

Cvičení 6: Škála funkcí a limita posloupnosti podle definice řešení

Definice a základní postup

Pro posloupnost (a_n) a číslo $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Podobně

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \iff \forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > K.$$

V důkazu vlastní limity nejprve pro libovolné $\varepsilon > 0$ hledáme podmínku na n , potom zvolíme konkrétní n_0 a *ověříme*, že podmínka platí pro všechna $n \geq n_0$. Předpokládáme $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Příklad 6.1: Škála funkcí

Pro kladné posloupnosti definujeme

$$a_n \ll b_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Nechť $0 < p < q$ a $0 < \alpha < \beta$. Dokážeme

$$1 \ll (\ln n)^p \ll (\ln n)^q \ll n^p \ll n^q \ll e^{\alpha n} \ll e^{\beta n} \ll n! \ll n^n.$$

1. $1 \ll (\ln n)^p$

Je třeba ukázat $1/(\ln n)^p \rightarrow 0$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pro $n > 1$ platí

$$\frac{1}{(\ln n)^p} < \varepsilon \iff \ln n > \varepsilon^{-1/p} \iff n > e^{\varepsilon^{-1/p}}.$$

Volíme $n_0 = \lfloor e^{\varepsilon^{-1/p}} \rfloor + 1$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí požadovaná nerovnost.

2. $(\ln n)^p \ll (\ln n)^q$

Protože $q - p > 0$, máme pro $n > 1$

$$\frac{(\ln n)^p}{(\ln n)^q} = \frac{1}{(\ln n)^{q-p}} \rightarrow 0$$

na základě předchozího kroku s exponentem $q - p$.

3. $(\ln n)^q \ll n^p$

Ukážeme obecnější tvrzení: pro každá $p, q > 0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^q}{n^p} = 0.$$

Položme $t = \ln n$; potom $t \rightarrow +\infty$ a $n^p = e^{pt}$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$ tak, aby $m > q$. Pro $t \geq 0$ máme

$$e^{pt} \geq \frac{(pt)^m}{m!},$$

například z mocninného rozvoje exponenciály. Proto pro $t > 0$

$$0 \leq \frac{t^q}{e^{pt}} \leq \frac{m!}{p^m} \frac{1}{t^{m-q}} \rightarrow 0.$$

Věta o dvou policaitech dokazuje požadovanou limitu. *Poznámka:* Pokud dosud nebyl odůvodněn použitý odhad exponenciály, lze toto tvrzení využít až po jeho důkazu na přednášce.

4. $n^p \ll n^q$

Přímo

$$\frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}} \rightarrow 0,$$

protože $q - p > 0$.

5. $n^q \ll e^{\alpha n}$

Zvolíme celé $m > q$. Potom

$$0 \leq \frac{n^q}{e^{\alpha n}} \leq \frac{m!}{\alpha^m} \frac{1}{n^{m-q}} \rightarrow 0.$$

6. $e^{\alpha n} \ll e^{\beta n}$

Protože $\beta - \alpha > 0$,

$$\frac{e^{\alpha n}}{e^{\beta n}} = e^{-(\beta - \alpha)n} \rightarrow 0.$$

7. $e^{\beta n} \ll n!$

Označme $a_n = e^{\beta n}/n!$. Potom

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^\beta}{n+1}.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ dost velké, aby pro každé $n \geq n_0$ platilo $e^\beta/(n+1) \leq 1/2$; stačí například $n_0 = \lceil 2e^\beta \rceil$. Tedy $a_{n+1} \leq a_n/2$ a indukci

$$0 < a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{2^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Pravá strana konverguje k nule, a proto $a_n \rightarrow 0$.

8. $n! \ll n^n$

Pro $n \geq 2$ platí $k \leq n/2$ u prvních $\lfloor n/2 \rfloor$ činitelů součinu $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. U zbývajících činitelů platí $k \leq n$. Dostáváme

$$n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor} n^{n-\lfloor n/2 \rfloor}, \quad 0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq 2^{-\lfloor n/2 \rfloor} \rightarrow 0.$$

Tím je první škála dokázána.

