

7. Limita posloupnosti reálných čísel

Používáme věty o aritmetice limit, větu o dvou polícajtech a známé limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c^{1/n} = 1 \quad (c > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k/n} = 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Při dělení limit je vždy třeba ověřit, že limita jmenovatele je nenulová.

Příklad 7.1

(1) Vydělíme čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou n^3 :

$$\frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3}}.$$

Čítec konverguje k 0 a jmenovatel k $1 \neq 0$, tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1} = 0.$$

(2) Obdobně

$$\frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1} = \frac{2 + \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^5}}{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^5}}.$$

Jmenovatel na pravé straně konverguje k 1, a proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1} = 2.$$

(3) Po vydělení n^3 dostáváme

$$\frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7} = \frac{2 + \frac{6}{n^2}}{1 - \frac{7}{n^2} + \frac{7}{n^3}}.$$

Jmenovatel opět konverguje k $1 \neq 0$, takže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7} = 2.$$

Příklad 7.2

Použijeme vzorce

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

(1) Nejdříve výraz přesně upravíme:

$$\begin{aligned}\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} &= \frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{n(n+1) - n(n+2)}{2(n+2)} = -\frac{n}{2(n+2)}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

(2) Máme

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}.$$

Proto

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

(3) Podobně

$$\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4} = \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2,$$

a tedy

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

Příklad 7.3

(1) Vytkneme z odmocniny 4^n :

$$\sqrt[n]{2^n+4^n} = 4 \sqrt[n]{1+2^{-n}}.$$

Protože $1 \leq 1+2^{-n} \leq 2$, platí

$$1 \leq \sqrt[n]{1+2^{-n}} \leq 2^{1/n} \rightarrow 1.$$

Z věty o dvou policajtech tedy plyne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n+4^n} = 4.}$$

(2) Všechny členy jsou nezáporné a $n^6 + n! \geq n!$, tudíž

$$0 \leq \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!} \leq \frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!}.$$

Pro $u_n = 3^n/n!$ platí $u_{n+1}/u_n = 3/(n+1) \leq 1/2$ pro $n \geq 5$; tedy $0 \leq u_n \leq u_5(1/2)^{n-5} \rightarrow 0$. Pro druhý člen, je-li $n \geq 10$, platí

$$\frac{n^5}{n!} = \frac{n^5}{1 \cdot 2 \cdots n} \leq \frac{n^5}{(\frac{n}{2})^{n/2}},$$

neboť posledních alespoň $n/2$ činitelů faktoriálu je nejméně $n/2$; Položíme-li pravou stranu rovnu v_n , pak

$$\sqrt[n]{v_n} = \frac{n^{5/n}}{\sqrt[n]{n/2}} \rightarrow 0.$$

Od jistého indexu je tedy $\sqrt[n]{v_n} \leq 1/2$, a tudíž $0 \leq v_n \leq 2^{-n} \rightarrow 0$. Z věty o dvou policajtech dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!} = 0.$$

(3) Pro $|a| < 1$ platí geometrický vzorec

$$1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \rightarrow \frac{1}{1 - a}.$$

Analogicky $1 + b + \dots + b^n \rightarrow 1/(1 - b)$. Protože $|b| < 1$, je $1/(1 - b) \neq 0$, takže lze použít větu o limitě podílu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n} = \frac{1 - b}{1 - a}.$$

(4) Binomická věta dává pro pevná $r, s \in \mathbb{R}$

$$(n + r)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} r^j = n^{100} + 100r n^{99} + O(n^{98}).$$

Odečtením příslušných rozvoje dostaneme

$$\begin{aligned} (n + 4)^{100} - (n + 3)^{100} &= 100n^{99} + O(n^{98}), \\ (n + 2)^{100} - n^{100} &= 200n^{99} + O(n^{98}). \end{aligned}$$

Po vydělení čitatele i jmenovatele n^{99} tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 4)^{100} - (n + 3)^{100}}{(n + 2)^{100} - n^{100}} = \frac{1}{2}.$$

Zápis $O(n^{98})$ zde není pouhá heuristika: z binomické věty je zbytek $\sum_{j=0}^{98} \binom{100}{j} n^{100-j} r^j$ konečným součtem členů $c_j n^j$ s $j \leq 98$, takže po vydělení n^{99} skutečně konverguje k nule.

(5) Položme

$$M_n = \max\{n^2, n^3, n^4, 2^n, 3^n, 4^n\}.$$

Pro součet šesti nezáporných čísel platí

$$M_n \leq n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n \leq 6M_n.$$

Pro dostatečně velká n je $M_n = 4^n$: totiž $2^n, 3^n \leq 4^n$ a $n^k/4^n \rightarrow 0$ pro $k = 2, 3, 4$. Proto pro všechna dostatečně velká n

$$4 \leq \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} \leq 4 \sqrt[n]{6}.$$

Jelikož $6^{1/n} \rightarrow 1$, dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} = 4.$$

(6) Nejprve přesně zjednodušíme oba výrazy v hranatých závorkách:

$$\begin{aligned}(n+2)^2 - (n+1)^2 &= 2n+3, \\ (n+1)^3 - n^3 - 3n^2 &= 3n+1.\end{aligned}$$

Proto je daný výraz roven

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n+1)^{n-1}}} &= \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^n (2n+3)(3n+1)} \\ &= \frac{2n+3}{3n+1} \sqrt[n]{(2n+3)(3n+1)}.\end{aligned}$$

První faktor konverguje k $2/3$. Pro druhý faktor platí

$$\sqrt[n]{(2n+3)(3n+1)} \leq \sqrt[n]{15n^2} = 15^{1/n} n^{2/n} \longrightarrow 1$$

pro $n \geq 3$, zatímco tento faktor je alespoň 1. Věta o dvou policajtech tedy dává

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}} = \frac{2}{3}}.$$

Příklad 7.4

Bez ujmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a > b > 0$ a položíme $q = b/a$. Potom $0 < q < 1$ a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} &= \frac{a \sqrt[n]{1 + q^n}}{a^2 \sqrt[n]{1 + q^{2n}}} \\ &= \frac{1}{a} \frac{\sqrt[n]{1 + q^n}}{\sqrt[n]{1 + q^{2n}}}.\end{aligned}$$

Pro $r = q$ i $r = q^2$ máme $0 < r < 1$, a tedy

$$1 \leq \sqrt[n]{1 + r^n} \leq 2^{1/n} \longrightarrow 1.$$

Oba odmocninové faktory proto konvergují k 1 a jmenovatel má nenulovou limitu. Odtud

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} = \frac{1}{a}}.$$