $x \mapsto (x, 0)$. Naopak z již dokázané ekvivalence $[0, 1] \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dostáváme injekci

$$[0, 1]^2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad (A, B) \mapsto \{2n : n \in A\} \cup \{2n + 1 : n \in B\}.$$

Proto opět podle Cantorovy–Bernsteinovy věty

$$|[0, 1]^2| = \mathfrak{c}.$$

- (7) Množina $P_{0-9} = \{0, 1, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$ všech nekonečných desítkových posloupností má mohutnost $\mathfrak{c}$. Injekce $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow P_{0-9}$ je inkluze. Pro opačný směr zakódujeme každou cifru čtyřmi bity (například její binární reprezentaci doplněnou zleva nulami) a bloky za sebou spojíme. Tak vznikne injekce $P_{0-9} \hookrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Tedy

$$|P_{0-9}| = \mathfrak{c}.$$

- (8) Pro množinu $P_{01} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jsme již sestrojili bijekci s $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ pomocí charakteristických funkcí. Proto

$$|P_{01}| = \mathfrak{c}.$$

- (9) Necht K je množina všech konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ označme

$$K_k = \{A \subset \mathbb{N} : |A| = k\}.$$

Množina K_k je spočetná, protože zobrazení

$$\{a_1 < \dots < a_k\} \mapsto (a_1, \dots, a_k)$$

je injekcí $K_k \rightarrow \mathbb{N}^k$ a konečná kartézská mocnina $\mathbb{N}^k$ je spočetná. Jelikož

$$K = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_k,$$

je K spočetná jako spočetné sjednocení spočetných množin. Zároveň je nekonečná, neboť obsahuje všechny jednoprvkové množiny $\{n\}$. Tedy

$$|K| = \aleph_0.$$

Souhrnně:

$$\begin{aligned} |\mathbb{N}| &= |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |K| = \aleph_0, \\ |\mathcal{P}(\mathbb{N})| &= |\mathbb{R}| = |[0, 1]| = \mathfrak{c}, \\ |(0, 1)| &= |[0, 1)| = |[0, 1]^2| = \mathfrak{c}, \\ |P_{0-9}| &= |P_{01}| = \mathfrak{c}, \\ |\mathcal{P}(\mathbb{R})| &= 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} > \aleph_0. \end{aligned}$$

Příklad 5.2

Pracujeme v obvyklém rámci ZFC. Zejména v bodech (2) a (4) používáme příslušnou slabou formu axiomu výběru.

- (1) Necht $A \subset X$ a X je spočetná. Je-li X konečná, je konečná i A . Jinak existuje surjekce $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Pro $a \in A$ definujeme

$$m(a) = \min\{n \in \mathbb{N} : f(n) = a\}.$$

Minimum existuje díky dobrému uspořádání $\mathbb{N}$. Jestliže $a \neq b$, pak $m(a) \neq m(b)$, takže $m : A \rightarrow \mathbb{N}$ je injekce. Tedy A je spočetná.

- (2) Necht $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost spočetných množin. Pro každé neprázdné A_n zvolme surjekci $f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$. Potom zobrazení

$$F : \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 : A_n \neq \emptyset\} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad F(n, k) = f_n(k),$$

je surjektivní. Jeho definiční obor je podmnožinou spočetné množiny $\mathbb{N}^2$, a je tedy spočetný podle bodu (1). Obraz spočetné množiny je spočetný (viz následující bod), takže $\bigcup_n A_n$ je spočetná.

Volba surjekcí f_n pro všechna n je právě místem, kde se v obecnosti používá axiom spočetného výběru. V ZF bez jakékoliv formy axiomu výběru tvrzení obecně dokazatelné není.

- (3) Necht A je spočetná a $f : A \rightarrow Y$. Je-li A konečná, je konečný i obraz $f(A)$. Je-li A nekonečná, existuje surjekce $g : \mathbb{N} \rightarrow A$. Složení

$$f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow f(A)$$

je surjektivní, a proto je $f(A)$ spočetná.

- (4) Necht X je nekonečná. Rekurzivně zvolíme prvky $x_n \in X$ tak, aby byly navzájem různé. Zvolíme $x_1 \in X$. Jsou-li již zvoleny $x_1, \dots, x_n$, je množina

$$X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$$

neprázdná, neboť jinak by X byla konečná; z ní zvolíme x_{n+1} . Zobrazení $n \mapsto x_n$ je injekce $\mathbb{N} \rightarrow X$, takže $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná spočetná podmnožina X .

Tento rekurzivní výběr používá axiom závislého výběru (stačí i vhodná slabší forma axiomu výběru). Bez axiomu výběru může v ZF existovat nekonečná množina, která nemá žádnou spočetně nekonečnou podmnožinu.

Těžký příklad 5.3

Označme $2^{<\mathbb{N}}$ množinu všech konečných posloupností nul a jedniček. Je spočetná, protože

$$2^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{0, 1\}^n$$

je spočetným sjednocením konečných množin. Zvolme tedy injekci $e : 2^{<\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ (dokonce lze zvolit bijekci).

Pro každou nekonečnou binární posloupnost $x = (x_1, x_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definujme

$$A_x = \{e(x \upharpoonright n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N},$$

kde $x \upharpoonright n = (x_1, \dots, x_n)$ je počáteční úsek délky n . Každá množina A_x je nekonečná, protože počáteční úseky různých délek jsou různé a e je injektivní.

Jsou-li $x \neq y$, existuje nejmenší index k , pro který $x_k \neq y_k$. Pro každé $n \geq k$ jsou počáteční úseky $x \upharpoonright n$ a $y \upharpoonright n$ různé. Navíc počáteční úseky různých délek se také nemohou rovnat. Z injektivit e proto plyne

$$A_x \cap A_y = \{e(x \upharpoonright n) : 1 \leq n < k\},$$

a tento průnik je konečný (má nejvýše $k - 1$ prvků).

Zobrazení $x \mapsto A_x$ je injektivní: kdyby $x \neq y$, zvolíme první index k , kde se liší; například každý počáteční úsek x délky $n \geq k$ dává prvek A_x , který neleží v A_y . Rodina

$$\mathcal{A} = \{A_x : x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\}$$

má tudíž mohutnost $|\mathcal{A}| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$, je tedy nespočetná, a každé její dva různé členy mají pouze konečný průnik. To je požadovaná konstrukce.