Převrácená škála

Jestliže jsou $a_n, b_n > 0$ a $a_n \ll b_n$, pak

$$\frac{1/b_n}{1/a_n} = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0, \quad \text{tedy} \quad \frac{1}{b_n} \ll \frac{1}{a_n}.$$

Obrácením pořadí a převrácením jednotlivých členů dostáváme

$$n^{-n} \ll \frac{1}{n!} \ll e^{-\beta n} \ll e^{-\alpha n} \ll n^{-q} \ll n^{-p} \ll (\ln n)^{-q} \ll (\ln n)^{-p} \ll 1.$$

Jednotlivé limity uvedené v zadání

1. Pro $k > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/k} = +\infty$. Pro $K > 0$ volíme $n_0 = \lfloor K^k \rfloor + 1$ a pro $K \leq 0$ postačí $n_0 = 1$.
2. Pro $p > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n/n^p = 0$ (krok 3 s $q = 1$).
3. Pro $a > 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} n/a^n = 0$ (krok 5 s $q = 1$ a $\alpha = \ln a$).
4. Pro $p > 0$, $a > 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p/a^n = 0$ (krok 5).
5. Pro $b > a > 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n/b^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a/b)^n = 0$.
6. Pro $a > 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n/n! = 0$ (krok 7 s $\beta = \ln a$).
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/n^n = 0$ (krok 8).
8. Pro $p > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^p = 0$: pro $\varepsilon > 0$ volíme $n_0 = \lfloor \varepsilon^{-1/p} \rfloor + 1$.
9. Pro $k > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} = 1$. Je-li $k = 1$, tvrzení je zřejmé. Je-li $k > 1$, položme $c_n = k^{1/n} - 1 > 0$. Bernoulliho nerovnost dává

$$k = (1 + c_n)^n \geq 1 + nc_n, \quad 0 < c_n \leq \frac{k-1}{n} \rightarrow 0.$$

Tedy $k^{1/n} = 1 + c_n \rightarrow 1$. Pro $0 < k < 1$ položíme $b = 1/k > 1$; pak $k^{1/n} = 1/b^{1/n} \rightarrow 1$.

10. Poslední uvedená limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n/n^p = 0$ je shodná s bodem 2.

Příklad 6.1: Škála funkcí

Pro kladné posloupnosti definujeme

$$a_n \ll b_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Nechť $0 < p < q$ a $0 < \alpha < \beta$. Dokážeme

$$1 \ll (\ln n)^p \ll (\ln n)^q \ll n^p \ll n^q \ll e^{\alpha n} \ll e^{\beta n} \ll n! \ll n^n.$$

Nejjednodušší kroky: 1, 2 a 4

Krok 1: $1 \ll (\ln n)^p$. Necht' $\varepsilon > 0$. Pro $n > 1$ jsou podmínky

$$\frac{1}{(\ln n)^p} < \varepsilon \iff \ln n > \varepsilon^{-1/p} \iff n > e^{\varepsilon^{-1/p}}$$

ekvivalentní. Položíme $n_0 = \lfloor e^{\varepsilon^{-1/p}} \rfloor + 1$. Pro všechna $n \geq n_0$ pak první nerovnost platí.

Krok 2: $(\ln n)^p \ll (\ln n)^q$. Protože $q - p > 0$, máme pro $n > 1$

$$\frac{(\ln n)^p}{(\ln n)^q} = \frac{1}{(\ln n)^{q-p}} \rightarrow 0$$

podle prvního kroku.

Krok 4: $n^p \ll n^q$. Protože $q - p > 0$, platí

$$\frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}} \rightarrow 0.$$

Například pro libovolné $\varepsilon > 0$ stačí zvolit $n_0 = \lfloor \varepsilon^{-1/(q-p)} \rfloor + 1$.

Krok 5 před krokem 3: $n^q \ll e^{\alpha n}$

Ukážeme dokonce, že pro libovolná $r > 0$ a $\lambda > 0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^r}{e^{\lambda n}} = 0.$$

Budeme postupovat *od jednoduchého ke složitějšímu*.

Nejprve dokážeme $n/e^{\lambda n} \rightarrow 0$. Protože $e^\lambda > 1$, můžeme psát $e^\lambda = 1 + \delta$ pro jisté $\delta > 0$. Z binomické věty pro $n \geq 2$ dostáváme

$$e^{\lambda n} = (1 + \delta)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \delta^j \geq 1 + n\delta + \binom{n}{2} \delta^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} \delta^2.$$

Všimněme si, že *lineární* člen $n\delta$ zde nestačí: po vydělení n by poskytl jen konstantní horní odhad. Rozhodující je *kvadratický* člen. Proto pro $n \geq 2$

$$0 \leq \frac{n}{e^{\lambda n}} \leq \frac{2}{\delta^2(n-1)} \rightarrow 0.$$

Pro úplnost lze poslední limitu ověřit přímo: při $\varepsilon > 0$ stačí vzít $n_0 = \max\{2, \lfloor 1 + 2/(\delta^2 \varepsilon) \rfloor + 1\}$.

Potom přejdeme k libovolné mocnině n^r . Zvolme $m \in \mathbb{N}$ s $m \geq r$ a položíme $\mu = \lambda/m > 0$. Pro $n \geq 1$ je

$$0 \leq \frac{n^r}{e^{\lambda n}} \leq \frac{n^m}{e^{\lambda n}} = \left(\frac{n}{e^{\mu n}} \right)^m \rightarrow 0.$$

Poslední konvergence plyne z již dokázaného výsledku pro lineární mocninu a z věty o limitě součinu. Volbou $r = q$ a $\lambda = \alpha$ máme požadovaný **krok 5**.

Krok 3: $(\ln n)^q \ll n^p$ — nyní pomocí kroku 5

Zde nejdříve dokážeme jednodušší tvrzení

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^s} = 0 \quad \text{pro každé } s > 0.$$

To provedeme porovnáním n s mocninami čísla e , jak naznačuje postup na fotografii. Pro každé celé $n \geq 2$ existuje celé $k \geq 0$ takové, že

$$e^k \leq n < e^{k+1}; \quad \text{například } k = \lfloor \ln n \rfloor.$$

Odtud $k \leq \ln n < k+1$ a $n^s \geq e^{sk}$, tedy

$$0 \leq \frac{\ln n}{n^s} \leq \frac{k+1}{e^{sk}}.$$

Když $n \rightarrow \infty$, pak také $k = \lfloor \ln n \rfloor \rightarrow \infty$. Pravá strana má limitu nula: podle již dokázaného kroku 5 (pro lineární mocninu a parametr s) platí

$$\frac{k+1}{e^{sk}} = \frac{k}{e^{sk}} + \frac{1}{e^{sk}} \rightarrow 0.$$

Z věty o dvou polícajtech tedy $\ln n/n^s \rightarrow 0$.

Nyní vezměme libovolná $p, q > 0$ a položíme $s = p/q > 0$. Dostáváme

$$\frac{(\ln n)^q}{n^p} = \left(\frac{\ln n}{n^{p/q}} \right)^q \rightarrow 0.$$

Tím je **krok 3** dokázán, aniž bychom použili Taylorův rozvoj či derivaci exponenciální funkce.

6. $e^{\alpha n} \ll e^{\beta n}$

Protože $\beta - \alpha > 0$,

$$\frac{e^{\alpha n}}{e^{\beta n}} = e^{-(\beta-\alpha)n} \rightarrow 0.$$

7. $e^{\beta n} \ll n!$

Označme $a_n = e^{\beta n}/n!$. Potom

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^\beta}{n+1}.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ dost velké, aby pro každé $n \geq n_0$ platilo $e^\beta/(n+1) \leq 1/2$; stačí například $n_0 = \lceil 2e^\beta \rceil$. Tedy $a_{n+1} \leq a_n/2$ a indukcí

$$0 < a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{2^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Pravá strana konverguje k nule, a proto $a_n \rightarrow 0$.

8. $n! \ll n^n$

Pro $n \geq 2$ platí $k \leq n/2$ u prvních $\lfloor n/2 \rfloor$ činitelů součinu $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. U zbývajících činitelů platí $k \leq n$. Dostáváme

$$n! \leq \left(\frac{n}{2} \right)^{\lfloor n/2 \rfloor} n^{n-\lfloor n/2 \rfloor}, \quad 0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq 2^{-\lfloor n/2 \rfloor} \rightarrow 0.$$

Tím je první škála dokázána.

Převrácená škála

Jestliže jsou $a_n, b_n > 0$ a $a_n \ll b_n$, pak

$$\frac{1/b_n}{1/a_n} = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0, \quad \text{tedy} \quad \frac{1}{b_n} \ll \frac{1}{a_n}.$$

Obrácením pořadí a převrácením jednotlivých členů dostáváme

$$n^{-n} \ll \frac{1}{n!} \ll e^{-\beta n} \ll e^{-\alpha n} \ll n^{-q} \ll n^{-p} \ll (\ln n)^{-q} \ll (\ln n)^{-p} \ll 1.$$

Příklad 6.2: $n \rightarrow +\infty$

Pro $K = 10, 100, 1000, 10000$ je nejmenší přípustné n postupně 11, 101, 1001, 10001.

Důkaz podle definice. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Zvolme

$$n_0 = \max\{1, \lfloor K \rfloor + 1\}.$$

Pro každé $n \geq n_0$ platí

$$n \geq n_0 \geq \lfloor K \rfloor + 1 > K.$$

Proto $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.

Pozor: Nestačí, že posloupnost nabývá libovolně velkých hodnot. Definice požaduje, aby *všechny* členy od jistého indexu překročily K .

Příklad 6.3: $n^2 \rightarrow +\infty$

Pro $K = 10, 400, 1600$ je nejmenší přípustné n postupně 4, 21, 41.

Přímý důkaz. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Volíme

$$n_0 = \begin{cases} 1, & K < 0, \\ \lfloor \sqrt{K} \rfloor + 1, & K \geq 0. \end{cases}$$

Pro $n \geq n_0$ máme v případě $K < 0$ nerovnost $n^2 \geq 1 > K$. V případě $K \geq 0$ platí $n > \sqrt{K}$, a tudíž $n^2 > K$. To dokazuje $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$.

Druhý důkaz. Pro $n \geq 1$ platí $n^2 \geq n$. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ najdeme podle předchozího příkladu n_0 takové, že $n > K$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak $n^2 \geq n > K$. Tedy opět $n^2 \rightarrow +\infty$.

Příklad 6.4: $\frac{13}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$

Nejprve ověříme, že posloupnost je klesající:

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} > 0 \quad \implies \quad \frac{13}{\sqrt{n+1}} < \frac{13}{\sqrt{n}}.$$

Samotná monotonie ještě nestačí k určení hodnoty limity.

Důkaz podle definice. Nechť $\varepsilon > 0$. Pro $n \geq 1$ jsou následující nerovnosti ekvivalentní:

$$\frac{13}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff 13 < \varepsilon \sqrt{n} \iff \frac{13}{\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \frac{169}{\varepsilon^2} < n.$$

Zvolme

$$n_0 = \lfloor \frac{169}{\varepsilon^2} \rfloor + 1.$$

Jestliže $n \geq n_0$, pak $n > 169/\varepsilon^2$, a tedy

$$\left| \frac{13}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{13}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Proto $\lim_{n \rightarrow \infty} 13/\sqrt{n} = 0$.

Příklad 6.5: $\frac{10n^4+7n^3}{10n^8} \rightarrow 0$

Pro $n \geq 1$ platí $7n^3 \leq 10n^4$, a proto

$$0 < \frac{10n^4 + 7n^3}{10n^8} \leq \frac{20n^4}{10n^8} = \frac{2}{n^4}.$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Nerovnost $2/n^4 < \varepsilon$ platí, jakmile $n > (2/\varepsilon)^{1/4}$. Volíme tedy

$$n_0 = \lfloor (2/\varepsilon)^{1/4} \rfloor + 1.$$

Pro všechna $n \geq n_0$ pak

$$\left| \frac{10n^4 + 7n^3}{10n^8} - 0 \right| \leq \frac{2}{n^4} < \varepsilon.$$

Tím je dokázána požadovaná limita.

Jiný odhad:

$$\frac{10n^4 + 7n^3}{10n^8} = \frac{1}{n^4} + \frac{7}{10n^5} \leq \frac{17}{10n^4} < \frac{2}{n^4}.$$

Doplňující příklady ze strany 7

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n \sin(n^2)}{n^2}$

Platí

$$\frac{n^3 + n \sin(n^2)}{n^2} = n + \frac{\sin(n^2)}{n} \geq n - \frac{1}{n} \geq n - 1.$$

Nechť $K \in \mathbb{R}$. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $n_0 > K + 1$. Pro všechna $n \geq n_0$ je výraz alespoň $n - 1 > K$. Proto limita je $\boxed{+\infty}$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{4^n}$

Z Bernoulliovy nerovnosti

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3}.$$

Tedy

$$0 < \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{3}{n+3} \rightarrow 0.$$

Limita je $\boxed{0}$.

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n^2}}{4^n}$$

Pro $n \geq 2$ je $3^n/4 \geq 9/4 > 2$, a tedy

$$\frac{3^{n^2}}{4^n} = \left(\frac{3^n}{4}\right)^n \geq 2^n \geq 1 + n \longrightarrow +\infty.$$

Limita je $\boxed{+\infty}$.

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{200} + n^{10}}{(n-1)^{199}}$$

Pro $n \geq 2$ platí

$$\frac{(n+1)^{200} + n^{10}}{(n-1)^{199}} \geq (n+1) \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{199} \geq n+1 \longrightarrow +\infty.$$

Limita je $\boxed{+\infty}$.

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\cos n}$$

Tato limita *neexistuje*. Pouhý odhad $|n/\cos n| \geq n$ nestačí: znaménko $\cos n$ se mění.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nechť $p_k \in \mathbb{N}$ je celé číslo nejbližší $2k\pi$ a $q_k \in \mathbb{N}$ celé číslo nejbližší $(2k+1)\pi$. Potom

$$|p_k - 2k\pi| \leq \frac{1}{2}, \quad |q_k - (2k+1)\pi| \leq \frac{1}{2}.$$

Protože $1/2 < \pi/2$,

$$\cos p_k \geq \cos(1/2) > 0, \quad \cos q_k \leq -\cos(1/2) < 0.$$

Navíc $p_k, q_k \rightarrow +\infty$. Proto

$$\frac{p_k}{\cos p_k} \geq p_k \rightarrow +\infty, \quad \frac{q_k}{\cos q_k} \leq -q_k \rightarrow -\infty.$$

Jsou to dvě podposloupnosti s neslučitelným limitním chováním; původní posloupnost nemá ani vlastní, ani nevlastní limitu. Výrazy jsou definovány: $\cos n = 0$ by vyžadovalo $n = \pi/2 + j\pi$, což pro celé n není možné.

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\cos^2 n}$$

Protože $0 < \cos^2 n \leq 1$, dostáváme

$$\frac{n}{\cos^2 n} \geq n \longrightarrow +\infty.$$

Limita je $\boxed{+\infty}$.

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/4}$$

Nechť $K \in \mathbb{R}$. Pro $K \leq 0$ stačí $n_0 = 1$. Pro $K > 0$ položme $n_0 = \lfloor K^4 \rfloor + 1$. Pak pro $n \geq n_0$ máme $n > K^4$, a tedy $n^{1/4} > K$. Limita je $\boxed{+\infty}$.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!}$

Pro $n \geq 6$ máme

$$n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3),$$

a protože $n-1, n-2, n-3 \geq n/2$,

$$0 < \frac{n^2}{n!} \leq \frac{n}{(n-1)(n-2)(n-3)} \leq \frac{8}{n^2} \rightarrow 0.$$

Limita je $\boxed{0}$.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n^2 + \pi^2 n + \pi^3}{en^2 - \pi^2 n}$

Vydělíme čitatele i jmenovatele n^2 :

$$\frac{\pi + \pi^2/n + \pi^3/n^2}{e - \pi^2/n} \rightarrow \frac{\pi}{e}.$$

Použili jsme větu o limitě součtu a podílu, přičemž $e \neq 0$. Limita je $\boxed{\pi/e}$.

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$

Pro $n \geq 2$ z binomické věty plyne

$$2^n = (1+1)^n \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

a tedy

$$0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{2}{n-1} \rightarrow 0.$$

Limita je $\boxed{0}$.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n^2)!}$

Pro $n \geq 2$ platí

$$(n^2)! = n!(n+1)(n+2) \cdots (n^2),$$

a proto

$$0 < \frac{n!}{(n^2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n^2)} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Limita je $\boxed{0}$.